

11-25-2022

A Two-Layer Network Propagation Model of Awareness Diffusion and SEIR Epidemic

Yurong Song

1.School of Automation, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China; songyr@njupt.edu.cn

Yulin Bao

1.School of Automation, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China;

Ruqi Li

2.School of Computing, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

A Two-Layer Network Propagation Model of Awareness Diffusion and SEIR Epidemic

Abstract

Abstract: In order to understand the transmission characteristics of epidemics similar to COVID-19 (coronavirus disease 2019) with obvious expose period, a two-layer network transmission model considering time-varying factors is proposed to make corresponding predictions and measures. *The UAU (unaware-aware-unaware) information transmission model is used to represent the diffusion process of conscious information about epidemic. In the underlying network, the susceptible-exposed-infected-recovered (SEIR) epidemic-like transmission model with latent state is used to describe the epidemic transmission process affected by conscious information.* The MMCA (microscopic Markov chain approach) is used to deduce the transmission threshold of epidemics diseases. By analyzing the key factors such as forgetting factors and infection attenuation factors, the simulation results demonstrate the effectiveness of proposed the two-layer network transmission model considering time-varying factors proposed.

Keywords

two-layer network, time-varying forgetting probability, epidemic propagation, propagation threshold, awareness diffusion

Recommended Citation

Yurong Song, Yulin Bao, Ruqi Li. A Two-Layer Network Propagation Model of Awareness Diffusion and SEIR Epidemic[J]. Journal of System Simulation, 2022, 34(11): 2437-2447.

意识扩散和 SEIR 病毒的双层网络传播模型

宋玉蓉¹, 鲍裕霖¹, 李汝琦²

(1. 南京邮电大学 自动化学院, 江苏 南京 210003; 2. 南京邮电大学 计算机学院, 江苏 南京 210003)

摘要: 针对类似于新型冠状病毒(coronavirus disease 2019, COVID-19)具有明显潜伏期特性的病毒, 为了解其传播特性, 做出相应预测和措施, 提出了一种考虑时变因素的双层网络传播模型。上层网络采用考虑时变遗忘概率的 UAU(unaware-aware-unaware)信息传播模型表示关于病毒的意识信息扩散过程; 下层网络采用具有潜伏态的 SEIR(susceptible-exposed-infected-recovered)类病毒传播模型描述受意识信息影响的病毒传播过程。利用 MMCA(microscopic Markov chain approach)推导出传染病传播阈值, 通过分析遗忘因素、感染衰减因子等关键因素, 仿真结果表明了所提考虑时变因素的双层网络传播模型的有效性。

关键词: 双层网络; 时变遗忘概率; 病毒传播; 传播阈值; 意识扩散

中图分类号: TP391.9

文献标志码: A

文章编号: 1004-731X (2022) 11-2437-11

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.21-0734

A Two-Layer Network Propagation Model of Awareness Diffusion and SEIR Epidemic

Song Yurong¹, Bao Yulin¹, Li Ruqi²

(1. School of Automation, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China;

2. School of Computing, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract: In order to understand the transmission characteristics of epidemics similar to COVID-19 (coronavirus disease 2019) with obvious expose period, a two-layer network transmission model considering time-varying factors is proposed to make corresponding predictions and measures. The UAU (unaware-aware-unaware) information transmission model is used to represent the diffusion process of conscious information about epidemic. In the underlying network, the susceptible-exposed-infected-recovered (SEIR) epidemic-like transmission model with latent state is used to describe the epidemic transmission process affected by conscious information. The MMCA (microscopic Markov chain approach) is used to deduce the transmission threshold of epidemics diseases. By analyzing the key factors such as forgetting factors and infection attenuation factors, the simulation results demonstrate the effectiveness of proposed the two-layer network transmission model considering time-varying factors proposed.

Keywords: two-layer network; time-varying forgetting probability; epidemic propagation; propagation threshold; awareness diffusion

引言

传染病的存在是对人类健康的一大潜在威胁。在历史上有很多因为传染病传播而导致的大规模

灾难, 例如, 21 世纪初的 SARS 病毒, 活跃在非
洲的埃博拉病毒以及 2009 年在墨西哥和美国出现的新的甲型 H1N1 流感等^[1-3], 2019 年底爆发的新型冠状病毒(coronavirus disease 2019, COVID-19)更

收稿日期: 2021-07-22 修回日期: 2021-11-30

基金项目: 国家自然科学基金(61672298, 61873326, 61802155); 江苏高校哲学社会科学研究重点项目(2018SJD1142)

第一作者: 宋玉蓉(1971-), 女, 博士, 教授, 研究方向为复杂网络传播动力学。E-mail: songyr@njupt.edu.cn

是造成了全球性的灾难,至今还没有得到很好地控制。了解传染病的传播机理,有效控制传染病的扩散成为众多学者研究的焦点。近年来,有关传染病传播的相关工作成为一个活跃的话题,这些工作为传染病的防控提供了可靠的理论依据^[4-9]。

1760 年, Daniel Bernoulli 等提出了第 1 个传染病模型 SI (susceptibility-infection)^[10], 目前应用最为广泛的 2 个传染病传播模型是 SIS (susceptibility-infection-susceptibility)和 SIR (susceptibility-infection-recovery)^[11]。在这 2 个模型中, 传染病传播的机制主要是人与人之间接触频率、传染病的传播强度和持续时间等因素来描述。20 世纪末诞生的复杂网络理论被广泛的应用于传染病传播领域^[12-17]。近年来, 关于传染病传播的研究成为一个热点, 许多成果为传染病传播的预防和控制提供了可靠的理论依据。尤其是 Pasator-Satorras, Vespignani 和 Castellano 发现关于流行病传播阈值的理论, 极大地改变了传统的传染病传播阈值理论^[18-19], 进一步推动了传染病传播的研究, 各个领域也都广泛关注了这一成果。

人类社会是一个真实存在的复杂网络系统, 它是由多层相互作用且相互依赖的复杂网络组成的, 当各层复杂网络中的参与者相同(即网络中的节点表示同一个实体)时, 则称这些复杂网络为多重网络^[20]。而多重网络为研究病毒传播提供了有效工具, 同时多重网络也是复杂性系统研究的重要手段^[21], 研究多重网络的动态传播规律对于探索传染病在人群中的传播有着重要的意义。与此同时, 个体对于传染病的意识对传染病传播的影响引起了广泛的关注^[22-25]。例如, 文献[26]提出关于新型冠状病毒肺炎的几个重要流行病参数的研究, 得出新型冠状病毒肺炎的基本再生数等关键参数。文献[27]构建节点增减机制下的 SIRS 模型, 发现合理调节网络节点的增减数量, 能够有效控制病毒在网络中的传播。文献[28]建立和分析了流行病传播和风险意识传播的耦合数学模型, 发现在一个人口混合均匀的前提下, 个体对于传染病传播的风险意识会降

低的传染病爆发规模, 但不影响流行阈值。文献[29]研究了全球意识、地方意识和接触意识对传染病传播的影响, 结果指出全球意识不能降低传染病爆发的可能性, 但是地方意识和接触意识可以控制传染病的爆发。文献[30]研究了拓扑结构对应于一个多重网络, 其中意识与传染病扩散过程相互影响, 利用微观马尔可夫链方法分析揭示了传染病传播阈值与意识扩散以及网络的拓扑结构有关。文献[31]提出基于一定局部比例影响下的意识扩散 UAU-SIR 模型, 利用微观马尔可夫链方法分析得出传染病阈值与意识扩散以及网络的拓扑结构有关。文献[32]提出了局部影响下的多重网络传染病传播模型, 并得出局部意识对传染病阈值有两阶段影响的结论。

上述研究都是针对经典的 SIS 或者 SIR 模型在多重网络下传染病的传播行为, 而关于意识扩散对具有潜伏态传染病传播影响在双层网络上的研究尚不多见^[23,30-34]。在上述工作的基础上, 本文提出了一个意识扩散和具有潜伏态的 SEIR 类传染病的双层耦合传播模型, 并采用马尔可夫链算法进一步描述传染病的传播过程。在现实世界中, 人们对于传染病消息的关注程度和防范意识不会是一成不变的, 往往会随着时间的变化而变化, 甚至遗忘。本文在信息层上, 采用包含时变函数的 UAU(无意识-有意识-无意识)模型来描述意识的扩散程度以及扩散过程; 在物理接触层上, 利用 SEIR(易感-潜伏态-感染态-恢复态)模型描述传染病受意识扩散影响的传播过程。

本文主要成果包括以下几个方面: ①提出一种新的考虑时变遗忘因素的双层网络传播模型; ②利用微观马尔可夫链(microscopic Markov chain approach, MMCA)得出所提出模型的传播阈值, 发现该阈值与意识扩散以及物理接触网络的拓扑结构有关; ③通过大量数值仿真验证了分析结果, 进一步证明了所提模型可以更好的反映真实世界的病毒传播过程, 为传染病的控制和预防提供可靠的理论依据。

1 意识与传染病双层耦合模型

1.1 模型描述

定义一个双层网络, 如图 1 所示。

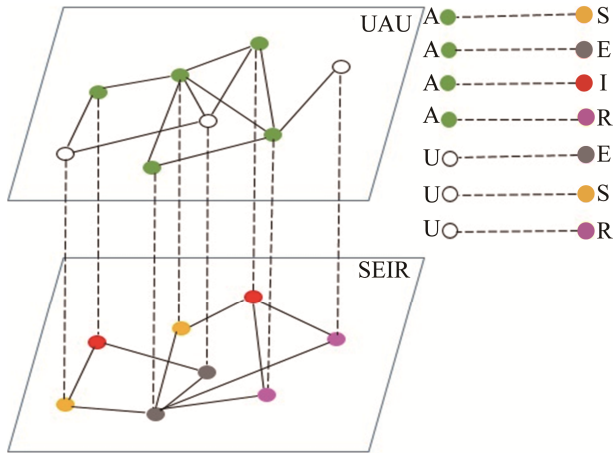


图 1 双层网络结构图
Fig. 1 Two-layer network structure

图 1 中每一层的拓扑结构不同, 分别用来描述信息扩散的虚拟接触层和传染病扩散的物理接触层。其中: 上层为信息层(通信联系)刻画人与人通过社交软件、移动电话等形成的虚拟联系, 例如, 微信好友、QQ 好友、Facebook 好友等, 用 U 表示无意识状态, A 表示有意识状态; 下层为物理层(物理接触)刻画人与人之间通过真实相互的物理接触形成的实际联系, 有 S(易感态), E(潜伏态), I(感染态), R(恢复态)4 种状态, 上下两层对应的节点为同一个体, 采用一对一层间链接。值得注意的是, 有意识的个体会采取一定的保护措施来降低被感染的可能性, 实际的感染个体规模同样也会作用到信息层, 使个体对于传染病的意识强度发生变化。

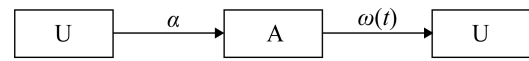
本文采用基于密度和时间的函数模型来描述意识扩散的过程, 采用更加符合实际的 SEIR 模型来描述传染病传播的过程, 上下两层的网络均是无权无向的, 对于个人的状态转移如图 2 所示。

上层网络中, 节点的状态可以在 U 和 A 之间进行转换。如图 2(a)所示, 在一个时间步中, 无意识个体会以概率 α 变成有意识的个体(比如, 邻居节点的告知或者浏览网上消息得知)。此外, 在本

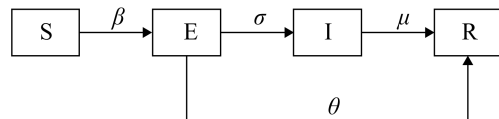
文中个体对于传染病的遗忘概率是基于时间以及群体中潜伏态个体密度产生的, 随着时间流逝或者当群体中潜伏态个体越少, 个体对于传染病的遗忘概率就会越高, 时变遗忘概率 ω 由 $\omega(t)$ 表示。具体形式为

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & v - \rho^E \cdot e^{-\delta t} < 0 \\ v - \rho^E \cdot e^{-\delta t}, & 0 < v - \rho^E \cdot e^{-\delta t} < 1 \\ 1, & v - \rho^E \cdot e^{-\delta t} > 1 \end{cases} \quad (1)$$

式中: v 和 δ 为参数; ρ^E 为潜伏态节点密度, 当 $\delta=0$ 时, 遗忘概率为 $v - \rho^E$, 当 $\delta \neq 0$ 时, 遗忘概率 $\omega(t) = v - \rho^E \cdot e^{-\delta t}$, 且 $\omega(0) = v - \rho^E$, 即初始时刻的遗忘概率为 $v - \rho^E$ 。 $\omega(t)$ 为传染病消息对于个体的影响程度, 其值越大表示个体对传染病消息兴趣不高, 更容易忘记, 相反其值越小代表个体对于传染病消息的重视程度越高, 不容易忘记。值得注意的是, 在此模型中, 如果个体处于感染态, 他会立即变成一个有意识的个体。



(a) 信息层节点状态转移图



(b) 物理接触层节点状态转移图

图 2 双层网络节点状态转移图
Fig. 2 Node state transition of two-layer network

下层网络中, 采用 SEIR 模型, 节点状态可以是四种状态之一: S、E、I 和 R。其节点状态变迁如图 2(b)所示, 如果一个易感态的个体被其邻居节点感染, 那么他会以概率 β 变为潜伏态(注意: 处于潜伏态的个体可以是无意识的个体), E 的个体会以概率 σ 变为 I 或以概率 θ 直接变为 R。I 的个体会以概率 μ 恢复成正常个体。恢复的个体将不会被感染同时也没有感染他人的能力。

节点的各个状态及其之间的具体转换如图 3 所示。

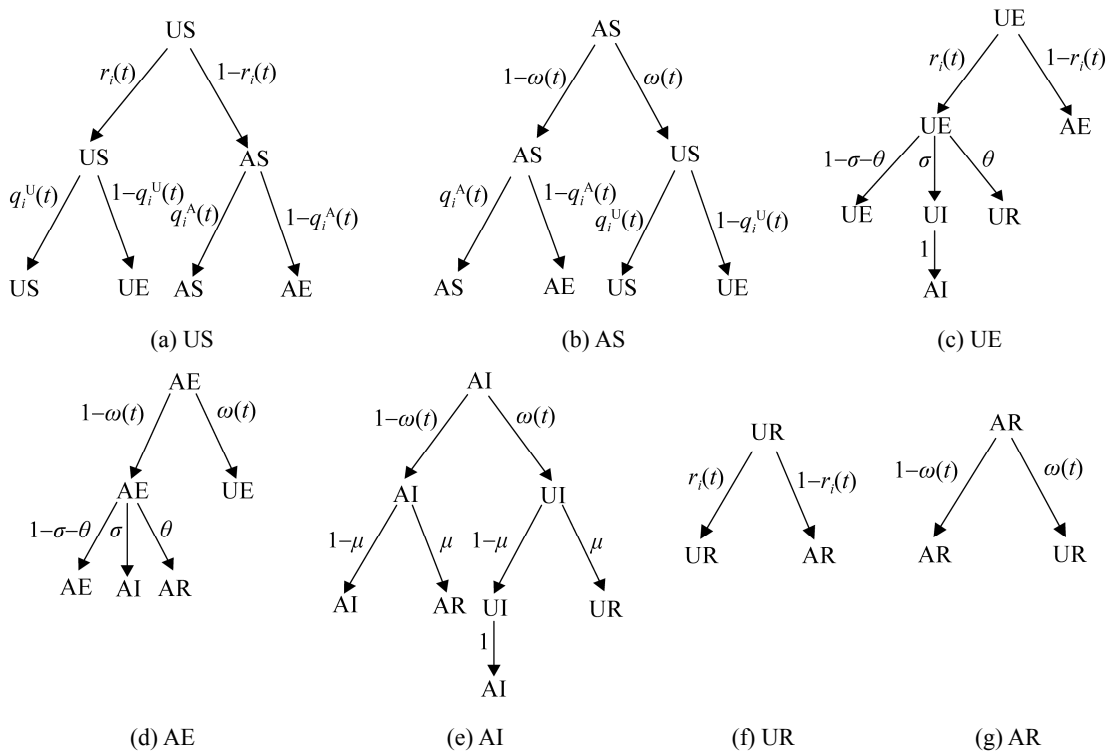


图 3 状态转移概率树
Fig. 3 State transition probability tree

图 3 中，下层传染病传播与上层意识传播为一对一耦合。每个个体可以有 7 种不同的状态：①无意识易感态(US)；②有意识易感态(AS)；③无意识潜伏态(UE)；④有意识潜伏态(AE)；⑤有意识感染态(AI)；⑥无意识恢复态(UR)；⑦有意识恢复态(AR)。每个节点在 t 时刻都有可能是图 3 中的状态之一，即定义 $P_i^{US}(t)$, $P(t)P_i^{AS}$, $P_i^{UE}(t)$, $P_i^{AE}(t)$, $P_i^{AI}(t)$, $P_i^{UR}(t)$, $P_i^{AR}(t)$ 分别表示 t 时间步各个状态的个体密度。图 3 中， $r_i(t)$ 表示节点 i 没有任何邻居节点告知传染病的相关信息； $q_i^A(t)$ 表示有意识个体不被感染的概率； $q_i^U(t)$ 表示无意识个体不被感染的概率。这 3 个概率可数学描述为

$$\begin{cases} r_i(t) = \prod_j [1 - a_{ji} P_j^A(t) \alpha] \\ q_i^A(t) = \prod_j [1 - b_{ji} P_j^{AE}(t) \beta^A] \\ q_i^U(t) = \prod_j [1 - b_{ji} P_j^{AE}(t) \beta^U] \end{cases} \quad (2)$$

式中： $P_i^A(t) = P_i^{AS}(t) + P_i^{AE}(t) + P_i^{AI}(t) + P_i^{AR}(t)$ ； a_{ji} 、 b_{ji} 分别为 UAU 层和 SEIR 层邻接矩阵的元素。

注意，无意识感染态(UI)是假定的，根据动态过程的定义声明它会立即变为有意识感染态(AI)。其次，一个有意识的个体，他会采取一系列的保护措施来降低被感染的概率(系数为 λ)。因此，有意识的个体被他人感染的概率会在一定程度上降低，这里定义有意识被感染的概率和无意识被感染的概率分之间的关系为 $\beta^A = \gamma \beta^U$ ($\gamma \in [0,1]$) 和 $\beta = \beta^U$ 。特别地，当 $\gamma = 0$ 时，有意识的个体完全免疫传染病。根据以上描述，可以推导出双层耦合网络动力学的 MMCA 方程。

1.2 模型理论分析

结合图 3 和式(2)可以得出节点 i 的微观马尔可夫链的耦合过程，如式(3)所示：

$$\begin{aligned}
 P_i^{US}(t+1) &= P_i^{AS}(t)\omega(t)q_i^U(t) + P_i^{US}(t)r_i(t)q_i^U(t) \\
 P_i^{AS}(t+1) &= P_i^{US}(t)[1-r_i(t)]q_i^A(t) + P_i^{AS}(t)[1-\omega(t)]q_i^A(t) \\
 P_i^{UE}(t+1) &= P_i^{AE}(t)\omega(t)(1-\sigma-\theta) + P_i^{US}(t)r_i(t)[1-q_i^U(t)](1-\sigma-\theta) + \\
 &\quad P_i^{AS}(t)\omega(t)[1-q_i^U(t)](1-\sigma-\theta) + P_i^{UE}(t)r_i(t)(1-\sigma-\theta) \\
 P_i^{AE}(t+1) &= P_i^{AS}(t)\left\{ [1-\omega(t)][1-q_i^A(t)] + \omega(t)[1-q_i^U(t)][1-r_i(t)] \right\} + P_i^{UE}(t)[1-r_i(t)](1-\sigma-\theta) + \\
 &\quad P_i^{US}(t)\left\{ r_i(t)[1-q_i^U(t)][1-r_i(t)] + [1-r_i(t)][1-q_i^A(t)] \right\} + P_i^{AE}(t)[1-\omega(t)](1-\sigma-\theta) \quad (3) \\
 P_i^{AI}(t+1) &= P_i^{AS}(t)\left\{ [1-\omega(t)][1-q_i^A(t)]\sigma + \omega(t)[1-q_i^U(t)]\left\{ \sigma + [1-r_i(t)]\sigma \right\} \right\} + \\
 &\quad P_i^{US}(t)\left\{ r_i(t)[1-q_i^U(t)]\left\{ \sigma + [1-r_i(t)]\sigma \right\} + [1-r_i(t)][1-q_i^A(t)]\sigma \right\} + P_i^{UE}(t)r_i(t)\sigma + \\
 &\quad P_i^{AE}(t)[1-\omega(t)]\sigma + P_i^{AI}(t)(1-\mu) \\
 P_i^{UR}(t+1) &= P_i^{AR}(t)\omega(t) + P_i^{UE}(t)r_i(t)\theta + P_i^{UR}(t)r_i(t) \\
 P_i^{AR}(t+1) &= P_i^{AE}(t)[1-\omega(t)]\theta + P_i^{UR}(t)[1-r_i(t)] + P_i^{AI}(t)\mu + P_i^{AR}(t)[1-\omega(t)]
 \end{aligned}$$

式中: $(t+1)$ 表示 t 时刻的下一时步, 值得注意的是, 无论哪一时刻必须满足 $P_i^{AS}(t) + P_i^{AE}(t) + P_i^{AI}(t) + P_i^{AR}(t) + P_i^{US}(t) + P_i^{UE}(t) + P_i^{UR}(t) = 1$ 。当 $t \rightarrow \infty$ 时, 每个状态都会到达相应的稳态值, 即有

$$\begin{cases}
 P_i^{AS}(t+1)_{t \rightarrow \infty} = P_i^{AS}(t)_{t \rightarrow \infty} = P_i^{AS} \\
 P_i^{US}(t+1)_{t \rightarrow \infty} = P_i^{US}(t)_{t \rightarrow \infty} = P_i^{US} \\
 P_i^{UE}(t+1)_{t \rightarrow \infty} = P_i^{UE}(t)_{t \rightarrow \infty} = P_i^{UE} \\
 P_i^{AE}(t+1)_{t \rightarrow \infty} = P_i^{AE}(t)_{t \rightarrow \infty} = P_i^{AE} \\
 P_i^{AI}(t+1)_{t \rightarrow \infty} = P_i^{AI}(t)_{t \rightarrow \infty} = P_i^{AI} \\
 P_i^{UR}(t+1)_{t \rightarrow \infty} = P_i^{UR}(t)_{t \rightarrow \infty} = P_i^{UR} \\
 P_i^{AR}(t+1)_{t \rightarrow \infty} = P_i^{AR}(t)_{t \rightarrow \infty} = P_i^{AR}
 \end{cases} \quad (4)$$

且有 $P_i^{AS} + P_i^{US} + P_i^{UE} + P_i^{AE} + P_i^{AI} + P_i^{UR} + P_i^{AR} = 1$, 又因为当物理接触层的感染概率接近传播阈值时,

可以假设 $P_i^{AE} = \varepsilon_i \ll 1$ 。式(2)中的后 2 个等式即可变换为

$$\begin{cases}
 q_i^A(t) = \prod_j [1 - b_{ji} P_i^{AE}(t) \beta^A] \approx 1 - \beta^A \sum_j b_{ji} \varepsilon_j \\
 q_i^U(t) = \prod_j [1 - b_{ji} P_i^{AE}(t) \beta^U] \approx 1 - \beta^U \sum_j b_{ji} \varepsilon_j
 \end{cases} \quad (5)$$

方便起见, 将式(5)转换为

$$\begin{cases}
 \xi_i^A = \beta^A \sum_j b_{ji} \varepsilon_j \\
 \xi_i^U = \beta^U \sum_j b_{ji} \varepsilon_j
 \end{cases} \quad (6)$$

由此, $q_i^A(t)$ 和 $q_i^U(t)$ 可以变换为

$$q_i^A(t) \approx 1 - \xi_i^A; \quad q_i^U(t) \approx 1 - \xi_i^U$$

经过以上一系列变换后, 式(3)可以变换为

$$\begin{aligned}
 P_i^{US}(t+1) &= P_i^{AS}(t)\omega(t)(1-\xi_i^U) + P_i^{US}(t)r_i(t)(1-\xi_i^U) \\
 P_i^{AS}(t+1) &= P_i^{US}(t)[1-r_i(t)](1-\xi_i^A) + P_i^{AS}(t)[1-\omega(t)](1-\xi_i^A) \\
 P_i^{UE}(t+1) &= P_i^{AE}(t)\omega(t)(1-\sigma-\theta) + P_i^{US}(t)r_i(t)\xi_i^U(1-\sigma-\theta) + P_i^{AS}(t)\omega(t)\xi_i^U(1-\sigma-\theta) + P_i^{UE}(t)r_i(t)(1-\sigma-\theta) \\
 P_i^{AE}(t+1) &= P_i^{AS}(t)\left\{ [1-\omega(t)]\xi_i^A + \omega(t)\xi_i^U[1-r_i(t)] \right\} + P_i^{UE}(t)[1-r_i(t)](1-\sigma-\theta) + \\
 &\quad P_i^{US}(t)\left\{ r_i(t)\xi_i^U[1-r_i(t)] + [1-r_i(t)]\xi_i^A \right\} + P_i^{AE}(t)[1-\omega(t)](1-\sigma-\theta) \quad (7) \\
 P_i^{AI}(t+1) &= P_i^{AS}(t)\left\{ [1-\omega(t)]\xi_i^A\sigma + \omega(t)\xi_i^U\left\{ \sigma + [1-r_i(t)]\sigma \right\} \right\} + P_i^{US}(t)r_i(t)\xi_i^U\left\{ \sigma + [1-r_i(t)]\sigma \right\} + \\
 &\quad [1-r_i(t)]\xi_i^A\sigma + P_i^{AE}(t)r_i(t)\sigma + P_i^{AE}(t)[1-\omega(t)]\sigma + P_i^{AI}(t)(1-\mu) \\
 P_i^{UR}(t+1) &= P_i^{AR}(t)\omega(t) + P_i^{UE}(t)r_i(t)\theta + P_i^{UR}(t)r_i(t) \\
 P_i^{AR}(t+1) &= P_i^{AE}(t)[1-\omega(t)]\theta + P_i^{UR}(t)[1-r_i(t)] + P_i^{AI}(t)\mu + P_i^{AR}(t)[1-\omega(t)]
 \end{aligned}$$

系统在稳定状态下, 感染个体的数量很小, 可以假设:

$P_i^{AR} \rightarrow 0, P_i^{UR} \rightarrow 0, P_i^{UR} \rightarrow 0$, 由此, 对式(6)而言, 式(7)忽略高阶项, 可得

$$\begin{cases} P_i^{US} = P_i^{AS} \omega(t) + P_i^{US} r_i(t) \\ P_i^{AS} = P_i^{US} [1 - r_i(t)] + P_i^{AS} [1 - \omega(t)] \\ P_i^{AI} = P_i^{US} r_i \sigma + P_i^{AS} [1 - \omega(t)] \sigma + \\ P_i^{AE} [1 - \omega(t)] \sigma + P_i^{AI} (1 - \mu) \\ \varepsilon_i = P_i^{AS} \{ [1 - \omega(t)] \xi_i^A + \omega(t) \xi_i^U [1 - r_i(t)] \} + \\ P_i^{US} \{ r_i(t) \xi_i^U [1 - r_i(t)] + [1 - r_i(t)] \xi_i^A \} + \\ \varepsilon_i [1 - \omega(t)] (1 - \sigma - \theta) \end{cases} \quad (8)$$

当 $t=0$ 时, 即初始时刻, $\omega(t) \approx 0, r_i(t) \approx 0$, 将式(8)中的第4个等式进一步化简可得

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= P_i^{AS} \{ [1 - \omega(t)] \xi_i^A + \omega(t) \xi_i^U [1 - r_i(t)] \} + \\ &P_i^{US} \{ r_i(t) \xi_i^U [1 - r_i(t)] + [1 - r_i(t)] \xi_i^A \} + \\ &\varepsilon_i [1 - \omega(t)] (1 - \sigma - \theta) = \\ &P_i^{AS} \xi_i^A + P_i^{US} \xi_i^U + \varepsilon_i (1 - \sigma - \theta) = \\ &P_i^{AS} \gamma \beta^U \sum_j b_{ji} \varepsilon_j + P_i^{US} \beta^U \sum_j b_{ji} \varepsilon_j + \\ &\varepsilon_i [1 - (\sigma + \theta)] \end{aligned} \quad (9)$$

又 $P_i^{AS} + P_i^{AE} + P_i^{AI} + P_i^{AR} + P_i^{US} + P_i^{UE} + P_i^{UR} = 1$ 且 $P_i^{AI} \rightarrow 0, P_i^{AE} \rightarrow 0, P_i^{AR} \rightarrow 0, P_i^{UE} \rightarrow 0, P_i^{UR} \rightarrow 0$, $P_i^A = P_i^{AS} + P_i^{AE} + P_i^{AI} + P_i^{AR}$, 所以 $P_i^A \approx P_i^{AS}$, $P_i^{US} \approx 1 - P_i^A$. 由此可以进一步将式(9)转化为

$$\begin{aligned} (\sigma + \theta) \varepsilon_i &= (P_i^{AS} \gamma + P_i^{US}) \beta^U \sum_j b_{ji} \varepsilon_j = \\ &[P_i^A \gamma + (1 - P_i^A)] \beta^U \sum_j b_{ji} \varepsilon_j = \\ &[1 - (1 - \gamma) P_i^A] \beta^U \sum_j b_{ji} \varepsilon_j \end{aligned} \quad (10)$$

根据(10)式, 经过变换可得

$$\sum_j \left\{ [1 - (1 - \gamma) P_i^A] b_{ji} - \frac{(\sigma + \theta)}{\beta^U} t_{ji} \right\} = 0 \quad (11)$$

此处的 t_{ji} 为单位矩阵的元素。

定义 $h_{ji} = [1 - (1 - \gamma) P_i^A] b_{ji}$ 为矩阵 \mathbf{H} 的元素, 且 λ_{\max} 是矩阵 \mathbf{H} 的最大特征根。根据式(11), 可以

得出本传染病传播模型的传播阈值为

$$\beta_c^U = \frac{(\sigma + \theta)}{\lambda_{\max}(\mathbf{H})} \quad (12)$$

式中: $(\sigma + \theta)$ 为潜伏态转换为感染态和被治愈(即恢复态)的概率和。

由式(12)可知: 传染病在双重网络中的传播阈值与其网络的拓扑结构有关。在异质网络中, 网络规模越大, 传染病传播阈值越小, 传染病越容易爆发。同理可推信息层的传播阈值为

$$\lambda_c = \frac{\omega}{\lambda_{\max}(\mathbf{A})} \quad (13)$$

在信息传播层上, 根据式(1), (13)可知: 传染病信息遗忘概率会随感染者数量的增加而减小, 而意识扩散阈值会随遗忘概率的减小而减小。因此, 当传染病爆发时, 感染者数量的增加会导致关于传染病的意识信息更容易扩散。这也是符合常理的, 因为当传染病爆发时, 人们会通过各种网络途径了解更多传染病信息, 从而做好个人防护等措施。

2 数值仿真分析

在此部分, 将通过大量的蒙特卡罗仿真来进一步分析本文所提出的理论模型。在 SEIR 模型中, 稳态下的潜伏态节点密度和恢复态节点密度是传染病传播的重要指标。可以定义为 $\rho^E = N^E/N$ 和 $\rho^R = N^R/N$, 其中 N^E, N^R 分别代表潜伏态个体数和恢复态个体数, N 代表全部个体数。同理, 也可以定义 $\rho^A = N^A, \rho^I = N^I/N$, N^A 和 N^I 分别代表感知态个体数和感染态个体数。

图4所示为 MMCA 算法与蒙特卡罗方法(MC)的对比图。其参数设置为: $\gamma = 0.6, \omega = \omega(t), \mu = 0.3, \theta = 0.32, \sigma = 0.48$ 。在仿真过程中, 信息层跟物理接触层选用拓扑结构不同的 BA 网络。两层网络均生成 1000 个节点, 网络的平均度分别为 7 和 4。MC 方法能反映模型在实际传染病传播过程中的演化过程, 由图4可知, 2种方法结果比较吻合, MMCA 算法得到的节点密度略大于 MC

方法,从总体上看,MMCA 算法能够很好地描述传播的实际过程。下面考虑的演化过程均是基于 MMCA 算法的双层网络中 UAU-SEIR 模型。

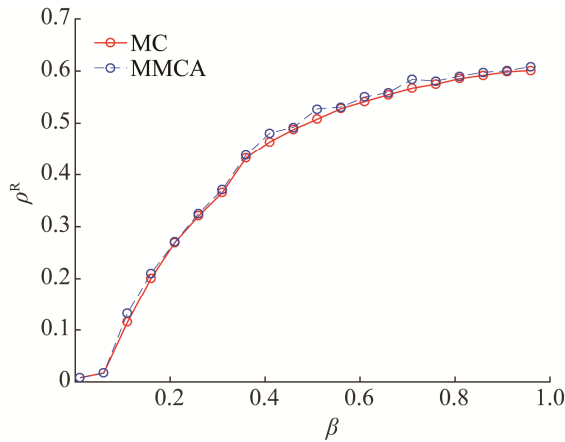


图 4 稳态时恢复态节点密度随 β 的变化曲线
Fig. 4 Node density of restored state changes with β in steady state

图 5 描述了潜伏态个体密度 ρ^E 随着时间 t 的变化情况,其中参数设置为 $\mu=0.3$, $\omega=\omega(t)$, $\theta=0.32$, $\sigma=0.48$,上下两层为拓扑结构不同的 BA 网络。结果表明,受传染病影响的潜伏态节点数与时间 t 呈负相关。当 β 大于传播阈值时,曲线会有明显上升的过程,说明传染病爆发,如果 β 小于传播阈值,则传染病不会爆发,会呈缓慢下降的趋势。

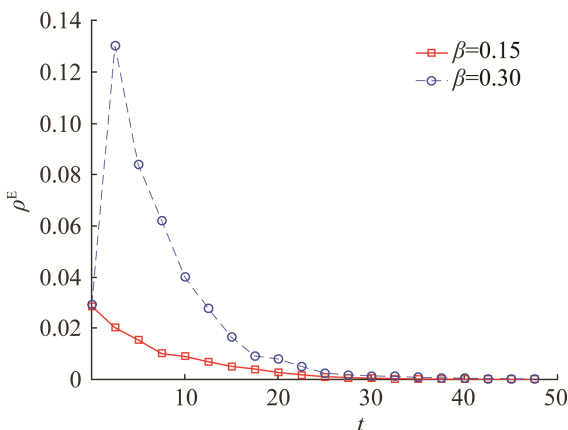


图 5 潜伏态个体密度关于时间的函数曲线
Fig. 5 Individual density curve of exposed states as a function of time

2.1 潜伏态节点转化概率对于恢复态节点密度的影响

恢复态个体密度与感染率 β 的关系如图 6 所示。图 6 中, $\sigma+\theta$ 不同对于恢复态节点也有着明显的影响, $\sigma+\theta$ 也是影响传播阈值的关键参数。其他参数设置为: $\omega=\omega(t)$, $\mu=0.3$, $\gamma=0$ 。

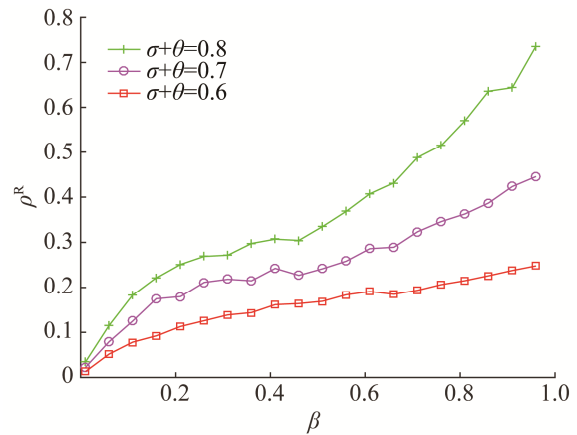


图 6 恢复态个体密度与感染率 β 的关系曲线
Fig. 6 Relationship between population density and infection rate β

由图 6 可以看出, $\sigma+\theta$ 对恢复态节点密度有较为明显的影响, $\sigma+\theta$ 越大,说明潜伏态节点转移为其他状态的概率越大,随之恢复态节点的密度就会上升。

2.2 遗忘概率对于双层网络传播行为分析

图 7 分别描述了不同遗忘概率下(遗忘概率为常数)的潜伏态节点密度曲线以及时变遗忘概率下的潜伏态节点密度曲线,其中具体参数设置为: $\mu=0.3$, $\theta=0.32$, $\sigma=0.48$ 。

由图 7 可以看出,遗忘概率对于潜伏态传染病的密度影响还是比较明显的。当遗忘概率大于信息层传播阈值 $\lambda_c = \omega/\Lambda_{\max}(\mathbf{A})$ 时,曲线会出现波峰,说明传染病会在人群中爆发,这也符合实际情况。

图 7 中的黑色曲线展示了遗忘概率 ω 为时变函数时(式(1)所示),潜伏态个体密度随时间的变化曲线。可见在传染病刚出现时,存在少量潜伏态个体的信息不足以引起人们的注意, $\omega(t)$ 较大,导致

潜伏态感染个体密度增加($\omega(t) >$ 信息层传播阈值)。之后由于潜伏态感染个体数量增加引起人们的关注,个体会采取一定的防护措施,同时 $\omega(t)$ 也随之变小,进而潜伏态个体密度也呈现出下降趋势。

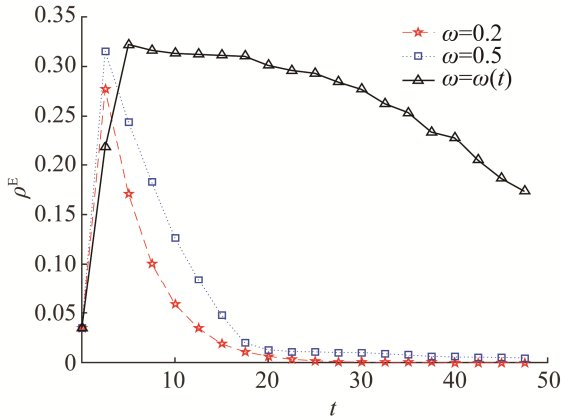
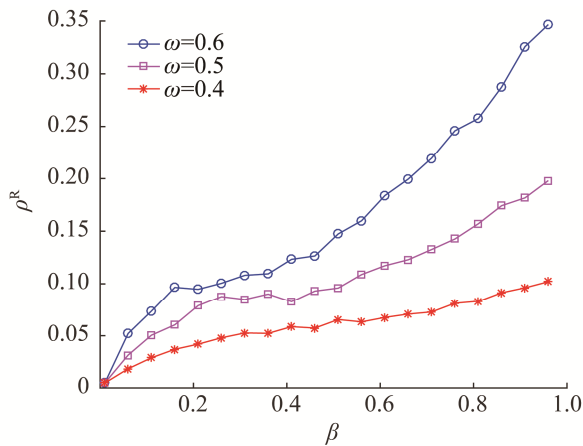
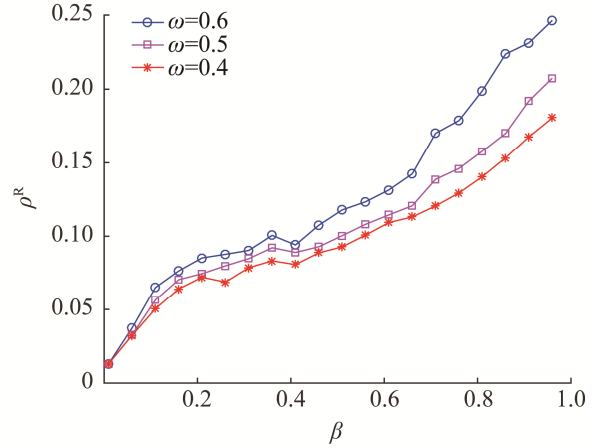


图7 不同遗忘概率下的潜伏态个体密度曲线
Fig. 7 Individual density curves of exposed states with different forgetting probabilities

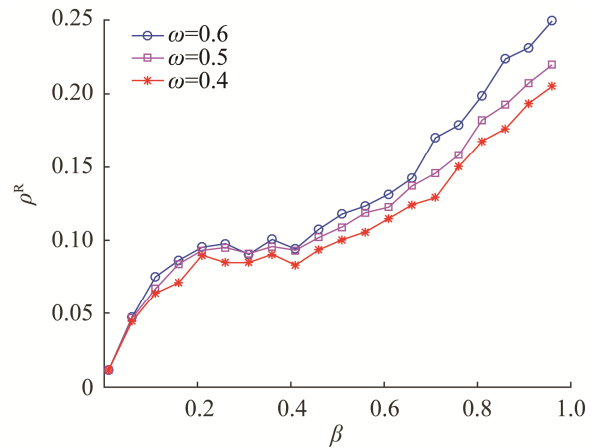
图8描述了在不同参数值 ω 、 μ 、 σ 、 θ 下恢复态个体密度 (ρ^R) 与感染率 β 的关系。从整体来看, $\omega(t)$ 对于患病率影响更大。对于传染病传播, $\omega(t)$ 越大, 传染病传播的流行率就会越高。造成上述现象的主要原因是随着 $\omega(t)$ 增大, 个体对于传染病的警惕性和敏性会变低。例如, 当 $\beta=0.5$ 时, 图 8(a) 中 $\omega(t)$ 由 0.4、0.5 变为 0.6 时, ρ^R 分别为 0.065 48, 0.095 92, 0.147 4。



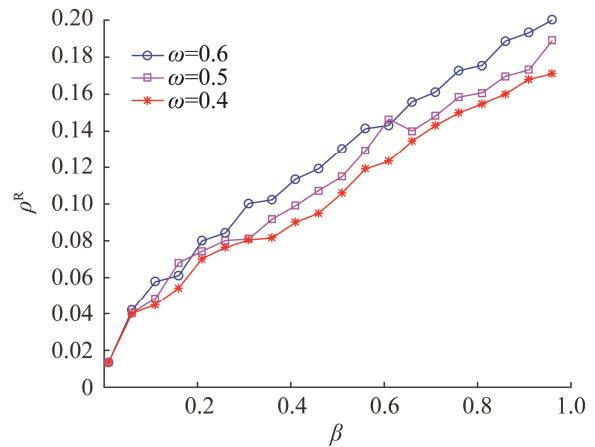
(a) $\mu=0.3, \theta=0.32, \sigma=0.48$



(b) $\mu=0.5, \theta=0.32, \sigma=0.48$



(c) $\mu=0.3, \theta=0.24, \sigma=0.36$



(d) $\mu=0.5, \theta=0.24, \sigma=0.36$

图8 稳态下恢复态个体密度与感染率之间的关系
Fig. 8 Relationship between density of recovered individuals and infection rate in steady state

通过比较图 8(a)和(b)可以发现,当恢复率 μ 越大时, $\omega(t)$ 对于传染病传播的流行率影响越大。例

如, 在图 8(a)中, $\beta=0.7$ 时, $\omega(t)=0.4$ 和 $\omega(t)=0.6$ 之间的 ρ^R 差值为 0.147, 但是在图 8(b)中差值为 0.029 3, 图中的差距比例明显。这说明, 较高的恢复率 μ 会减弱 $\omega(t)$ 的影响。

通过比较图 8(b)和(d)可以发现, 改变潜伏态转移为其他状态的概率 σ , θ (由 $\theta=0.32$, $\sigma=0.48$ 变为 $\theta=0.24$, $\sigma=0.36$) 对于 ρ^R 也会产生比较明显的影响, ρ^R 的最大值由 0.25 变为 0.20, 每个感染率 β 之间的差值比例会明显变小。这种现象说明, 当潜伏态转移为其他状态的概率变低时, 会降低 $\omega(t)$ 的影响。

2.3 衰减因子对于双层网络传播行为的影响

本节进一步研究了恢复个体之间的差异和遗忘概率 $\omega(t)$ 以及感染衰减因子 γ 之间的关系, 图 9 描述了当遗忘概率 $\omega(t)$ 和感染衰减因子 γ 其中之一一发生变化时的恢复态个体密度的变化情况。

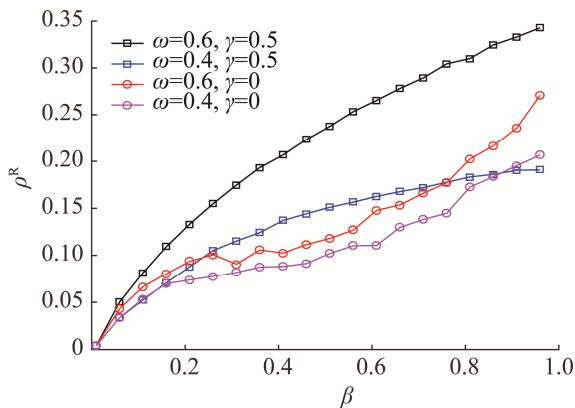


图 9 恢复态个体密度随感染率变化的关系
Fig. 9 Relationship between density of recovered individuals and infection rate variation

从图 9 可以明显看出: 在完全免疫 ($\gamma=0$) 和部分免疫 ($\gamma=0.5$) 的作用下, 恢复个体密度存在着明显的差异。当 $\omega(t)=0.4$, $\beta=0.5$ 时, $\gamma=0$ 和 $\gamma=0.5$ 的 ρ^R 差值为 0.12。并且随着感染率的增加, 差异也会随之增大。其主要原因是 $\omega(t)$ 越大, 就会有大量的个体放松对传染病传播的防控, 导致感染人数增加进而恢复态个体也随之增加。通过对比完全免疫和部分免疫在恢复态个体中所占的比例差距, 更加说明了感知传染病传播的个体采取有效的防控

措施的重要性。

图 10 显示了 2020 年 2 月四川省的 COVID-19 累计确诊病例的真实数据和模型仿真数据的对比结果, 从图中可以看出, 本文所提模型可以较好的反映出传染病的实际传播趋势。

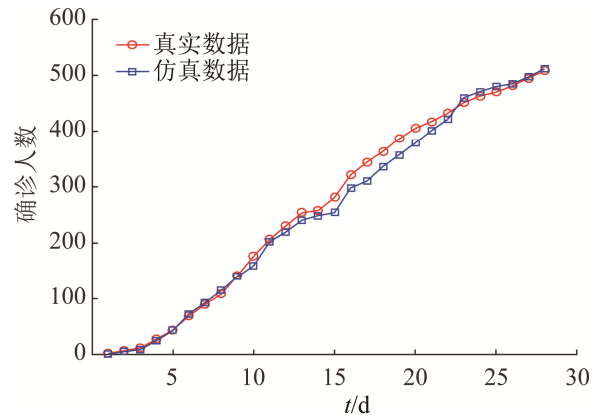


图 10 真实数据与仿真数据对比图
Fig. 10 Comparison of simulated data and real data.

3 结论

本文提出了一种新的基于双层网络的传染病传播模型来研究传染病在人群中的传播规律。在此模型中, 上层网络代表传染病发生时人们风险意识的传播, 下层网络则表示传染病在人群接触网络的传播。在本文中个体对于传染病的遗忘概率是基于时间以及群体中潜伏态个体密度而变化的, 同时有意识的个体会采取一定的防控措施, 以免遭受传染病的侵害。在下层采用 SEIR 模型来描述传染病的传播过程, 如果个体感染, 会存在一定的潜伏期, 在此期间个体具有一定的传染性。

本文利用 MMCA 算法分析传染病的特性, 并推导出传染病的传播阈值表达式。结果表明, 传染病传播的阈值与传染病物理接触层网络和信息感知层网络的拓扑结构有关。其次, 通过大量的仿真实验进一步分析了所提出的模型, 讨论了潜伏态转移概率、遗忘概率、感染衰减因子对传染病传播的影响。分析得出, 遗忘概率越大个体被感染的风险越高; 较高的恢复率会减弱遗忘概率的影响; 当潜伏态转变为其他状态的概率较低时, 会降低遗忘概

率的影响。遗忘概率越大,越会降低感染衰减因子对于传染病的抑制作用。目前,本文所采用的底层网络为无向异质网络,而实际生活中,网络上的信息传播往往是有向的,因此,在多层有向网络上建立传染病传播模型将是进一步的研究方向。

参考文献:

- [1] Peiris J S, Guan Y, Yuen K Y. Severe Acute Respiratory Syndrome[J]. *Nature Medicine* (S1078-8956), 2004, 10: 588-597.
- [2] Bruce Aylward, Philippe Barboza, Luke Bawo, et al. Ebola Virus Disease in West Africa - The First 9 Months of the Epidemic and Forward Projections[J]. *The New England Journal of Medicine* (S0028-4793), 2014, 371(16): 1481-1495.
- [3] Smith G, Dhanasekaran V, Justin B, et al. Origins and Evolutionary Genomics of the 2009 Swine-Origin H1N1 Influenza A Epidemic[J]. *Nature* (S0028-0836), 2021, (459)7520: 1122.
- [4] Barabási A L, Albert R, Jeong H. Mean-field Theory for Scale-free Random Networks[J]. *Physica A - Statistical Mechanics and Its Applications* (S0378-4371), 1999, 272 (1/2): 173-187.
- [5] Albert R, Barabási A L. Statistical Mechanics of Complex Networks[J]. *Reviews of Modern Physics* (S0034-6861), 2002, 74: 47.
- [6] Li Huijia, Wang Hao, Chen Luonan. Measuring Robustness of Community Structure in Complex Networks[J]. *Europhysics Letters* (S0295-5075), 2014, 108(6): 68009.
- [7] Dorogovtsev S N, Goltsev A V, Mendes J F F. Critical Phenomena in Complex Networks[J]. *Reviews of Modern Physics* (S0034-6861), 2008, 80: 1275.
- [8] Li Huijia, Daniels Jasmine J. Social Significance of Community Structure: Statistical View[J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter* (S1539-3755), 2015, 91(1): 012801.
- [9] Li Chao, Wang Li, Sun Shiwen, et al. Identification of Influential Spreaders Based on Classified Neighbors in Real-World Complex Networks[J]. *Applied Mathematics and Computation* (S0096-3003), 2018, 320: 512-523.
- [10] Herbert W Hethcote. The Mathematics of Infectious Diseases[J]. *SIAM Review* (S0036-1445), 2000, 42(4): 599-653.
- [11] Pastor-Satorras R, Castellano C, Mieghem P V, et al. Epidemic Processes in Complex Networks[J]. *Reviews of Modern Physics* (S0034-6861), 2015, 87(3): 925-979.
- [12] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex Networks: Structure and Dynamics[J]. *Physics Reports* (S0370-1573), 2006, 424 (4/5): 175-308.
- [13] Keeling M J, Eames K. Networks and Epidemic Models[J]. *Journal of the Royal Society Interface* (S1742-5689), 2005, 2(4): 295-307.
- [14] Wang Zhen, Bauch C T, Bhattacharyya S, et al. Statistical Physics of Vaccination[J]. *Physics Reports* (S0370-1573), 2016, 664: 1-113.
- [15] Hébert-Dufresne L, Allard A, Young J, et al. Global Efficiency of Local Immunization on Complex Networks[J]. *Scientific Reports* (S2352-409X), 2013, 3: 2171.
- [16] Iannelli F, Koher A, Brockmann D, et al. Effective Distances for Epidemics Spreading on Complex Networks[J]. *Physical Review E* (S2470-0053), 2017, 95(1): 012313.
- [17] Li Huijia, Bu Zhan, Li Aihua, et al. Fast and Accurate Mining the Community Structure: Integrating Center Locating and Membership Optimization[J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* (S0169-023X), 2016, 28(9): 2349-2362.
- [18] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic Spreading in Scale-free Networks[J]. *Physical Review Letters* (S0031-9007), 2001, 86(14): 3200-3203.
- [19] Castellano C, Pastor-Satorras R. Thresholds for Epidemic Spreading in Networks[J]. *Physical Review E* (S2470-0053), 2010, 18(11): 218701.
- [20] 柳文艳, 张玉霞. 基于复杂行为响应的传染病爆发问题的研究[J]. *复杂系统与复杂性科学*, 2017, 14(1): 8-14.
- [20] Liu Wenyan, Zhang Yuxia. The Study of Infections Disease Outbreaks Based on Complex Behavior Response[J]. *Complex System and Complexity Science*, 2017, 14(1): 8-14.
- [21] 张强, 曹军海, 宋太亮. 基于 SIRV 病毒传播理论的装备保障网络级联失效分析[J]. *系统仿真学报*, 2019, 31(12): 2657-2663.
- [21] Zhang Qiang, Cao Junhai, Song Tailiang. Cascading Failure Analysis of Equipment Support Network Based on SIRV Virus Propagation Theory[J]. *Journal of System Simulation*, 2019, 31(12): 2657-2663.
- [22] Ferraz D, Rodrigues F A, Yamir M. Fundamentals of Spreading Processes in Single and Multilayer Complex Networks[J]. *Physics Reports* (S0370-1573), 2018, 756: 1-59.
- [23] Granell C, Gómez S, Arenas A. Competing Spreading Processes on Multiplex Networks: Awareness and

- Epidemics[J]. Physical Review E (S2470-0053), 2014, 90(1): 012808.
- [24] Zheng Chunyuan, Xia Chengyi, Guo Quantong, et al. Interplay between SIR-Based Disease Spreading and Awareness Diffusion on Multiplex Networks[J]. Journal of Parallel & Distributed Computing (S0743-7315), 2018, 115: 20-28.
- [25] Xia Chengyi, Wang Zhishuang, Zheng Chunyuan, et al. A New Coupled Disease-Awareness Spreading Model with Mass Media on Multiplex Networks[J]. Information Sciences (S0020-0255), 2019, 471: 185-200.
- [26] 李盈科, 赵时. 新型冠状病毒肺炎的流行病参数与模型[J]. 物理学报, 2020, 69(9): 090202.
- Li Yingke, Zhao Shi. Epidemiological Parameters and Models of Coronavirus Disease 2019[J]. Acta Physica Sinica, 2020, 69(9): 090202.
- [27] 王刚, 胡鑫, 陆世伟. 节点增减机制下的病毒传播模型及稳定性[J]. 电子科技大学学报, 2019, 48(1): 75-79.
- Wang Gang, Hu Xin, Lu Shiwei. Virus Spreading Model and Its Stability Based on the Mechanism of Node Increasing and Decreasing[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2019, 48(1): 75-79.
- [28] Funk S, Gilad E, Watkins C, et al. The Spread of Awareness and Its Impact on Epidemic Outbreaks[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (S0027-8424), 2009, 106(16): 6872-6877.
- [29] Wu Qingchu, Fu Xinchu, Small M, et al. The Impact of Awareness on Epidemic Spreading in Networks[J]. Chaos (S1054-1500), 2012, 22(1): 013101.
- [30] Granell C, Gomez S, Arenas A. Dynamical Interplay between Awareness and Epidemic Spreading in Multiplex Networks[J]. Physical Review Letters (S0031-9007), 2013, 111(12): 128701.
- [31] Wang Zhishuang, Guo Quantong, Sun Shiwen, et al. The Impact of Awareness Diffusion on SIR-like Epidemics in Multiplex Networks[J]. Applied Mathematics and Computation (S0096-3003), 2019, 349(5): 134-147.
- [32] Guo Quantong, Jiang Xin, Lei Yanjun, et al. Two-stage Effects of Awareness Cascade on Epidemic Spreading in Multiplex Networks[J]. Physical Review E (S2470-0053), 2015, 91(1): 012822.
- [33] Zhao Laijun, Wang Xiaoli, Qiu Xiaoyun, et al. A Model for the Spread of Rumors in Barrat-Barthelemy-Vespignani Networks[J]. Physica A-Statistical Mechanics and Its Applications (S0378-4371), 2013, 392(21): 5542-5551.
- [34] He Le, Zhu Linhe. Modeling the COVID-19 Epidemic and Awareness Diffusion on Multiplex Networks[J]. Communications in Theoretical Physics (S0253-6102), 2021, 73(3): 035002.