

3-22-2023

## Multi-objective Optimization Algorithm Based on Multi-index Elite Individual Game Mechanism

Xu Wang

*College of Computer Science and Information Engineering, Harbin Normal University, Harbin 150025, China; wx971025@163.com*

Weidong Ji

*College of Computer Science and Information Engineering, Harbin Normal University, Harbin 150025, China; kingjwd@126.com*

Guohui Zhou

*College of Computer Science and Information Engineering, Harbin Normal University, Harbin 150025, China;*

Jiahui Yang

*College of Computer Science and Information Engineering, Harbin Normal University, Harbin 150025, China;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

# Multi-objective Optimization Algorithm Based on Multi-index Elite Individual Game Mechanism

## Abstract

**Abstract:** In order to improve the convergence of multi-objective optimization algorithm and the diversity of optimization solution set, and alleviate the flow down of population in target space, a multi-objective optimization algorithm based on multi-attribute elite individual game mechanism is proposed. *This paper uses Pareto dominance relationship and multi-index to comprehensively screen elite individuals. The elite individual game mechanism with K-means clustering is integrated with cross and mutation strategy, which effectively improves the convergence and diversity of the algorithm. A detailed convergence analysis of the algorithm is performed to prove the convergence of the algorithm.* Eight representative comparison algorithms are compared on the standard test function to solve the actual pump scheduling problem. The convergence and diversity of the algorithm in this paper are better than or equal to other comparison algorithms, verifying the effectiveness of the algorithm and reducing the probability of population flow down in the target space to a certain extent.

## Keywords

multi-objective optimization, convergence analysis, game mechanism, K-means clustering, elite individual screening

## Recommended Citation

Xu Wang, Weidong Ji, Guohui Zhou, Jiahui Yang. Multi-objective Optimization Algorithm Based on Multi-index Elite Individual Game Mechanism[J]. Journal of System Simulation, 2023, 35(3): 494-514.

# 基于多指标精英个体博弈机制的多目标优化算法

王旭, 季伟东\*, 周国辉, 杨佳慧

(哈尔滨师范大学 计算机科学与信息工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150025)

**摘要:** 为了改善多目标优化算法的收敛性与优化解集的多样性, 缓解种群在目标空间中的坍缩, 提出一种基于多指标精英个体博弈机制的多目标优化算法。利用 Pareto 支配关系与多指标综合筛选精英个体。将带有 K-means 聚类的精英个体博弈机制与交叉变异策略融合, 有效提升了算法的收敛性与多样性。对算法进行了详细的收敛性分析, 证明了算法的收敛性。将 8 个代表性的比较算法在标准测试函数上进行解集指标对比并解决实际水泵调度问题, 本文算法在收敛性与多样性上优于或持平其他比较算法, 验证了本文算法的有效性, 在一定程度上减小了种群在目标空间中坍缩的概率。

**关键词:** 多目标优化; 收敛性分析; 博弈机制; K-means 聚类; 精英个体筛选

中图分类号: TP301.6; TP391.9 文献标志码: A 文章编号: 1004-731X(2023)03-0494-21

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.21-1148

**引用格式:** 王旭, 季伟东, 周国辉, 等. 基于多指标精英个体博弈机制的多目标优化算法[J]. 系统仿真学报, 2023, 35(3): 494-514.

**Reference format:** Wang Xu, Ji Weidong, Zhou Guohui, et al. Multi-objective Optimization Algorithm Based on Multi-index Elite Individual Game Mechanism[J]. Journal of System Simulation, 2023, 35(3): 494-514.

## Multi-objective Optimization Algorithm Based on Multi-index Elite Individual Game Mechanism

Wang Xu, Ji Weidong\*, Zhou Guohui, Yang Jiahui

(College of Computer Science and Information Engineering, Harbin Normal University, Harbin 150025, China)

**Abstract:** In order to improve the convergence of multi-objective optimization algorithm and the diversity of optimization solution set, and alleviate the flown down of population in target space, a multi-objective optimization algorithm based on multi-attribute elite individual game mechanism is proposed. This paper uses Pareto dominance relationship and multi-index to comprehensively screen elite individuals. The elite individual game mechanism with K-means clustering is integrated with cross and mutation strategy, which effectively improves the convergence and diversity of the algorithm. A detailed convergence analysis of the algorithm is performed to prove the convergence of the algorithm. Eight representative comparison algorithms are compared on the standard test function to solve the actual pump scheduling problem. The convergence and diversity of the algorithm in this paper are better than or equal to other comparison algorithms, verifying the effectiveness of the algorithm and reducing the probability of population flown down in the target space to a certain extent.

**Keywords:** multi-objective optimization; convergence analysis; game mechanism; K-means clustering; elite individual screening

收稿日期: 2021-11-09

修回日期: 2022-02-08

基金项目: 国家自然科学基金(31971015); 黑龙江省自然科学基金(LH2021F037); 哈尔滨市科技局科技创新人才研究专项(2017RAQXJ050); 哈尔滨师范大学硕士研究生创新项目(HSDSSCX2021-119)

第一作者: 王旭(1997-), 男, 硕士生, 研究方向为群体智能、自然语言处理。E-mail: wx971025@163.com

通讯作者: 季伟东(1978-), 男, 教授, 博士, 研究方向为大数据、群体智能。E-mail: kingjwd@126.com

## 0 引言

在实际生产生活中存在大量需要同时优化多个目标的问题, 它们被称为多目标优化问题(multi-objective optimization problems, MOP)。相较于单目标优化问题, 多目标优化问题通常较为复杂且目标函数之间通常彼此冲突, 没有唯一解可以同时使所有目标达到最好<sup>[1]</sup>, 而是得到一组 Pareto 最优解(Pareto front, PF)的集合<sup>[2-3]</sup>。为了解决多目标优化问题, 国内外学者提出了多种多目标进化算法(multi-objective evolutionary algorithm, MOEA), 这些方法大致可分为以下3类:

(1) 基于分解的 MOEA。分解策略是解决 MOP 的常规思路, 通过已知的权重偏好对多个目标进行聚合, 将多目标问题转化为单目标问题。文献[4]提出基于分解的多目标优化算法(MOEA based on decomposition, MOEA/D), 算法将多目标优化问题分解为一组单目标子问题, 利用子问题之间的邻域关系协同优化全部子问题; 在此基础上, 文献[5]利用种群的邻域信息来形成自适应的判断信息, 判断问题的进化潜能与种群的进化状态, 优化了 MOEA/D 算法。MOEA/D 代表了一类开放式算法, 可以方便地与现有优化手段结合, 得到了广泛应用。

(2) 基于支配的 MOEA。算法利用 Pareto 支配关系使个体之间的优劣可比较, 不断淘汰被支配个体, 进而逼近最优 Pareto 前沿。国际上主流算法主要以文献[6]的 NSGA-II, 文献[7]的 SPEA2, 文献[8]的 PAES 为代表, 这类算法对 Pareto 前沿的形状和连续性不敏感, 能很好地逼近非凸或非连续 Pareto 前沿, 很少发生解集在目标空间坍塌停滞的现象。

(3) 基于指标的 MOEA。指标是用于评价算法好坏的化工具, 将评价指标整合至 MOEA 中, 用于指导 MOEA 的优化过程。文献[9]提出了一种基于超体积(hypervolume, HV)指标的多目标优化算法 HypE, 算法通过评价 HV 指标的好坏, 指导

种群不断逼近最优解; 文献[10]提出了 IBEA 算法, 算法结合 HV 指标, 计算个体进行适应度值, 淘汰适应度值较小的个体, 进而使种群收敛。这类算法时间复杂度较高, 因此选择什么指标引导种群进化成为了研究难点。

以上经典算法虽然可以在一些多目标优化问题上表现出色, 但随着多目标优化问题日益增多, 复杂度也不断提升, 经典算法对复杂多目标问题的求解存在收敛能力不足、计算效率不高的缺点, 因此迫切需要研究带有新型进化机制的多目标优化算法。文献[11]提出多目标粒子群优化算法(multi-objective particle swarm optimization, MOPSO), 利用粒子群优化模型解决多目标优化问题, 为解决 MOP 提供了新思路; 文献[12]提出一种利用多策略融合量子粒子群算法对多目标问题进行优化, 利用量子变异操作与动态惯性权重对量子粒子群进行优化, 取得了较好的结果; 文献[13]通过为每个个体设置多个交配选择源, 在利用相似个体重组加速算法收敛的同时较好地保持了种群的多样性; 文献[14]利用灰狼算法收敛快的特性来解决多目标智能家居负荷控制问题。文献[15]利用拥挤距离指标, 提出一种改进拥挤距离的多目标差分进化算法 MMODE\_ICD; 文献[16]将聚类与降维思想引入大规模多目标优化问题的解决, 对个体进行 LLE 降维, 提高算法寻优效率; 文献[17]提出了一种由 MOPSO 改进而来的 GMOPSO, 算法将博弈机制用于解决多目标优化问题, 利用稳态进化的特性, 有利于种群跳出局部极值; 文献[18]提出了一种花朵差分授粉 workflow 多目标调度优化算法。该算法将 workflow 中任务和虚拟机建模成花粉, 将完整的调度序列建模成花朵, 依据任务的偏序关系进行离散花朵授粉过程; 文献[19]融合分类与代理的混合个体选择机制, 提出了一种混合个体选择机制的多目标优化算法; 文献[20]提出一种多策略协同的多目标萤火虫算法 MOFA-MCS, 算法采用创建精英外部档案集的方式引导萤火虫移动, 并在移动的过程施加 Lévy flights 随机扰动, 体现出了显著的性能优势;

文献[21]通过粒子收敛性贡献对算法环境进行检测,自适应平衡搜索与开发过程。但由于多目标优化问题复杂的特性,以上算法在解决MOP时,个体易陷入局部最优值,或种群在目标空间陷入寻优停滞,因此,通过目标空间分区的方式来保持种群多样性是解决MOP的一种新思路。文献[22]提出权重向量和个体间的重新匹配策略,合理地分配个体,改善种群多样性;文献[23]提出一种带有基于分解方法的外部档案更新策略的AMOPSO-DA算法,算法通过空间分解提升优化解集的分布性。以上算法使用的空间划分方式虽然可以有效保持低维多目标问题优化解集的多样性,但随着目标数的增多,算法的空间分割压力呈指数上涨,算法效率随之降低,算法的收敛性不能得到有效保证。

为了解决经典算法收敛性、多样性不足,新型计算算法分组压力过大的问题,本文基于以上研究,通过分析多种MOEA算法优点,融合支配关系与指标,结合博弈机制,提出一种基于多指标精英个体博弈机制的多目标优化算法(multi-objective optimization algorithm based on multi-index elite individual game mechanism, MOMEIG),其解决的问题与主要的创新点表现在:

(1) 为了解决优化解集多样性不足与分组压力大的问题,提出了一种融合K-means聚类的改进博弈追逐策略。改进博弈策略采用配对比较、稳态进化与交叉变异策略。每一个体追逐自己的博弈目标与聚类引导目标,保持算法解集分布的多样性。与空间分区方式相比,聚类可有效解决分区压力骤增的问题,提高算法效率。通过对精英个体进行小幅度交叉与变异,可以使种群脱离坍塌状态,增大优化解集多样性。

(2) 为了增强算法的收敛速度与收敛程度,提出了基于Pareto支配关系与多个种群状态指标的精英个体筛选策略。精英个体筛选策略可以屏蔽非精英个体在寻优过程中对种群收敛的干扰,保持精英个体的优先领导力与种群的收敛活力,提

升收敛速度与收敛程度。拥挤距离指标与被支配程度指标的计算较为容易,算法效率与大部分经典算法效率持平。

## 1 多目标优化问题与博弈计算

### 1.1 多目标优化问题分析

对于一个多目标优化问题,给定决策向量 $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,它满足下列约束:

$$g_i(\mathbf{X}) \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, k \quad (1)$$

$$h_i(\mathbf{X})=0, \quad i=1, 2, \dots, l \quad (2)$$

设有 $r$ 个优化目标,且这 $r$ 个优化目标是相互冲突的,则优化目标可以表示为

$$f(\mathbf{X})=(f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_r(\mathbf{X}))$$

式中: $f_i(\mathbf{X})$ 为第 $i$ 个目标函数。多目标优化即寻求 $n$ 维决策向量 $\mathbf{X}^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ,使得 $f(\mathbf{X}^*)$ 在满足约束条件式(1)和(2)的同时达到最优。本文中的优化目标为求总目标的最小化,即

$$\min(f(\mathbf{X}))=(f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_r(\mathbf{X}))$$

多目标优化问题的复杂性表现在决策空间中不存在一个解,使的全部目标达到最优,而是得到一组平衡所有目标的Pareto最优解集。因此,我们更希望得到收敛性与多样性更好的优化解集。但许多的实际工程问题的PF是不规则的,例如DTLZ7问题的PF是不连续的,PF中含有 $2^{m-1}$ 个间断点。基于现有研究,MOMEIG算法尝试采用不同策略,使种群在保持收敛性的同时也能有较高的多样性。

### 1.2 博弈计算

粒子博弈计算是在传统粒子群算法的基础上改进而来<sup>[24]</sup>。不失一般性,考虑以下最小优化问题:

$$\min f=f(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in X \quad (3)$$

其中 $X$ 为优化问题的可行解域。

在标准粒子群算法中,为了寻找最小优化问题的最优解,粒子的位置及速度更新公式为

$$V_i(t+1)=\omega V_i(t)+c_1 R_1(t)(p_{\text{best},i}(t)-X_i(t))+c_2 R_2(t)(g_{\text{best}}(t)-X_i(t)) \quad (4)$$

$$X_i(t+1) = X_i(t) + V_i(t+1) \quad (5)$$

式中:  $\omega$  为惯性因子;  $c_1, c_2$  为学习率;  $p_{\text{best}}$  为个体最优位置;  $g_{\text{best}}$  为全局最优位置。通过以上公式, 个体可以受自身最优位置与全局最优位置的引导, 逐步逼近优化问题的最优解。但过快的收敛会导致种群陷入局部极值, 为了解决这个问题, 博弈计算采用了稳态进化的模式, 从种群中随机取出个体对进行博弈, 博弈失败个体向胜利个体学习, 并受种群平均位置的引导, 逐步逼近全局最优值。博弈计算的个体位置速度更新如式(6), (7)所示, 在博弈计算中, 由于每次迭代只更新一半的个体, 所以可以很好地保证种群的多样性。

$$V_{L,k}(t+1) = R_1(t)V_{L,k}(t) + R_2(t)(X_{W,k}(t) - X_{L,k}(t)) + \varphi R_3(t)(G_k(t) - X_{L,k}(t)) \quad (6)$$

$$X_{L,k}(t+1) = X_{L,k}(t) + V_{L,k}(t+1) \quad (7)$$

式中:  $R_1, R_2, R_3$  为3个0~1之间的随机数;  $k$  为聚类分组索引;  $G_k$  为子种群  $k$  中非支配排序等级最高粒子中的一个随机粒子;  $\varphi$  为全局影响因子;  $W$  为博弈胜利粒子标识;  $L$  为博弈失败粒子标识。二维空间中的博弈计算示意图如图1所示。其中  $G'_{\text{best}}$  为局部极值,  $G_{\text{best}}$  为全局最优值。

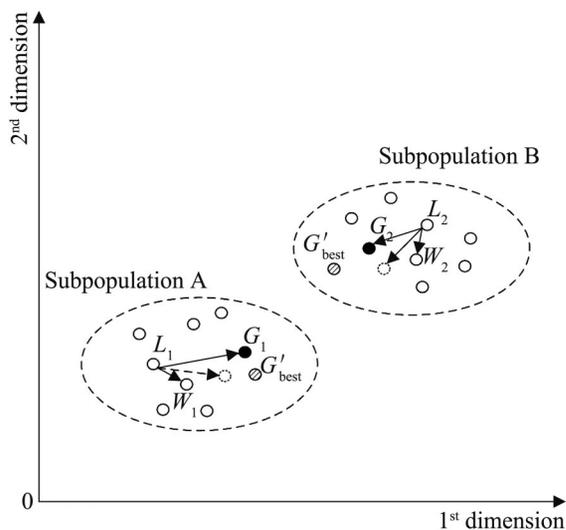


图1 二维空间中的博弈计算示意图

Fig. 1 Schematic diagram of game calculation in two dimensional space

从图1可以看出:  $L_1$  粒子仅受其所在子群非支

配等级最高粒子中的一个随机粒子  $G_1$  与博弈胜利粒子  $W_1$  引导, 减小了粒子受局部极值  $G'_{\text{best}}$  的影响。种群内部的博弈进化, 胜利的个体不改变位置和速度, 失败的个体对自身的位置速度进行更新, 节省了计算资源, 保持了种群的多样性, 降低种群陷入局部极值的概率。

## 2 MOMEIG 算法

MOMEIG 算法采用个体博弈机制, 并将 Pareto 支配关系与多种种群状态指标相结合, 构建稳态优化系统。算法围绕平衡多目标优化的多样性与收敛性、解决目标空间坍塌停滞及分区压力问题。博弈策略每次只更新一半个体, 降低计算量的同时有效增大种群多样性; 融合 K-means 聚类的分组机制在保持种群多样性的同时降低了求解高维多目标问题时的分组压力; 多指标精英个体筛选机制可以屏蔽种群中非精英个体对种群寻优带来的不利影响, 加快种群收敛; 模拟二进制交叉(simulated binary crossover, SBX)与多项式变异策略可以在一定程度上防止种群在目标空间中的坍塌, 帮助种群跳出局部极值, 增强算法稳定性。

### 2.1 融合 K-means 聚类的改进博弈机制

在博弈机制中, 通过对整个种群中两随机配对粒子进行博弈计算, 博弈失败粒子向博弈获胜粒子学习, 更新自己的速度和位置, 而获胜粒子则不作任何改变, 保持引导位置。一轮博弈迭代只更新一半的个体, 因此可以有效增加种群多样性。在博弈失败粒子位置更新中, 博弈机制放弃传统粒子群算法追逐个体最优与全局最优的机制, 而是改为追逐博弈胜利粒子与子种群中非支配等级最高粒子中的一个随机粒子, 使种群优化平行推进, 增加了种群的多样性。

为了适应多目标优化问题的环境, 增强优化解集分布的多样性, 本文提出了一种融合 K-means 聚类的改进博弈机制。K-means 算法将样本聚类成  $k$  个簇, 对于一组训练样本  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$   $x_i \in \mathbb{R}^n$ ,

K-means 算法具体描述如下:

(1) 随机选取  $k$  个聚类质心:

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}^n$$

(2) 重复以下过程直至收敛

{

计算样例  $i$  所属的簇:

$$c_i = \arg \min_j \|x_i - \mu_j\|^2, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, k$$

对于每一个簇  $j$ , 计算该簇质心:

$$\mu_j = \frac{1}{|c_j|} \sum_{x \in c_j} x$$

}

通过 K-means 聚类算法将种群分为若干个子群, 每个子群中的博弈失败个体不再向种群全部粒子位置的平均值位置追逐, 而是从子群中非支配等级最高的个体中随机选择一个个体作为引导个体, 子群中的个体对引导个体进行追逐, 在保持种群多样性的基础上尽量增加收敛性, 降低求解高维多目标问题时的分组压力。改进博弈机制种群更新公式为

$$v_{f,i}(t+1) = c_1 v_{f,i}(t) + c_2 (X_{w,i}(t) - X_{f,i}(t)) + \varphi c_3 (X_{k,i}(t) - X_{f,i}(t)) \quad (8)$$

$$X_{f,i}(t+1) = X_{f,i}(t) + v_{f,i}(t+1) \quad (9)$$

式中:  $v_{f,i}(t)$  为博弈失败粒子的速度;  $X_{w,i}(t)$  为博弈获胜粒子位置;  $X_{f,i}(t)$  为博弈失败粒子位置;  $X_{k,i}(t)$  为当前个体所在类别的引导个体位置;  $c_1, c_2, c_3$  为  $[0, 1]$  之间的随机数;  $\varphi$  为控制学习比率的一个控制参数。图 2 给出了在双目标问题环境下博弈失败个体在目标空间中的追逐目标示意图。

图 2 中,  $A, B, C$  分别为 K-means 上的 3 个聚类簇,  $A_1, A_2, B_1, C_1$  为博弈失败个体在外部空间中的位置,  $A_1', A_2', B_1', C_1'$  为对应配对博弈成功个体在外部空间中的位置,  $A_{g_{best}}, B_{g_{best}}, C_{g_{best}}$  为每个聚类组中的最优个体。以簇  $A$  为例, 簇中博弈失败的个体  $A_1, A_2$  被博弈成功个体  $A_1', A_2'$  引导, 提升优化解集多样性, 同时  $A_1, A_2$  也被簇  $A$  中的最优解  $A_{g_{best}}$  引导, 提升算法收敛性。融合 K-means 聚类的改进博弈机制的伪代码如下:

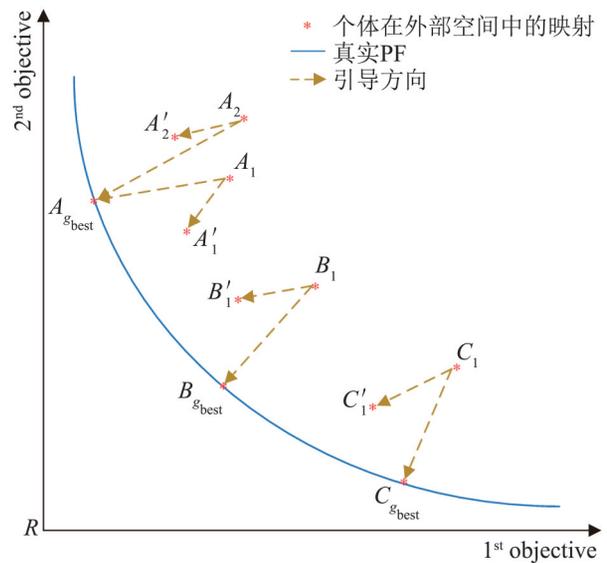


图 2 博弈失败个体在目标空间中的追逐方向

Fig. 2 Pursuit direction of failed individual in target space

### 算法 1 Game Evolution (GE)

Input:  $K\_num$ , Population  $P(t)$

Output: Population  $P'(t)$

Begin

Select  $a, b$  from  $P(t)$  random;

IF  $a < b$

$b\_new = b \rightarrow a$ ;

ELSE IF  $b < a$

$a\_new = a \rightarrow b$ ;

ELSE

$c = \text{Max}(\text{crowded\_distance}(a),$

$\text{crowded\_distance}(a));$

$d = \text{Min}(\text{crowded\_distance}(a),$

$\text{crowded\_distance}(a));$

$c\_new = c \rightarrow d$ ;

End

## 2.2 Pareto 支配关系与多状态指标

为了稳定收敛, 保持优化解集多样性, 本文突破只考虑 Pareto 支配关系或只考虑状态指标求解多目标优化问题的思路瓶颈, 将 Pareto 支配关系与多种状态指标有机结合, 对种群进行精英个

体筛选, 屏蔽非精英个体对博弈优化的不良影响, 增强了算法的寻优质量。

### 2.2.1 基于 Pareto 支配关系的非支配排序

算法通过 Pareto 支配关系将种群分为若干层, 即对种群进行非支配排序。算法将种群  $P$  分类排序为  $k$  个子集  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , 且满足如下性质<sup>[25]</sup>:

- (1)  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$ 。
- (2)  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  且  $i \neq j, P_i \cap P_j = \emptyset$ 。
- (3)  $P_1 \succ P_2 \succ P_3 \succ \dots \succ P_k$

对种群进行快速非支配排序有利于横向淘汰非精英个体, Pareto 等级较为靠后的个体对种群进化的引导意义不大, 淘汰这些个体有利于节省计算资源, 加速种群收敛。

### 2.2.2 被支配程度与拥挤距离

支配当前个体的个体数为当前个体的被支配程度, 个体  $p$  的被支配程度越大, 表示种群中支配的个体越多, 间接表示该个体在博弈优化过程中对算法收敛的负面影响越大。

为了使算法得到的优化解集更均匀, 引入拥挤距离指标, 个体的拥挤距离指标反映了当前个体所处位置的个体密集程度。通过对同一 Pareto 支配等级的个体进行拥挤距离排序, 淘汰拥挤距离较小的个体, 有利于提高种群多样性, 增强种群的收敛活力。

## 2.3 基于 Pareto 支配关系与多个种群状态指标的精英个体筛选策略

策略初始化 Elite 集, Elite 集的规模为种群规模的一半。精英个体筛选策略首先对种群进行快速非支配排序, 确定个体的非支配等级。非支配排序将种群分为  $k$  个排序子群, 算法优先考虑个体的非支配等级, 将非支配等级高的子群全部放入 Elite 集中, 直到下一排序等级的子群无法放入 Elite 集中。此时, 算法将从基于 Pareto 支配关系的精英个体筛选策略转换为基于多指标的精英个体筛选策略, 用以补全 Elite 集。基于多指标的精英

个体筛选规则如下:

(1)  $k > 1$ 。此时种群分为多个排序子集, 种群处于探索状态, 为了保持种群在当前状态的多样性, 算法采用被支配程度指标对精英个体进行筛选。忽视聚类分组的隔离影响对粒子进行淘汰, 保持种群在探索过程中的多样性。基于被支配程度的精英个体筛选策略示意图如图 3 所示, 图中红色数字为支配该个体的个体数, 作为被支配程度, 被支配程度较大的个体被淘汰, 较小的个体进入 Elite 集中。

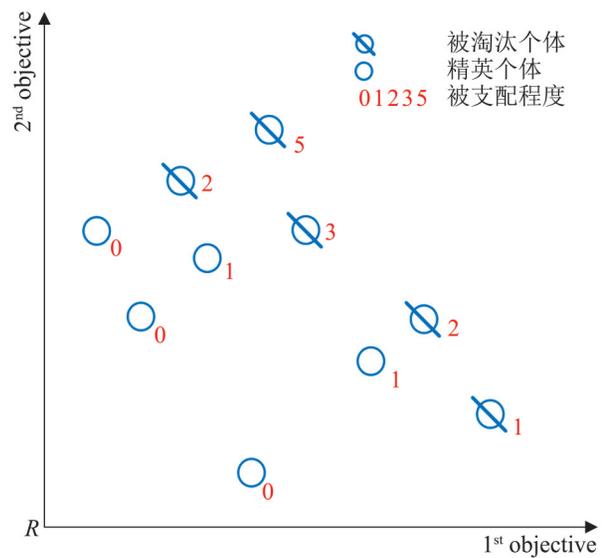


图3 基于被支配程度的精英个体筛选策略示意图  
Fig. 3 Schematic diagram of elite individual screening strategy based on dominance

从图3可以看出, 在淘汰被支配程度较高的个体后, 收窄了外部空间的搜索域。对于一个具有多个非支配等级的种群来说, 优先淘汰被支配程度较高的个体收窄种群搜索域有利于种群快速收敛, 避免种群受到较差个体的不良影响, 增大种群进入新空间搜索的概率。

(2)  $k = 1$ 。此时种群只有一个排序子集, 算法进入收敛状态, 为了最终得到一个分布均匀、多样性良好的优化解集, 算法采用拥挤距离指标对解集进行多样性增强优化。由于此时只有一个排序子集, 因此基于拥挤距离的精英个体筛选策略

直接将全部个体进行拥挤距离排序，根据拥挤距离由大到小的顺序填满 Elite 集。

最终，算法会得到一个规模为原始种群一半的精英子群，精英子群内部博弈会屏蔽非精英个体对算法收敛的干扰，其有效性分析如下：

在非 Elite 集环境下，种群规模为  $N$ ，在  $t$  时刻种群在目标空间分布区域大小为  $\tau(t)$ ，根据博弈优化特性，在一轮迭代的  $k$  次博弈配对中，非支配等级低的子群会被非支配等级高的子群引导，即在目标空间中，后方较差个体会被中间较好个体引导，中间个体被前沿优秀个体引导的机会随之降低。我们记中间个体被引导概率为  $P_m(t)$ ，种群进入新目标空间区域的大小为  $\tau^*(t)$ ，满足如下关系：

$$P_m(t) \propto \frac{1}{\tau(t)}$$

$$\tau^*(t) \propto P_m(t)$$

由此可知，种群的收敛能力与上一次迭代种群在目标空间中的分布区域大小成反比。在带有 Elite 集的环境下，精英种群规模为  $N/2$ ，种群在目标空间分布区域随之减小。在淘汰非精英个体后，中间个体被前沿优秀个体引导概率增大，种群进入新目标空间区域的大小与概率增加，算法收敛性增强。算法在 4 个个体，2 次博弈配对中的有效

性示意如图 4 所示。

从图 4 可以看出，在不带有 Elite 集的环境中，非精英个体  $A$  和  $B$  被向前引导，但种群整体的最前沿并未向前移动，这也就意味着个体  $A$  和  $B$  在本次迭代中的移动对优化解集的寻找无意义，对种群引导位置的更新也无意义，本次迭代对  $A$  和  $B$  的引导浪费了计算资源。在带有 Elite 集的环境中， $A$  和  $B$  被淘汰， $C$  和  $D$  进入 Elite 集中参与进化，计算资源分配给了较为靠前的  $C$  和  $D$ ， $C$  和  $D$  相互引导进化，推动优化解集的更新，同时推动了整个种群引导位置的更新，加速种群寻优，节省计算资源。

在采用基于 Pareto 支配关系与多指标精英个体筛选策略的情况下，种群可以在保持多样性的情况下增加其收敛能力，充分搜索稀疏区域，排除较差个体对整个种群寻优的影响，提升算法搜索效率，增强算法的收敛性与优化解集的多样性。基于 Pareto 支配关系与多指标的精英个体筛选策略如图 5 所示。

通过对种群进行非支配排序，判断当前种群状态，根据种群的状态信息选用不同的指标对精英个体进行筛选，搜索前期加速收敛，搜索后期增大多样性。基于 Pareto 支配关系与多指标的精英个体筛选策略伪代码如下：

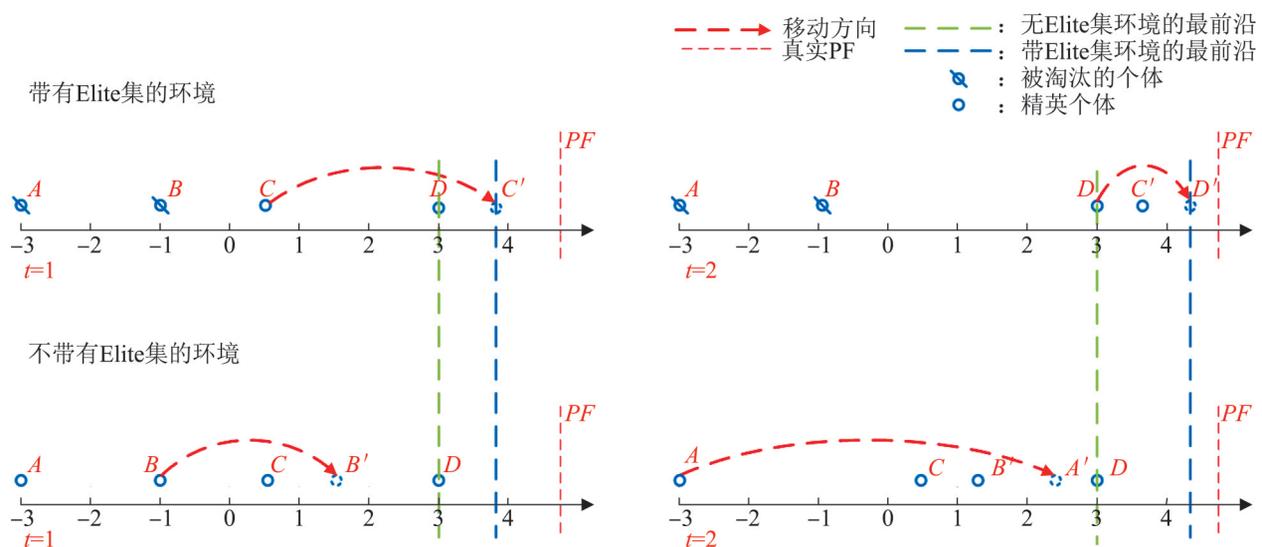


图 4 4 个个体 2 次博弈配对 Elite 集有效性示意

Fig. 4 Schematic diagram of the effectiveness of paired elite sets of four individuals in two games

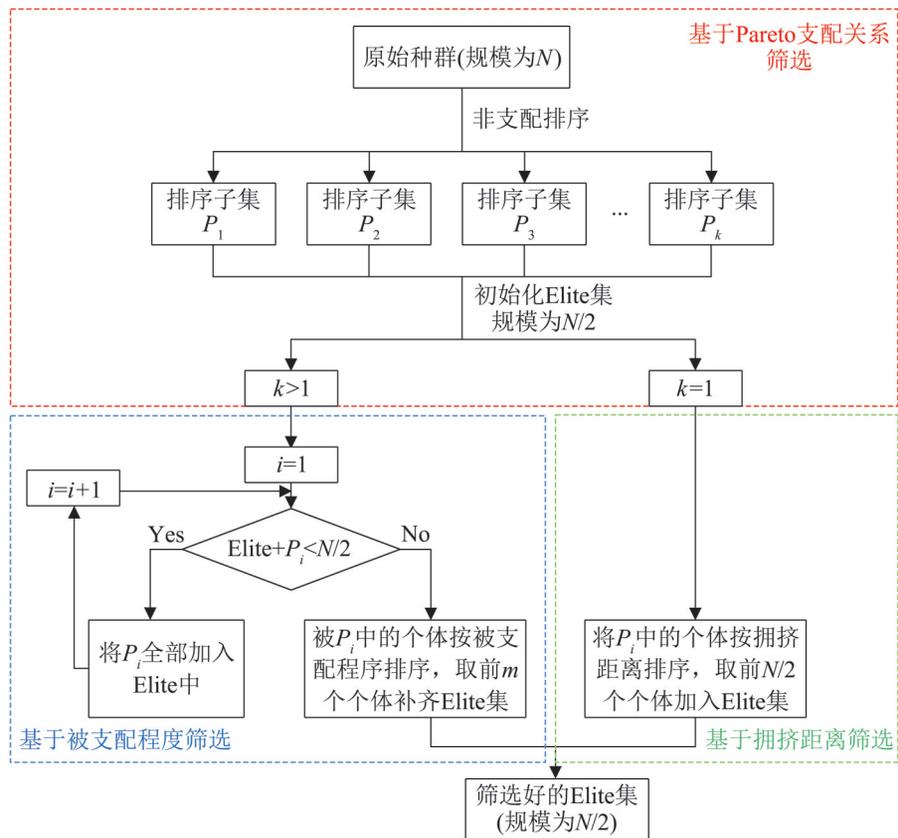


图5 基于 Pareto 支配关系与多指标的精英个体筛选策略

Fig. 5 Elite individual screening strategy based on Pareto dominance relationship and multi-index

**算法2 Elite Select (ES)**Input:  $N$ , Population  $P'(t)$ Output: Population  $E(t)$ 

Begin

 $E(t) = \text{NULL};$  $\max\_rank = \max(\text{non\_domination\_sort}(P'(t)));$ IF  $\sim \max\_rank == 1$ FOR  $i = 1: \max\_rank$ IF  $\text{count}(P'_i(t)) < N/2$  $E(t) = E(t) + P'_i(t);$ ELSE IF  $\text{count}(P'_i(t)) > N/2$ Temp =  $\text{sort}(\text{crowded}(P'_i(t)), \text{ascend});$  $E(t) = E(t) + \text{Temp}[1, N/2];$ 

RETURN;

ELSE

 $E(t) = E(t) + P'_i(t);$ 

RETURN;

END

ELSE

Temp =  $\text{sort}(\text{dominated}(P'_i(t)), \text{ascend});$  $E(t) = E(t) + \text{Temp}[1, N/2];$ 

End

**2.4 模拟二进制交叉与多项式变异**

在多目标优化过程中, 算法容易陷入局部最优或在目标空间中坍塌, 为了解决这个问题, 使算法获得更加均匀、收敛程度更好的优化解集, 本文引入进化算法中的模拟二进制交叉与多项式变异。实验证明, 种群在目标空间中坍塌后, 对种群中的个体进行小幅度的模拟二进制交叉与多项式变异有利于种群脱离坍塌状态; 种群陷入局部极值时, 采用上述策略亦可以使部分个体脱离局部极值, 成为新的引导个体, 引导种群脱离局部极值, 提升算法收敛程度。

### 2.4.1 模拟二进制交叉<sup>[26]</sup>

在Elite集中随机选择2个父代个体 $x_a$ 和 $x_b$ ，交叉生成如下后代：

$$y_1(j) = 0.5[(1-r_j)x_a(j) + (1+r_j)x_b(j)] \quad (10)$$

$$y_2(j) = 0.5[(1+r_j)x_a(j) + (1-r_j)x_b(j)] \quad (11)$$

式中： $j$ 为个体维度； $r$ 为随机数，由式(12)生成：

$$r = \begin{cases} (2r^*)^{1/(\eta_1+1)}, & r^* \leq 0.5 \\ (2-2r^*)^{-1/(\eta_1+1)}, & r^* > 0.5 \end{cases}, r^* \sim U[0, 1] \quad (12)$$

式中： $\eta_1$ 是任意非负实数。文献[26]讨论了 $\eta_1$ 值对算子的影响，并推荐将 $\eta_1$ 值控制在0~5之间。

### 2.4.2 多项式变异

将交叉后得到的新个体采用多项式变异算子进行变异。取个体 $x$ ，得到变异个体：

$$x_j^* = x_j + \Delta_j \quad (13)$$

式中： $j$ 为个体维度， $\Delta_j$ 由式(14)计算得到：

$$\Delta_j = \begin{cases} (2u_j)^{1/(\eta_2+1)} - 1, & u_j < 0.5 \\ 1 - (2(1-u_j))^{1/(\eta_2+1)}, & u_j \geq 0.5 \end{cases} \quad (14)$$

式中： $u_j \sim U[0, 1]$ 。

对规模为 $N/2$ 精英种群进行模拟二进制交叉与多项式变异后得到规模为 $N$ 的精英子群，这个子群在一定程度上可以帮助原始父代群脱离局部极值，跳出种群在目标空间的坍塌停滞困境。模拟二进制交叉与多项式变异算子伪代码如下：

#### 算法3 Crossover and Mutation (CM)

Input:  $N$ , Population  $E(t)$

Output: Population  $P(t+1)$

Begin

$P(t+1) = \text{NULL};$

FOR  $i = 1:N$

Select  $a, b$  from  $E(t)$  random

$[a, b] = \text{crossover}(a, b);$

$a = \text{mutation}(a);$

$b = \text{mutation}(b);$

$P(t+1) = P(t+1) + [a, b];$

END

### 2.5 MOMEIG算法

基于多指标精英个体博弈机制的多目标优化算法(MOMEIG)计算流程如下：

step 1: 根据问题的解空间初始化种群 $P(0)$ ，规模为 $N$ ，设置K-means算法的聚类分组数 $k$ ，博弈惯性权重 $w(0)$ ，学习因子 $c_1(0)$ ， $c_2(0)$ ，交叉概率 $Pc$ 与其参数 $\eta_1$ ，变异概率 $Pm$ 与其参数 $\eta_2$ 。

step 2: 对初始化种群进行一次非支配排序，计算每个个体的被支配程度与拥挤距离。

step 3: 利用K-means算法对种群进行聚类分组，从每一个分组 $P_i(t)$ 中支配等级最高的子群中随机选择一个引导该分组其他个体的引导个体。根据博弈机制进行个体配对博弈，按照式(8)，(9)依次更新博弈失败个体的速度及位置。

step 4: 对种群进行非支配排序，计算每个个体的被支配程度与拥挤距离。

step 5: 根据Pareto支配关系与多指标精英个体筛选策略筛选精英个体，得到规模为 $N/2$ 的Elite集。

step 6: 根据式(10)~(12)对得到的Elite集进行模拟二进制交叉与多项式变异，得到规模为 $N$ 的子代种群。将子代种群与父代种群合并，得到规模为 $N3/2$ 的混合种群。

step 7: 对混合种群进行精英个体筛选，将种群规模恢复至 $N$ 。

step 8: 判断算法是否达到终止条件，如达到则退出循环并输出最终的优化解集；如尚未达到条件，则返回到step 3。

MOMEIG算法的伪代码描述如下：

#### 算法4 MOMEIG Algorithm

Initialize  $P(0)$  random;

$t = 0;$

While stop condition satisfied

$K\_num = \text{K-means}(P(t));$

$P'(t) = \text{GE}(P(t), K\_num);$

$E(t) = \text{ES}(P'(t));$

$P(t+1)=CM(E(t));$

End

## 2.6 MOMIEIG算法的时间复杂度分析

为了计算MOMEIG算法的时间复杂度, 本文通过分析博弈计算、快速非支配排序、拥挤距离排序与被支配程度计算这四部分的时间复杂度, 最终得到MOMEIG算法的时间复杂度。设问题目标数为 $M$ , 种群规模为 $N$ , 对于算法的每一次迭代有以下时间复杂度分析:

(1) 博弈计算的时间复杂度: 种群内部博弈次数为种群规模的 $1/2$ , 选取方式为随机配对选取, 因此时间复杂度为 $O(N)$ 。

(2) 快速非支配排序的时间复杂度: 首先要计算支配个体 $p$ 的个体数与被 $p$ 支配的个体集合, 所需时间为 $O(MN^2)$ , 之后计算非支配排序等级, 最坏情况是规模为 $N$ 的种群有 $N$ 个非支配排序等级, 时间复杂度为 $O(N^2)$ , 因此时间复杂度为 $O(MN^2)$ 。

(3) 拥挤距离排序的时间复杂度: 计算拥挤距离的时间为 $O(MN)$ , 最坏情况下对 $M$ 个目标进行快速排序所需时间为 $O(MN \ln N)$ , 因此拥挤距离排序的时间复杂度为 $O(MN \ln N)$ 。

(4) 被支配程度计算的时间复杂度: 被支配程度计算需要个体与其他全部个体进行支配比较, 因此时间复杂度为 $O(N^2)$ 。

综上, MOMEIG的时间复杂度为 $O(N) + O(MN^2) + O(MN \ln N) + O(N^2) = O(MN^2)$ 。算法的时间复杂度持平经典的NSGA-II算法。

## 3 MOMIEIG算法的收敛性分析

定义1 偏序关系与偏序集

令 $x, y \in L$ ,  $R$ 为定义在 $x, y$ 上的二元关系, 即存在序偶 $\langle x, y \rangle \in R$ , 以 $xRy$ 表示。若对于 $\forall x \in L$ ,  $xRx$ 则称 $R$ 具有自反性; 若 $\forall x, y \in L$ ,  $xRy, yRx$ , 必有 $x=y$ , 则称 $R$ 具有反对称性; 若 $\forall x, y \in L, xRy, yRz$ , 必有 $xRz$ , 则称 $R$ 具有传递性。

若二元关系 $R$ 是自反的、反对称的、传递的,

则称 $R$ 为偏序关系,  $(L, R)$ 为偏序集。在多目标优化问题中定义的支配关系“ $\succ$ ”是严格的偏序关系。

定义2 最小元素与非支配集

若在 $L$ 中,  $\exists x \in L$ , 使 $x \succ x^*$ , 则称 $x^*$ 是偏序集 $(L, \succ)$ 中的最小元素。所有最小元素的集合表示为 $M(L, \succ)$ , 这里定义的最小元素集合即为 $L$ 的非支配集。

定义3 Box计数维数

在空间 $L^k$ 中, 一个有界集 $X$ 的Box计数维数定义为

$$\text{box}D(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

式中:  $N(\varepsilon)$ 为与 $X$ 相交的Box数目;  $\text{box}D(X)$ 存在。在二维空间中的Box计数维数示例如图6所示。由图6可知, 在二维空间中, 如果Box边长为 $\varepsilon^*$ , 图像被Box覆盖的数目为 $N(\varepsilon^*)$ , 易知:

$$N(\varepsilon^*) \propto (\varepsilon^*)^{-2}$$

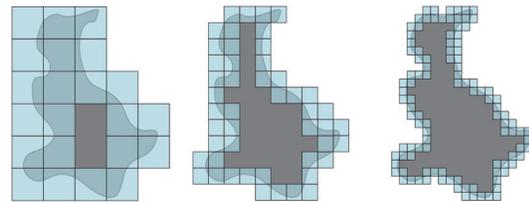


图6 二维空间中的Box计数维数示例

Fig. 6 Example of box counting dimension in two-dimensional space

定理1 对于一个确定的具有 $r$ 个目标的多目标优化问题, 其真实Pareto前沿(pareto front, PF) $PF_{\text{true}}$ 是一个Box计数维数不大于 $r-1$ 的集合<sup>[27-28]</sup>。

证明<sup>[29]</sup>: 假设 $PF_{\text{true}}$ 是一个定义在 $[0, 1]^r$ 上的有界集, 令 $X$ 为 $PF_{\text{true}}$ 的闭包, 因此 $X$ 是一个定义在 $[0, 1]^r$ 上的有界集。现在将空间划分若干个边长为 $\varepsilon$ 的 $r$ 维Box, Box的边与每目标轴平行。存在一个距离间隔集 $z = \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, [1/\varepsilon]\varepsilon\}^{r-1}$ , 令 $L_z = [z_1, z_1 + \varepsilon] \cdot [z_2, z_2 + \varepsilon] \cdots [z_{r-1}, z_{r-1} + \varepsilon] \cdot [0, 1]$ 。若 $X \cap L_z \neq \emptyset$ , 定义 $p_z$ 为 $L_z$ 中的前沿最小点, 令 $B_z$ 为包含 $p_z$ 的Box。定义 $X_\varepsilon = \{p_z\}$ ,  $B_\varepsilon$ 为全部 $B_z$ 的并集。因为 $X$ 为闭集,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon = X$ 。令 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon = B$ ,  $B$ 覆盖

$X$ 。因为 $X$ 为 $PF_{\text{true}}$ 的闭包，所以 $B$ 覆盖 $PF_{\text{true}}$ 。因此， $N(\varepsilon) = |L_z| = \lceil 1/\varepsilon \rceil^{r-1}$ ， $PF_{\text{true}}$ 的Box计数维数为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\lceil 1/\varepsilon \rceil^{r-1})}{\ln(1/\varepsilon)} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(2/\varepsilon)^{r-1}}{\ln(1/\varepsilon)} =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{(r-1)\ln(2)}{\ln(1/\varepsilon)} + (q-1) \right] = r-1$$

命题得证。

定义4 (“ $\geq$ ”关系)对于一个给定的MOP和2个进化群体 $P_1$ 和 $P_2$ ，若 $\forall x \in P_1, \exists y \in P_2$ ，使 $y \succ x$ ，则定义 $P_1$ 和 $P_2$ 的关系为 $P_1 \geq P_2$ 。

定义5 (Markov链)设 $\{y^{(t)}, t \geq 0\}$ 为一组随机决策变量，变量值的集合为 $L = \{j\}$ ，则称 $L$ 为状态空间。若对于任意的 $t \geq 1, i^{(k)} \in L(k \leq t+1) k \in N^+$ ，有

$$p(y^{(t+1)} = i^{(t+1)} | y^{(t)} = i^{(t)}, \dots, y^{(0)} = i^{(0)}) =$$

$$p(y^{(t+1)} = i^{(t+1)} | y^{(t)} = i^{(t)})$$

即种群当前状态只与上一次的状态有关，称 $\{y^{(t)}, t \geq 0\}$ 为马尔可夫链<sup>[30]</sup>。

定理2 对于一个给定 $r$ 个目标的MOP，MOMEIG满足如下条件：

(1) 给定MOP的 $PF_{\text{true}}$ 的Box计数维数不大于 $r-1$ 。

(2) 对于每次迭代得到的种群 $P(0), P(1), \dots, P(T)$ 有

$$\forall t: P(t+1) \geq P(t)$$

则MOMEIG依概率1收敛，概率为

$$P_{\text{pop}}(\lim_{t \rightarrow \infty} \{PF_{\text{true}} = P(t)\}) = 1$$

式中： $PF_{\text{true}}$ 为给定MOP的Pareto最优解集。

证明：可以将MOMEIG算法执行过程看做一个Markov过程，这个过程中包含2个状态：

状态1  $P(t) = PF_{\text{true}}$ 成立。

状态2  $P(t) = PF_{\text{true}}$ 不成立。

由定理2的(2)可知：

$$P_{\text{pop}}(P(t) = PF_{\text{true}} \text{不成立} | P(t) = PF_{\text{true}} \text{成立}) = 0$$

由此表明算法单向；由定理2的(1)可知：

$$P_{\text{pop}}(P(t) = PF_{\text{true}} \text{成立} | P(t) = PF_{\text{true}} \text{不成立}) > 0$$

由此表明算法渐进。综上，算法满足Markov性质，即MOMEIG算法以概率1渐进收敛。

## 4 实验及结果分析

为了验证MOMEIG算法的有效性，本文将MOMEIG算法应用于ZDT测试函数系列与DTLZ测试函数系列，将MOMEIG算法与经典算法NSGA-II<sup>[6]</sup>，SPEA2<sup>[7]</sup>，MOEA/D<sup>[4]</sup>，MOPSO<sup>[11]</sup>以及近些年的几个优秀算法GMOPSO<sup>[17]</sup>、AMOPSO-DA<sup>[23]</sup>、pccsAMOPSO<sup>[18]</sup>、MOFA-MCS<sup>[20]</sup>算法进行比较，得出不同算法在不同测试函数上收敛性与多样性的优劣。采用以上算法与MOMEIG算法对比的原因为：① NSGA-II算法采用快速非支配排序以及拥挤距离的策略且时间复杂度低，由于其性能上的优势，多年来常被用作对比算法；② SPEA2算法是多目标经典算法之一，常与NSGA-II等算法一起被用作对比；③ MOEA/D是基于分解的一种能够有效解决大变量优化问题的算法；④ MOPSO算法是一种收敛速度较快的经典多目标优化算法；⑤ GMOPSO将博弈理论与粒子群优化算法结合，用以解决多目标优化问题；⑥ AMOPSO-DA利用外部档案分区策略保持解集多样性，取得了较好的结果；⑦ pccsAMOPSO利用Pareto熵提高了外部档案中非支配解的多样性与收敛性，是一种带有新型指标的多目标优化算法；⑧ MOFA-MCS利用多策略协同进化的萤火虫算法解决多目标优化问题，是一种新型多目标进化算法。以上算法均在引言部分引述。本文将MOMEIG算法应用于简化水泵调度问题<sup>[31]</sup>，与NSGA-II算法与MOPSO算法进行对比，比较3个算法在解决实际问题时收敛性与多样性的优劣。

### 4.1 评价指标

为了评价算法求得优化解集的收敛性与多样性，本文采用反世代距离(inverted generational distance, IGD)<sup>[32]</sup>来对算法的收敛性和分布性进行比较和评价。IGD指标主要通过计算每个在真实Pareto前沿面上的参考点到算法获取的个体外部空间映射之间的最小距离和，来评价算法的收敛性

性能和分布性能。本文实验所使用的真实 Pareto 前沿点均是从真实 Pareto 前沿上均匀采样得到, 可以真实反映算法的收敛性与多样性好坏。IGD 值越小, 说明算法得到的最优解集越靠近真实 Pareto 前沿, 算法的综合性能越好。

IGD 指标为

$$IGD(F^*, F) = \frac{\sum_{re \in F^*} d_{re}}{|F^*|}$$

式中:  $F^*$  为真实 Pareto 前沿;  $F$  为算法得到的最优解集;  $d_{re} = \min_{i \in F} |re - i|$  为 Pareto 最优面上点  $re$  与算法最优解集中个体  $i$  的最小欧式距离。

## 4.2 聚类分组数 $k$ 取值实验

在 MOMEIG 算法中, 聚类分组数  $k$  是提高种群多样性的重要参数, 为了使 MOMEIG 算法得到的结果有较高的多样性, 对聚类分组数  $k$  的取值进行实验。因篇幅限制, 只展示 MOMEIG 算法使

用不同分组数在 ZDT2、ZDT3、DTLZ2 与 DTLZ4 上的 IGD 曲线图, 实验结果如图 7 所示。

从图 7 中可以看出, 当  $k=7$  时, 算法 IGD 值曲线较  $k$  等于其他值时表现更好, 最终 IGD 值也更低, 因此在实验中, 聚类分组数  $k$  选为 7。

## 4.3 实验参数及测试函数

为了验证 MOMEIG 算法的收敛性及分布性, 本文将 MOMEIG 算法与经典算法和近年来 4 个优秀算法在标准测试函数 ZDT1~4, ZDT6<sup>[33]</sup>, DTLZ2、DTLZ4、DTLZ7<sup>[34]</sup> 上进行了实验数据对比。测试函数属性设置如表 1 所示。MOMEIG 算法参考多目标粒子群算法与遗传算法的最优参数设置, 初始惯性权重  $w$  设置为 0.5, 学习因子  $c_1$  与  $c_2$  均设置为 1, 交叉概率  $P_c$  为 0.7, 变异概率  $P_m$  为  $1/n$ , 其中  $n$  为种群规模, 模拟二进制交叉与多项式变异分布指数  $\eta_1$  与  $\eta_2$  分别为 2 和 5, MOMEIG 算法的 K-means 聚类分组数设置为 7。

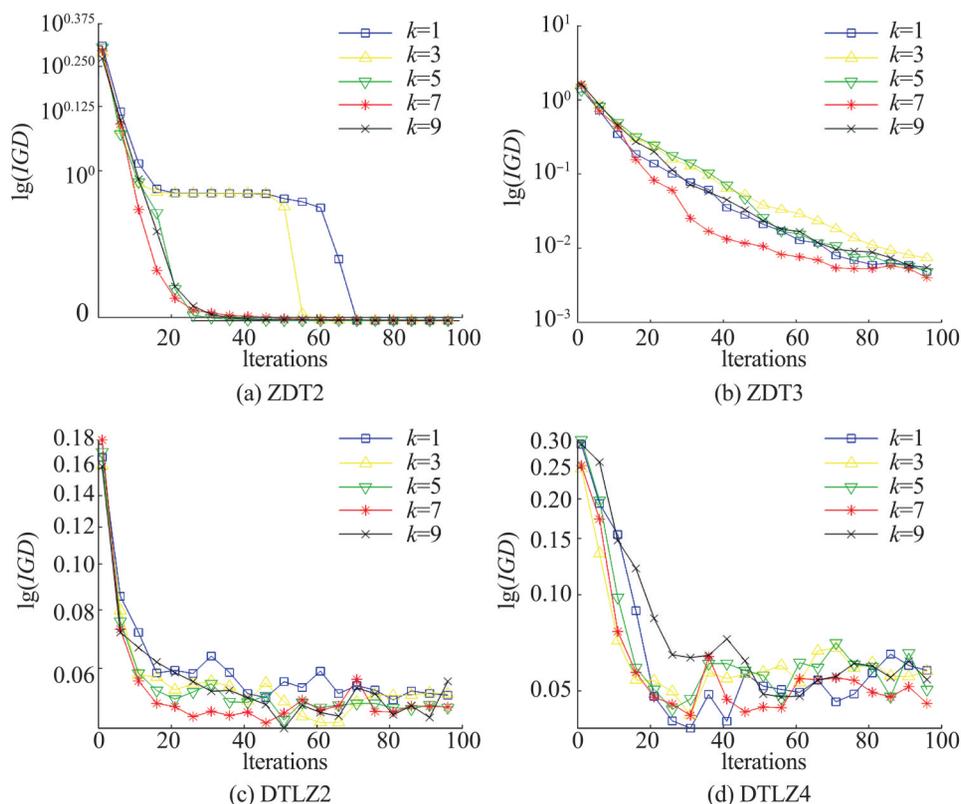


图7 MOMEIG 算法在不同  $k$  值时的 IGD 曲线

Fig. 7 IGD curves of MOMEIG algorithm with different  $k$  values

表 1 测试函数属性  
Table 1 Test function properties

测试函数	维度		真实 PF 样本数
	向量维度	目标数	
ZDT1	30	2	1 000
ZDT2	30	2	500
ZDT3	30	2	136
ZDT4	10	2	200
ZDT6	10	2	2 992
DTLZ2	10	3	10 000
DTLZ4	10	3	4 000
DTLZ7	20	3	9 409

为了保证对比的正确性, MOMEIG 算法在与经典算法对比时, 种群大小为 300, 迭代次数为 100。本文将每种算法在全部测试函数上独立运行 30 次, 通过比较算法优化解集 IGD 指标的最优值(Best)、平均值(Mean)与标准差(std), 判断算法优劣。全部实验算法参数设置如表 2 所示。表 2 中,  $P_M$  为变异概率,  $P_C$  为交叉概率。对于 AMOPSO-DA 算法,  $d$  为方向向量个数。对于 pccsAMOPSO,  $p_{\text{archive}}$  代表个人外部档案规模,  $g_{\text{archive}}$  代表全局外部档案规模。对于 MOFA-MCS,  $\alpha$  为步长系数,  $\beta_0$  为吸引度系数,  $\gamma$  为吸收系数。

表 2 算法参数  
Table 2 Algorithm parameters

算法名称	算法参数
MOMEIG	$w=0.5, c_1=c_2=1, P_C=0.7,$ $P_M=1/n, \eta_1=2, \eta_2=5, k=7$
NSGA-II	$P_C=0.7, P_M=1/n, \eta_1=2, \eta_2=5$
SPEA2	$P_C=0.7, P_M=1/n, \eta_1=2, \eta_2=5$
MOPSO	$w=0.5, c_1=c_2=1$
GMOPSO	$w=0.5, c_1=c_2=1$
AMOPSO-DA	$w=0.5, c_1=c_2=1, d=100$
pccsAMOPSO	$p_{\text{archive}}=25, g_{\text{archive}}=100$
MOFA-MCS	$\alpha=0.25, \beta_0=1, \gamma=1$

#### 4.4 验证 MOMEIG 算法主要部分的有效性

本节通过比较 MOMEIG 算法与它的 3 种消融变体来分析 MOMEIG 所采用的 K-means 聚类分组、多指标精英个体筛选与模拟二进制交叉和多项式变异策略中, 每一个策略的有效性。这 3 种

变体分别为:

(1) 变体 1(MOMEIG-v1): 该变体去除 K-means 聚类分组, 保留精英个体博弈策略与交叉变异策略, 用于分析 K-means 聚类分组的有效性。

(2) 变体 2(MOMEIG-v2): 该变体去除多指标精英个体筛选策略, 只进行博弈策略, 保留 K-means 聚类分组与交叉变异, 用于分析多指标精英个体筛选策略的有效性。

(3) 变体 3(MOMEIG-v3): 该变体去除交叉变异策略, 保留精英个体筛选策略与交叉变异策略, 分析交叉变异策略在抵抗种群外部坍塌的有效性。

表 3 给出了 MOMEIG 算法与 3 种消融变体在每个标准测试函数上试验 30 次的 IGD 均值对比。

表 3 MOMEIG 算法与 3 个消融变体在标准测试函数上的 IGD 均值

Table 3 IGDMean of MOMEIG algorithm with three ablation variants on standard test functions

测试函数	MOMEIG	MOMEIG-v1	MOMEIG-v2	MOMEIG-v3
ZDT1	<b>1.322E-03</b>	2.898E-03	4.461E-02	3.610E-03
ZDT2	<b>1.129E-03</b>	2.927E-03	2.580E-02	4.072E-03
ZDT3	<b>4.389E-03</b>	4.576E-03	2.805E-01	9.799E-03
ZDT4	<b>2.072E+00</b>	2.128E+00	2.512E+01	5.708E+00
ZDT6	<b>9.855E-04</b>	9.981E-04	9.427E-01	3.616E-03
DTLZ2	<b>4.179E-02</b>	4.405E-02	1.145E-01	7.244E-02
DTLZ4	<b>4.512E-02</b>	5.052E-02	1.551E-01	1.693E-01
DTLZ7	<b>6.331E-02</b>	7.836E-02	2.683E-01	6.812E-02

由表 3 可以看出, 3 种策略均有效提升了种群的收敛精度与多样性。对于 MOMEIG-v1, 缺少 K-means 聚类分组约束后, 种群多样性降低; 对于 MOMEIG-v2, 在取消精英粒子筛选机制后试验结果较差, 大量的非精英粒子拖累种群整体进化, 导致种群收敛性降低; 对于 MOMEIG-v3, 缺少交叉变异策略的种群受 K-means 聚类约束过强, 种群在外部空间中易陷入坍塌, 在 ZDT4 测试函数上表现的尤为明显。外部空间粒子分布如图 8 所示。

从图 8(a)可以看出, 在缺少二进制交叉与多项式变异的 MOMEIG 算法, 得到的结果陷入了坍塌, 图 8(b)证明了小幅度的交叉变异有利于粒子

跨出子种群界限, 交叉变异策略有效避免了种群在外部空间中的坍塌。

#### 4.5 标准测试函数实验结果及比较

将MOMEIG与4个经典算法运行在ZDT1-4、ZDT6、DTLZ2、DTLZ4与DTLZ7函数上, 运行结果可视化如图9(a)~(h)所示。运行结果显示MOMEIG算法在除ZDT4函数之外的其他函数上都具有较好的收敛性, 在全部函数上的优化解集多样性较好, 依据非支配排序的K-means聚类策略很好的阻止了种群多样性的降低。由图9(a)~(c)所示, MOMEIG算法在双目标优化问题上的收敛性比NSGA-II、SPEA2和MOPSO好。图9(d)可以看出, 在ZDT4函数上MOMEIG的收敛性优于NSGA-II与MOPSO, 多样性优于MOEA/D与

SPEA2。由图9(f)~(h)所示, MOMEIG算法在三目标问题上收敛性优于MOEA/D, 持平于其他经典算法, 多样性差于SPEA2, 但优于其他全部算法。精英个体筛选机制融入多目标优化中能保持种群的渐进收敛, 减少计算量, 增加收敛精度。

表4列出了MOMEIG算法在2个系列8个测试函数上与4个经典算法的IGD指标比较, 通过比较算法优化解集的IGD指标, 进而比较算法的收敛性与多样性的好坏。

表4的结果显示, MOMEIG算法的IGD值优于大部分的经典算法, 这表示MOMEIG算法得到的优化解集具有很好的收敛性与多样性, 在解决较为复杂的DTLZ4问题上也有着不错的表现, 结果表明基于多指标精英个体博弈机制策略在一定程度上提升了算法收敛性与优化解集的多样性。

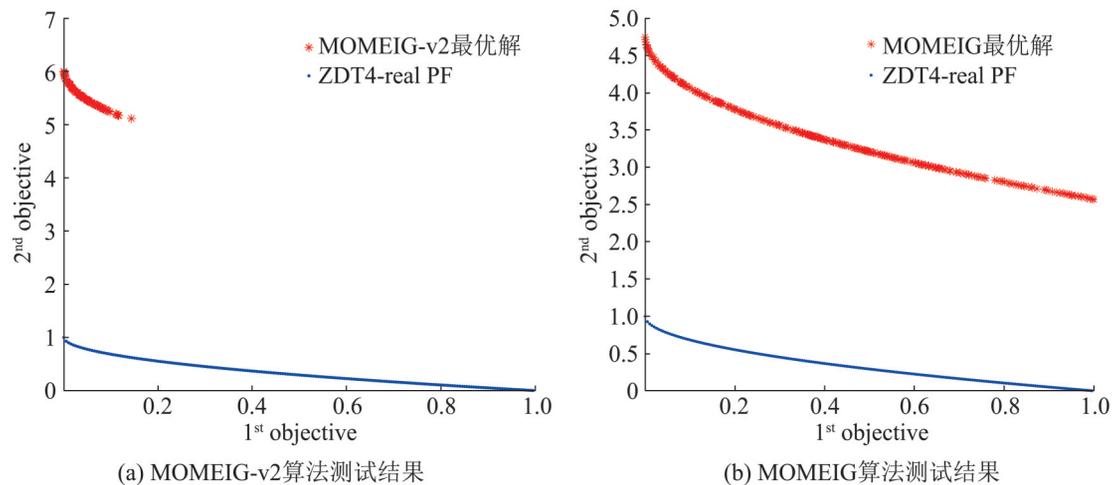
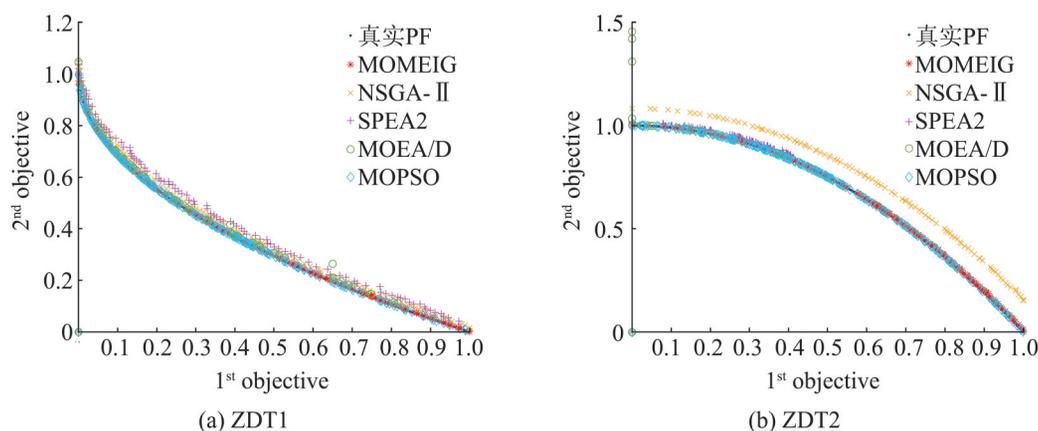


图8 在ZDT4函数上的外部空间粒子分布结果

Fig. 8 Results of particle distribution in outer space of ZDT4 function



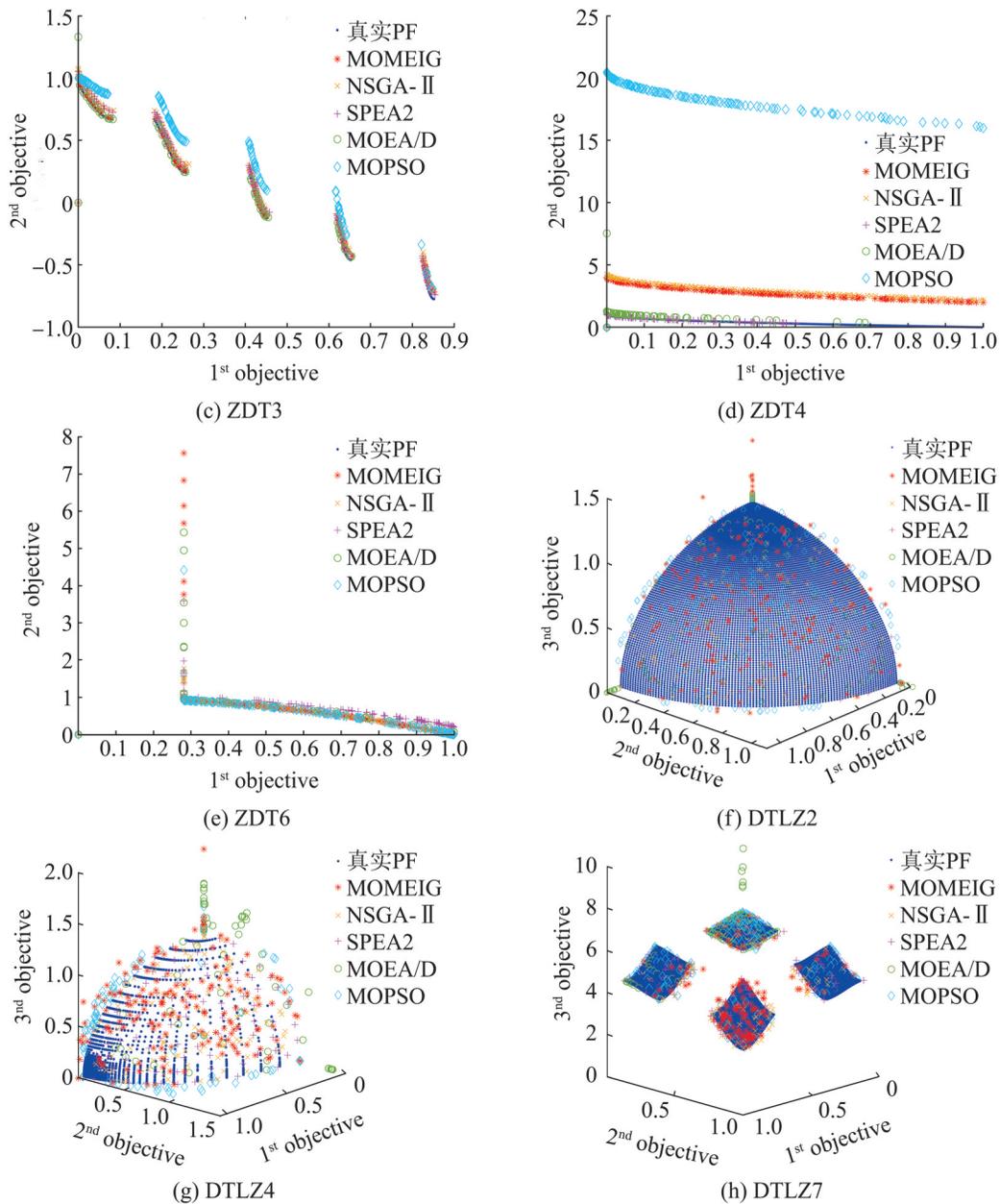


图9 算法函数测试结果  
Fig. 9 Algorithm function test results

表4 MOMEIG算法与其它经典算法的IGD指标对比

Table 4 Comparison of IGD index between MOMEIG algorithm and other classical algorithms

测试函数	IGD 指标	MOMEIG	NSGA-II	SPEA2	MOEA/D	MOPSO
ZDT1	Best	1.200E-03	1.165E-02	1.348E-02	1.972E-02	5.000E-03
	Mean	<b>1.327E-03</b>	5.037E-02	2.874E-02	2.782E-01	6.823E-03
	std	1.081E-04	5.272E-02	1.455E-02	2.226E-01	6.285E-04
ZDT2	Best	1.045E-03	3.034E-02	7.149E-02	6.740E-01	3.504E-03
	Mean	<b>1.134E-03</b>	5.960E-02	1.241E-01	2.122E+01	8.409E-02
	std	5.351E-05	1.320E-02	2.682E-02	2.019E+01	2.011E-01

续表

测试函数	IGD 指标	MOMEIG	NSGA-II	SPEA2	MOEA/D	MOPSO
ZDT3	Best	3.800E-03	3.973E-02	5.131E-02	1.373E-02	9.617E-02
	Mean	<b>4.407E-03</b>	6.475E-02	9.688E-02	1.995E-01	1.001E-01
	std	3.279E-04	1.093E-02	2.079E-02	1.824E-01	2.015E-03
ZDT4	Best	3.895E-01	6.675E-01	9.119E-03	7.172E-02	2.351E+00
	Mean	2.084E+00	4.009E+00	4.548E-01	<b>4.526E-01</b>	1.201E+01
	std	1.344E+00	2.691E+00	1.380E-01	2.147E-01	6.904E+00
ZDT6	Best	7.000E-04	1.488E-03	4.106E-01	4.655E-02	1.713E-03
	Mean	<b>9.867E-04</b>	2.183E-02	6.743E-01	1.149E-01	5.183E-02
	std	1.592E-04	7.363E-02	1.429E-01	1.057E-01	1.462E-01
DTLZ2	Best	3.850E-02	4.530E-02	1.111E-01	6.795E-02	4.166E-01
	Mean	<b>4.191E-02</b>	4.701E-02	1.490E-01	7.119E-02	5.072E-01
	std	1.928E-03	1.014E-03	2.025E-02	1.565E-03	5.790E-02
DTLZ4	Best	3.450E-02	4.089E-02	9.615E-02	6.927E-02	6.119E-02
	Mean	<b>4.509E-02</b>	5.080E-02	1.474E-01	4.635E-01	8.236E-02
	std	6.302E-03	4.502E-03	3.107E-02	1.713E-01	1.228E-02
DTLZ7	Best	5.150E-02	5.288E-02	4.186E-01	1.006E-01	5.760E-02
	Mean	6.329E-02	<b>6.000E-02</b>	4.932E-01	4.139E-01	1.841E-01
	std	8.014E-03	3.774E-03	3.905E-02	2.804E-01	1.459E-01

图 10 为 MOMEIG 算法与 4 个经典算法在 ZDT1-4、ZDT6、DTLZ2、DTLZ4 与 DTLZ7 上实验 30 次的 IGD 指标箱线图, 可以看出, MOMEIG 算法在测试函数上表现的较其他算法更稳定, 数据波动较小, 算法鲁棒性较强。博弈计算减小了计算量, 有效保持了种群稳定性。

表 5~8 为 MOMEIG 算法与近些年几个优秀算法 GMOPSO、AMOPSO-DA、pccsAMOPSO、MOFA-MCS 算法在 ZDT1-4、DTLZ2 与 DTLZ7 上的 IGD 指标的比较。参数  $N$  为种群规模,  $Rep$  为算法的外部档案规模(MOMEIG 算法不存在外部档案集,  $Rep=0$ ),  $Gen$  为算法迭代次数。由表中结果显示, MOMEIG 算法在双目标优化问题上表现出色, 在种群规模较小时, 优化解集也能有很好的收敛性与多样性。算法在三目标优化问题上也仅次于 AMOPSO-DA 算法, 这说明基于多指标精英个体博弈机制在提升优化解集收敛性与多样性上的有效性。

#### 4.6 MOMEIG 水泵调度问题测试

本文利用实际工程中的水泵调度问题对

MOMEIG 算法进行测试。本文的测试问题由文献 [31] 的水泵调度问题简化而来。一个简单的水供应网络如图 11 所示, 该网络由 1 个水源、3 个水泵和 1 个蓄水罐组成。水泵将水抽入蓄水罐中, 水在需求点被直接消耗。水泵调度问题为了求解在  $T$  时间内, 调度  $L$  个水泵, 在满足作业约束的情况下, 最小化水供应成本。本文设计两类供应成本, 即电力成本和维护成本。

电力成本是指在水泵调度期间, 所有水泵消耗电力所产生的费用。本问题的水泵电力成本采用不同时段不同电价的计费方法, 价目表结构如下:

低成本(0): 0:00—17:00 和 22:00—24:00

高成本(1): 17:00—22:00

为了计算方便, 本文将低成本记为 0, 高成本记为 1。电力成本的数学描述为

$$E = M_L \sum_{i=1}^{17} c(p_i) + M_H \sum_{i=18}^{22} c(p_i) + M_L \sum_{i=23}^{24} c(p_i)$$

式中:  $M_L$  为低电力成本指数;  $M_H$  为高电力成本指数;  $p_i$  为时间间隔  $i$  内的水泵组合;  $c(p_i)$  为水泵组合在时间间隔  $i$  内的成本。

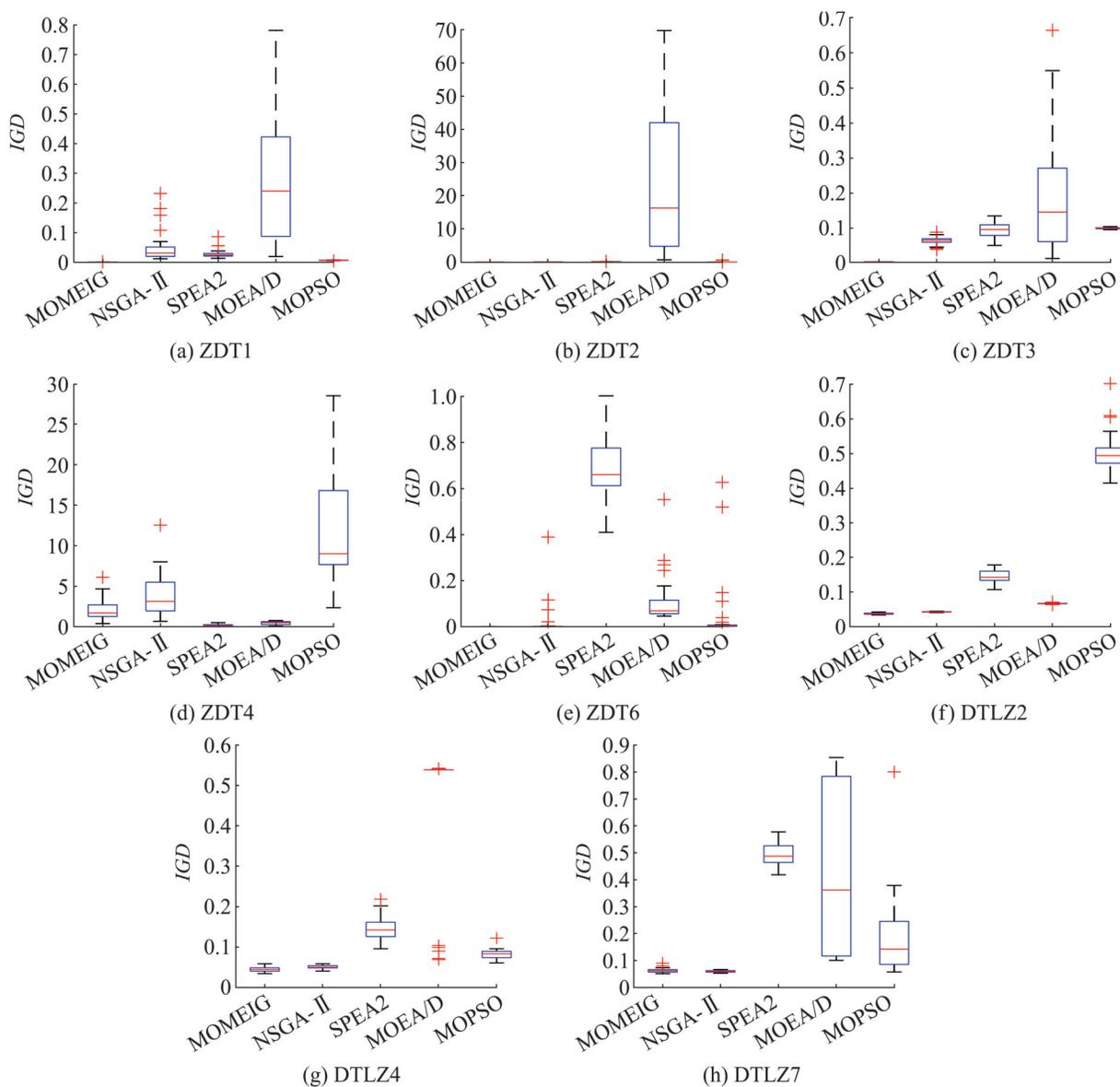


图 10 MOMIEIG 与 4 种经典算法独立运行 30 次 IGD 指标箱线图

Fig. 10 MOMIEIG and four classical algorithms run independently for 30 times IGD index box diagram

表 5 MOMIEIG 与 GMOPSO 的 IGD 均值对比(N=100, Gen=100)

Table 5 Comparison of IGD mean values of MOMIEIG and GMOPSO(N=100, Gen=100)

算法	ZDT1	ZDT2	ZDT3	ZDT4	DTLZ2	DTLZ7
MOMIEIG	<b>3.886E-03</b>	<b>3.989E-03</b>	<b>8.235E-03</b>	<b>1.567E+00</b>	<b>5.798E-02</b>	<b>8.867E-02</b>
GMOPSO	4.393E-03	4.027E-03	1.430E-01	6.663E+00	5.844E-02	1.051E-01

表 6 MOMIEIG 与 AMOPSO-DA 的 IGD 均值对比(N=100, Rep=100, Gen=200)

Table 6 Comparison of IGD mean values of MOMIEIG and AMOPSO-DA(N=100, Rep=100, Gen=200)

算法	ZDT1	ZDT2	ZDT3	ZDT4	DTLZ2	DTLZ7
MOMIEIG	<b>3.946E-03</b>	<b>3.172E-03</b>	7.451E-03	1.422E+00	<b>4.003E-02</b>	8.542E-02
AMOPSO-DA	3.991E-03	3.179E-03	<b>4.172E-03</b>	<b>3.209E-03</b>	4.025E-02	<b>3.013E-02</b>

表 7 MOMIEIG 与 pccsAMOPSO 的 IGD 均值对比(N=100, Rep=100, Gen=300)  
Table 7 Comparison of IGD mean values of MOMIEIG and pccsAMOPSO(N=100, Rep=100, Gen=300)

算法	ZDT1	ZDT2	ZDT3	ZDT4	DTLZ2	DTLZ7
MOMIEIG	<b>3.857E-03</b>	<b>3.011E-03</b>	6.954E-03	1.403E+00	<b>3.893E-02</b>	8.356E-02
pccsAMOPSO	4.013E-03	4.091E-03	<b>3.323E-03</b>	<b>7.971E-03</b>	6.143E-02	<b>4.277E-02</b>

表 8 MOMIEIG 与 MOFA-MCS 的 IGD 均值对比(N=100, Rep=100, Gen=200)  
Table 8 Comparison of IGD mean values of MOMIEIG and MOFA-MCS(N=100, Rep=100, Gen=200)

算法	ZDT1	ZDT2	ZDT3	ZDT4	DTLZ2	DTLZ7
MOMIEIG	<b>4.056E-03</b>	<b>3.262E-03</b>	<b>7.359E-03</b>	<b>1.508E+00</b>	<b>5.412E-02</b>	<b>8.867E-02</b>
MOFA-MCS	8.120E-01	6.096E-01	5.866E-01	8.643E+00	5.373E-01	8.723E-01

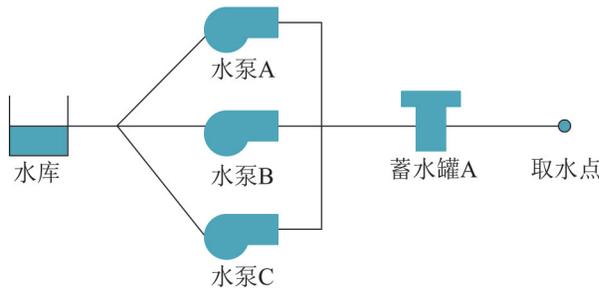


图 11 一个简单的供水网络  
Fig. 11 A simple water supply network

维护成本主要来自水泵的开闭磨损。

问题约定 1: 当某一水泵在上一时间间隔内为关闭状态而在当前时间间隔内为开启状态时, 水泵被视为开关磨损一次, 其余情况均视为无磨损。水泵磨损次数  $N$  的数学描述为

$$N = \sum_{i=2}^{24} \|\max\{0, (p_i - p_{i-1})\}\|$$

问题约定 2: 水被泵入蓄水罐后, 下一时间间隔即被完全用完, 而蓄水罐依然要保持  $h_{\min}$  高度的水位, 但水位不可超过蓄水罐顶  $h_{\max}$ , 即有约束条件  $h_{\min} \leq h_i \leq h_{\max}$ 。本文设定  $h_{\min} = 36$ ,  $h_{\max} = 50$ , 本文考虑 24 h 内, 3 个水泵的最佳调度问题, 水泵调度问题的编码表示如表 9 所示。

由于篇幅原因, 本文仅将 MOMIEIG、NSGA-II 和 MOPSO 算法应用于水泵调度问题, 3 个算法的最大迭代次数为 100, 种群规模为 100, MOPSO 的外部档案规模为 100。最优解集可视化如图 12 所示, 水泵调度方案的成本如表 10 所示。

表 9 水泵调度问题的编码表示  
Table 9 Coded representation of pump scheduling problem

时间间隔	水泵号	位串	状态
1	$P_1$	0	关闭
	$P_2$	1	开启
	$P_3$	0	关闭
⋮	⋮	⋮	⋮
24	$P_1$	1	开启
	$P_2$	0	关闭
	$P_3$	1	开启

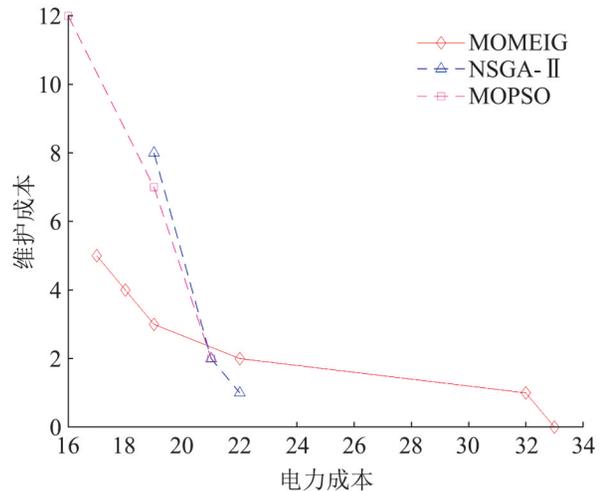


图 12 水泵调度优化解集  
Fig. 12 Optimal solution set of pump scheduling

由图 12 可以看出, MOMIEIG 得到的优化解个数更多, 收敛性与多样性均优于 NSGA-II 与 MOPSO, 但在解集分布广度上差于 MOPSO 算法。由表 10 可知, 在相同计算资源的情况下, MOMIEIG 算法可以给出更经济、更多样化的水泵调度方案。

表 10 水泵调度方案的成本  
Table 10 Cost of pump scheduling scheme

MOMEIG		NSGA-II		MOPSO	
电力成本	维护成本	电力成本	维护成本	电力成本	维护成本
17	5	19	8	16	12
18	4	21	2	19	7
19	3	22	1	21	2
22	2				
32	1				
33	0				

## 5 结论

为解决现有多目标优化算法的收敛性与多样性不足, 种群分组压力过大, 种群在目标空间中容易坍塌停滞的问题, 本文提出一种基于多指标精英个体博弈机制的多目标优化(MOMEIG)算法, 将融合 K-means 聚类的博弈机制引入多目标优化问题中, 有效抵抗种群在目标空间中坍塌, 降低算法的种群分组压力。将 Pareto 支配关系与种群状态指标有机结合筛选精英个体, 屏蔽非精英个体对种群博弈优化的干扰, 使算法在保持收敛性的基础上尽量保持多样性。MOMEIG 算法结合多目标进化算法(MOEA)与多目标粒子群算法(MOPSO)的优点, 将模拟二进制交叉与多项式变异引入博弈优化中, 对个体进行小幅度的交叉和变异, 有利于种群跳出局部极值, 提高算法的收敛速度与收敛程度。通过对 MOMEIG 算法与其他 8 个算法在测试函数上得到的优化解集指标对比, MOMEIG 算法有着很好的鲁棒性, 在实际工程应用问题上的表现也十分出色, 算法中的相关优化策略能很好的增强优化解集的收敛性与多样性。

尽管 MOMEIG 算法可以很好地抵抗种群在目标空间中坍塌停滞, 但在研究中发现, MOMEIG 算法在优化前期依然会发生小幅度的坍塌, 这种小幅度的坍塌停滞在一定程度上影响了算法的寻优效率, 究其原因是 MOMEIG 算法尚未发掘引导目标的吸引力大小与交叉变异幅度之间的隐含关

系, 如何更加有机地结合两种方法的优点, 并用其解决多目标优化问题还有待深入研究。

## 参考文献:

- [1] Zhou A M, Qu B Y, Li H, et al. Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Survey of the State of the Art [J]. Swarm and Evolutionary Computation (S2210-6502), 2011, 1(1): 32-49.
- [2] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Comparative Case Study and the Strength Pareto Approach[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation (S1089-778X), 1999, 3(4): 257-271.
- [3] Coello C A C, Pulido G T. A Micro-genetic Algorithm for Multi-objective Optimization[C]// EMO 2001. Zurich Switzerland: Springer, 2001: 126-140.
- [4] Zhang Q, Li H. MOEA/D: A Multi-objective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation (S1089-778X), 2007, 11(6): 712-731.
- [5] 耿焕同, 周山胜, 韩伟民, 等. 基于自适应进化策略的 MOEA/D 算法[J]. 计算机工程与设计, 2019, 40(4): 1106-1113.  
Geng Huantong, Zhou Shansheng, Han Weimin, et al. MOEA/D Algorithm Based on Adaptive Evolutionary Strategy[J]. Computer Engineering and Design, 2019, 40(4): 1106-1113.
- [6] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A Fast and Elitist Multi-objective Genetic Algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation (S1089-778X), 2002, 6(2): 182-197.
- [7] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm for Multi-objective Optimization[C]// Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial Problems. Athens, Greece: EUROGEN, 2001: 95-100.
- [8] Knowles J D, Corne D W. Approximating the Non-dominated Front Using the Pareto Archive Evolution Strategy[J]. Evolutionary Computation (S1063-6560), 2000, 8(2): 149-172.
- [9] Bader J, Zitzler E. HypE: An Algorithm for Fast Hypervolume-based Many-objective Optimization[J]. Evolutionary Computation (S1063-6560), 2011, 19(1): 45-76.
- [10] Zitzler E, Kunzli S. Indicator-based Selection in Multiobjective Search[C]// 8th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004: 832-842.

- [11] Coello C A C, Lechuga M S. MOPSO: A Proposal for Multiple Objective Particle Swarm Optimization[C]// CEC'02: 2002 Congress on Evolutionary Computation. Washington, USA: IEEE, 2002: 1051-1056.
- [12] 韩博文, 姚佩阳, 孙昱. 基于多目标MSQPSO算法的UAVS协同任务分配[J]. 电子学报, 2017, 45(8): 1856-1863.  
Han Bowen, Yao Peiyang, Sun Yu. UAVS Cooperative Task Allocation Based on Multi-objective MSQPSO Algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2017, 45(8): 1856-1863.
- [13] 张屹, 陆逸舟, 王帅, 等. 基于多源交配选择策略的重组算子与多目标优化研究[J]. 电子学报, 2021, 49(9): 1754-1760.  
Zhang Yi, Lu Yizhou, Wang Shuai, et al. Research on Reproduction Operator and Multi-objective Optimization Based on Multi-source Mating Selection Strategy[J]. Acta Electronica Sinica, 2021, 49(9): 1754-1760.
- [14] 鲍毅, 戴波, 汪志华, 等. 基于灰狼算法的多目标智能家居负荷控制算法[J]. 系统仿真学报, 2019, 31(6): 1216-1222.  
Bao Yi, Dai Bo, Wang Zhihua, et al. Multi Objective Flexible Load Scheduling in Smart Home Based on Grey Wolf Algorithm[J]. Journal of System Simulation, 2019, 31(6): 1216-1222.
- [15] Yue C, Suganthan P N, Liang J, et al. Differential Evolution Using Improved Crowding Distance for Multimodal Multiobjective Optimization[J]. Swarm and Evolutionary Computation (S2210-6502), 2021, 62(9): 100849.
- [16] 季伟东, 岳玉麒, 王旭, 等. 基于降维和聚类的大规模多目标自然计算方法[J]. 系统仿真学报, 2023, 35(1): 41-56.  
Ji Weidong, Yue Yuqi, Wang Xu, et al. Large-Scale Multi-objective Natural Computation Based on Dimensionality Reduction and Clustering[J]. Journal of System Simulation, 2023, 35(1): 41-56.
- [17] 喻金平, 王伟, 巫光福, 等. 基于博弈机制的多目标粒子群优化算法[J]. 计算机工程与设计, 2020, 41(4): 964-971.  
Yu Jinping, Wang Wei, Wu Guangfu, et al. Game Mechanism Based Multi-objective Particle Swarm Optimization[J]. Computer Engineering and Design, 2020, 41(4): 964-971.
- [18] 罗智勇, 朱梓豪, 谢志强, 等. 面向云计算的花朵差分授粉 workflow 多目标优化算法研究[J]. 电子学报, 2021, 49(3): 470-476.  
Luo Zhiyong, Zhu Zihao, Xie Zhiqiang, et al. A Multi-objective Workflow Scheduling Algorithm Based on Flower Pollination Cloud Environment[J]. Acta Electronica Sinica, 2021, 49(3): 470-476.
- [19] 陈晓纪, 石川, 周爱民, 等. 混合个体选择机制的多目标进化算法[J]. 软件学报, 2019, 30(12): 3651-3664.  
Chen Xiaoji, Shi Chuan, Zhou Aimin, et al. Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Hybrid Individual Selection Mechanism[J]. Journal of Software, 2019, 30(12): 3651-3664.
- [20] 谢承旺, 张飞龙, 陆建波, 等. 一种多策略协同的多目标萤火虫算法[J]. 电子学报, 2019, 47(11): 2359-2367.  
Xie Chengwang, Zhang Feilong, Lu Jianbo, et al. Multi-objective Firefly Algorithm Based on Multiply Cooperative Strategies[J]. Acta Electronica Sinica, 2019, 47(11): 2359-2367.
- [21] 张伟, 黄卫民. 基于种群分区的多策略自适应多目标粒子群算法[J]. 自动化学报, 2022, 48(10): 2585-2599.  
Zhang Wei, Huang Weimin. Multi-strategy Adaptive Multi-objective Particle Swarm Optimization Algorithm Based on Swarm Partition[J]. Acta Automatica Sinica, 2022, 48(10): 2585-2599.
- [22] 张磊, 毕晓君, 王艳娇. 基于重新匹配策略的 $\epsilon$ 约束的多目标分解优化算法[J]. 电子学报, 2018, 46(5): 1032-1040.  
Zhang Lei, Bi Xiaojun, Wang Yanjiao. The  $\epsilon$  Constrained Multi-objective Decomposition Optimization Algorithm Based on Re-matching Strategy[J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(5): 1032-1040.
- [23] 韩桂柱, 阿音嘎, 张璐, 等. 自适应分解式多目标粒子群优化算法[J]. 电子学报, 2020, 48(7): 1245-1254.  
Han Honggui, A Yinga, Zhang Lu, et al. Adaptive Multiobjective Particle Swarm Optimization Based on Decomposition Archive[J]. Acta Electronica Sinica, 2020, 48(7): 1245-1254.
- [24] Cheng R, Jin Y. A Competitive Swarm Optimizer for Large Scale Optimization[J]. IEEE Transactions on Cybernetics (S2168-2267), 2015, 45(2): 191-205.
- [25] 郑金华, 邹娟. 多目标进化优化[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 96-97.  
Zheng Jinhua, Zou Juan. Multi-objective Evolutionary Optimization[M]. Beijing: Science Press, 2017: 96-97.
- [26] Deb K, Agrawal R. Simulated Binary Crossover for Continuous Search Space[J]. Complex Systems (S0891-2513), 1995, 9(2): 115-148.
- [27] Veldhuizen D, Lamont G B. Evolutionary Computation and Convergence to a Pareto Front[D]. California, USA: Stanford University, 1998.
- [28] Veldhuizen D. Multiobjective Evolutionary Algorithms: Classifications, Analyses and New Innovations[J]. Evolutionary Computation (S1063-6560), 1999 8(2): 125-147.
- [29] 郑金华, 邹娟. 多目标进化优化[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 86-87.

- Zheng Jinhua, Zou Juan. Multi-objective Evolutionary Optimization[M]. Beijing: Science Press, 2017: 86-87.
- [30] 潘峰, 周倩, 李位星, 等. 标准粒子群优化算法的马尔科夫链分析[J]. 自动化学报, 2013, 39(4): 381-389.
- Pan Feng, Zhou Qian, Li Weixing, et al. Analysis of Standard Particle Swarm Optimization Algorithm Based on Markov Chain[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(4): 381-389.
- [31] Van Zyl J E, Savic D A, Walters G A. Operational Optimization of Water Distribution Systems Using a Hybrid Genetic Algorithm[J]. Journal of Water Resources Planning & Management (S0733-9496), 2004, 130(2): 160-170.
- [32] Czyzak P, Jaskiewicz A. Pareto Simulated Annealing-A Metaheuristic Technique for Multiple-objective Combinatorial Optimization[J]. Journal of Multi-criteria Decision Analysis (S1057-9214), 1998, 7(1): 34-47.
- [33] Deb K. Multi-objective Genetic Algorithms: Problem Difficulties and Construction of Test Problems[J]. Evolutionary Computation (S1063-6560), 1999, 7(3): 205-230.
- [34] Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Evolutionary Multiobjective Optimization: Theoretical Advances and Applications[M]. Germany: Springer, 2005: 105-145.