

1-14-2022

## Fault Tolerant Control and Simulation of Quadrotor Based on Adaptive Observer

Zhao Jing

*1. College of Automation & College of Artificial Intelligence, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China;;2. Jiangsu Engineering Lab for lot Intelligent Robots (lot Robot), Nanjing 210023, China;*

Wang Peng

*1. College of Automation & College of Artificial Intelligence, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China;;2. Jiangsu Engineering Lab for lot Intelligent Robots (lot Robot), Nanjing 210023, China;*

Xiaoqian Ding

*1. College of Automation & College of Artificial Intelligence, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China;;2. Jiangsu Engineering Lab for lot Intelligent Robots (lot Robot), Nanjing 210023, China;*

Guoping Jiang

*1. College of Automation & College of Artificial Intelligence, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China;;2. Jiangsu Engineering Lab for lot Intelligent Robots (lot Robot), Nanjing 210023, China;*

*See next page for additional authors*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research](#), [Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

# Fault Tolerant Control and Simulation of Quadrotor Based on Adaptive Observer

## Abstract

**Abstract:** Focusing on the actuator fault of quadrotor, *an integral backstepping sliding mode combined with adaptive observer is proposed to ensure the safety and reliability of the quadrotor.* A dynamic model of the quadrotor with actuator fault are established. *An adaptive observer is proposed to observe the state and estimate the actual value of the fault. The attitude fault tolerant controller and position controllers are designed by the method of integral backstepping combined with the sliding mode control to complete the trajectory tracking of attitude and position.* The simulation results show that the control strategy can quickly and accurately track the desired signals during actuator fault.

## Keywords

quadrotor, actuator fault, adaptive observer, fault tolerant control, integral backstepping, sliding mode control

## Authors

Zhao Jing, Wang Peng, Xiaoqian Ding, Guoping Jiang, Fengyu Xu, and Yanfei Sun

## Recommended Citation

Zhao Jing, Wang Peng, Ding Xiaoqian, Jiang Guoping, Xu Fengyu, Sun Yanfei. Fault Tolerant Control and Simulation of Quadrotor Based on Adaptive Observer[J]. Journal of System Simulation, 2022, 34(1): 1-10.

# 基于观测器的四旋翼容错控制及仿真研究

赵静<sup>1,2</sup>, 王鹏<sup>1,2</sup>, 丁筱茜<sup>1,2</sup>, 蒋国平<sup>1,2</sup>, 徐丰羽<sup>1,2</sup>, 孙雁飞<sup>1,2</sup>

(1. 南京邮电大学 自动化学院、人工智能学院, 江苏 南京 210023; 2. 江苏省物联网智能机器人工程实验室, 江苏 南京 210023)

**摘要:** 针对四旋翼飞行器执行器故障的问题, 提出了一种基于自适应观测器的积分反演滑模容错控制策略, 以保证飞行器的安全性和可靠性。建立考虑执行器故障的四旋翼飞行器动力学模型; 设计一种自适应故障估计观测器用来观测系统的状态和估计故障信息; 采用积分反演和滑模控制相结合的方法分别设计姿态容错控制器和位置控制器, 完成姿态和位置的轨迹跟踪。仿真结果表明: 该控制策略能够在执行器故障的情况下快速精确跟踪期望信号。

**关键词:** 四旋翼; 执行器故障; 自适应观测器; 容错控制; 积分反演; 滑模控制

中图分类号: TP391; V279 文献标志码: A 文章编号: 1004-731X (2022) 01-0001-10

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.20-0634

## Fault Tolerant Control and Simulation of Quadrotor Based on Adaptive Observer

Zhao Jing<sup>1,2</sup>, Wang Peng<sup>1,2</sup>, Ding Xiaolian<sup>1,2</sup>, Jiang Guoping<sup>1,2</sup>, Xu Fengyu<sup>1,2</sup>, Sun Yanfei<sup>1,2</sup>

(1. College of Automation & College of Artificial Intelligence, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China;

2. Jiangsu Engineering Lab for IoT Intelligent Robots (IoT Robot), Nanjing 210023, China)

**Abstract:** Focusing on the actuator fault of quadrotor, an integral backstepping sliding mode combined with adaptive observer is proposed to ensure the safety and reliability of the quadrotor. A dynamic model of the quadrotor with actuator fault are established. An adaptive observer is proposed to observe the state and estimate the actual value of the fault. The attitude fault tolerant controller and position controllers are designed by the method of integral backstepping combined with the sliding mode control to complete the trajectory tracking of attitude and position. The simulation results show that the control strategy can quickly and accurately track the desired signals during actuator fault.

**Keywords:** quadrotor; actuator fault; adaptive observer; fault tolerant control; integral backstepping; sliding mode control

## 引言

无人机(UAV), 特别是四旋翼飞行器, 由于其在军事和民用领域的应用引起了人们的关注和研究。与传统的飞行器相比, 四旋翼飞行器具备体积小、造价低廉、灵活性强、悬停控制方便等优点。因此, 四旋翼被用于完成各种任务, 如军事监视、精准农业、安全监控、空中物流等<sup>[1]</sup>。对于四旋翼, 在一些特定的环境下, 驱动电机可能出现故障, 如

果不能及时发现和处理, 会使四旋翼飞行器的系统性能下降, 影响飞行器的有效控制甚至失控。因此, 为了保证执行器在发生故障情况下的安全性和可靠性, 容错控制<sup>[2]</sup> (fault tolerant control, FTC) 成为四旋翼飞行器越来越重要的研究领域。

滑模控制(sliding mode control, SMC) 因其鲁棒性, 对扰动不灵敏, 响应速度快, 尤其是对非线性系统的控制具有良好的控制效果, 吸引了许多研究者的关注<sup>[3]</sup>。文献[4]基于三维旋转群 SO(3)的四

收稿日期: 2020-08-27 修回日期: 2020-12-11

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(51775284); 江苏省重点研发计划(BE2018734); 2020 年江苏省研究生培养创新工程(SJCX20\_0252); 南京邮电大学校级自然科学基金(NY221076)

第一作者: 赵静(1983-), 女, 博士, 副教授, 研究方向为无人机故障诊断与容错控制技术。E-mail: zhaojing@njupt.edu.cn

旋翼姿态动力学模型,提出一种无奇异积分滑模设计姿态控制器,增强了控制器的鲁棒性。文献[5]提出了一种双环积分滑模姿态控制器,用于模型不确定性和高斯随机扰动下的四旋翼跟踪控制。反演技术应其对非线性系统具有良好控制效果的优点,在欠驱动非线性系统中也得到了广泛的应用<sup>[6]</sup>。文献[7]采用反步法分别对四旋翼的位置和姿态控制系统进行控制率设计。为了同时利用滑模和反演方法的优点,将2种方法结合起来设计反演滑模控制器<sup>[8-10]</sup>受到广泛关注,同时为了克服传统 SMC 存在抖振现象,本文将积分反演与 SMC 相结合,以实现连续的控制信号,从而消除控制输入的抖振。

上述文献仅考虑外部扰动对系统的影响,但是执行器故障在实际系统中是不能被忽略的。文献[11]针对四旋翼的单旋翼完全失效问题,提出了一种基于非奇异终端滑模的容错控制器。文献[12]针对四旋翼多执行机构故障问题,提出一种自适应积分滑模容错控制器。然而,该文并未对执行器故障信息进行精确的估计。为了实现对故障实时在线估计,提出了基于观测器的方法。如文献[13]针对一个3个自由度的直升机,提出一种自适应滑模观测器,通过自适应律在线重构执行器故障。文献[14]针对四旋翼无人机执行机构故障,提出一个基于非线性高增益观测器的自适应控制器来估计和补偿故障。本文为了实现故障的实时估计,提出一个自适应观测器,来补偿执行器故障对系统的影响。

## 1 四旋翼飞行器动力学模型

### 1.1 四旋翼基础模型

四旋翼飞行器由1个刚体和4个转子组成,其结构如图1所示。

定义惯性坐标系 $(o_e, x_e, y_e, z_e)$ 和机体坐标系 $(o_b, x_b, y_b, z_b)$ ,如图1所示。向量 $\mathbf{P}=[x, y, z]^T$ 为飞行器在惯性坐标系中的位置,向量 $\boldsymbol{\Theta}=[\phi, \theta, \psi]^T$ 为飞行器在惯性坐标系中的姿态(横滚角、俯仰角和偏航角),向量 $\boldsymbol{\omega}_b=[p, q, r]^T$ 为姿态相对于机体

坐标系的角速度。利用旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 和欧拉矩阵 $\mathbf{T}$ 给出了机体坐标系与惯性坐标系之间的变换关系:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\theta S_\phi C_\psi - S_\psi C_\phi & S_\psi S_\phi + S_\theta C_\phi C_\psi \\ S_\psi C_\theta & C_\phi C_\psi + S_\theta S_\phi S_\psi & S_\theta S_\psi C_\phi - S_\phi C_\psi \\ -S_\theta & S_\phi C_\theta & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: $S_{(*)}, C_{(*)}$ 分别为 $\sin(*), \cos(*)$ 。 $\boldsymbol{\omega}_b$ 和 $\boldsymbol{\Theta}$ 之间的关系可以表示为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & C_\theta S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\omega}_b = \mathbf{T} \dot{\boldsymbol{\Theta}} \quad (4)$$

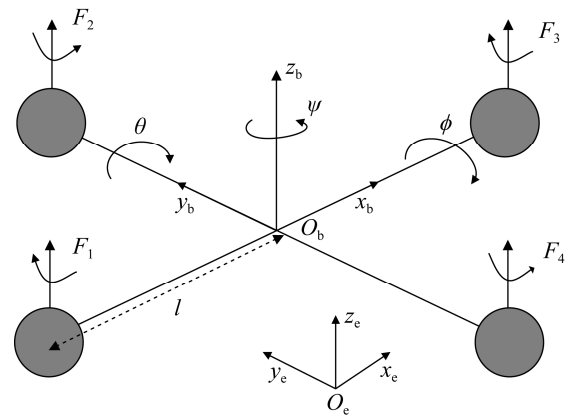


图1 四旋翼飞行器结构图  
Fig. 1 Structure of quadrotor

结合式(1)~(4)和文献[15]中四旋翼动力学方程,最后可得四旋翼飞行器的动力学模型为

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = a_1 \dot{\theta} \dot{\psi} - a_2 \dot{\phi} + U_1 \\ \ddot{\theta} = a_3 \dot{\phi} \dot{\psi} - a_4 \dot{\theta} + U_2 \\ \ddot{\psi} = a_5 \dot{\theta} \dot{\phi} - a_6 \dot{\psi} + U_3 \\ \ddot{x} = (C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi) U_4 - a_7 \dot{x} \\ \ddot{y} = (C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi) U_4 - a_8 \dot{y} \\ \ddot{z} = C_\phi C_\theta U_4 - g - a_9 \dot{z} \end{cases} \quad (5)$$

式中: $a_1 = (I_y - I_z) / I_x; a_2 = k_\phi / I_x; a_3 = (I_z - I_x) / I_y; a_4 = k_\theta / I_y; a_5 = (I_x - I_y) / I_z; a_6 = k_\psi / I_z; a_7 = k_x / m; a_8 = k_y / m; a_9 = k_z / m; U_1, U_2, U_3$ 分别为3个姿态角

的控制输入;  $U_4$  为位置系统的控制输入, 其中为  $\kappa$  拉力系数:

$$\begin{aligned} U_1 &= l\kappa(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) / I_x \\ U_2 &= l\kappa(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) / I_y \\ U_3 &= l\kappa(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) / I_z \\ U_4 &= l\kappa(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) / m \end{aligned} \quad (6)$$

式中:  $\Omega_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 为 4 个电机的转速。

## 1.2 四旋翼故障模型

本文考虑的故障发生在姿态子系统中, 将式(5)中的姿态子系统转化为一般的状态空间形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{x}(t) = [\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$  为系统的状态向量;

$\mathbf{y}(t) = [\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$  为系统输出向量;

$\mathbf{u}(t) = [U_1, U_2, U_3]^T$  为系统的输入向量;

$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = [0_{3 \times 1}, \Theta(\mathbf{x}, t)]^T$  为已知非线性函数,

$$\Theta(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} a_1 \dot{\theta} \dot{\psi} - a_2 \dot{\phi} \\ a_3 \dot{\phi} \dot{\psi} - a_4 \dot{\theta} \\ a_5 \dot{\theta} \dot{\phi} - a_6 \dot{\psi} \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix};$$

$\mathbf{C} = I_{6 \times 6}$ 。

考虑执行器加性故障对四旋翼无人机执行器的影响, 故障控制输入可以表示为

$$\mathbf{u}_f(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t) \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{f}(t) = [f_\phi(t), f_\theta(t), f_\psi(t)]^T$  为未知的偏差故障向量。

根据式(7), (8)可得, 当执行器发生故障时, 状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (9)$$

式中:  $\mathbf{F}=\mathbf{B}$  为故障矩阵。

**假设 1** 系统中的故障  $\mathbf{f}(t)$  有界, 其一阶导数  $\dot{\mathbf{f}}(t)$  存在, 并满足  $\|\mathbf{f}(t)\| \leq f_1$ ,  $\|\dot{\mathbf{f}}(t)\| \leq f_2$ , 其中  $f_1, f_2 > 0$ 。

## 2 自适应故障估计观测器设计

根据式(9), 观测器设计须满足 2 个假设条件。

**假设 2** ( $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ ) 完全可观测。

**假设 3** 非线性函数向量  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  满足 Lipschitz 连续条件, 即满足  $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_2, t)\| \leq \gamma \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ ,  $\gamma > 0$  为 Lipschitz 常数。

**引理 1** [16] 对于一个正标量  $\mu > 0$ , 式(10)成立:

$$2\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \frac{1}{\mu} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}^T \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (10)$$

**引理 2** 满足假设 3 的条件下, 如果存在一个正定矩阵  $\mathbf{P}$ , 则式(11)成立:

$$2\mathbf{e}^T \mathbf{P}(\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_2, t)) \leq \gamma^2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{e} \quad (11)$$

式中:  $\mathbf{e} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ 。

引理 2 易由引理 1 推出, 证明略。

基于以上假设和引理, 针对式(7), 设计自适应故障估计观测器, 即

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{F}\hat{\mathbf{f}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (12)$$

式中:  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  为观测器的状态向量;  $\hat{\mathbf{y}}(t)$  为观测器的输出向量;  $\hat{\mathbf{f}}(t)$  为故障  $\mathbf{f}(t)$  的估计值;  $\mathbf{K}$  为观测器增益矩阵。

定义

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}_f(t) = \hat{\mathbf{f}}(t) - \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{e}_y(t) = \hat{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t) \end{cases} \quad (13)$$

综合式(9), (11), 可得误差动态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_x(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{e}_x(t) + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}, t) - \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}\mathbf{e}_f(t) \\ \mathbf{e}_y(t) = \mathbf{C}\mathbf{e}_x(t) \end{cases} \quad (14)$$

**定理 1** 对于给定的观测器矩阵  $\mathbf{K}$ , 如果存在矩阵  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T > 0$  和矩阵  $\mathbf{F}_1$  满足

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}) + (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})^T \mathbf{P} + \gamma^2 \mathbf{P}\mathbf{P} + \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma + 1}{\sigma} \mathbf{G} \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{F}^T \mathbf{P} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{F}_1 \mathbf{C} \quad (16)$$

则自适应故障估计律为

$$\dot{\hat{\mathbf{f}}}(t) = -\Gamma \mathbf{F}_1 \mathbf{e}_y(t) + \sigma \Gamma \hat{\mathbf{f}}(t) \quad (17)$$

可使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_x(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_f(t) = 0$ 。其中,  $\sigma$  为

正常数,  $\Gamma = \Gamma^T > 0$  是自适应率。

**证明:** 选取 Lyapunov 函数

$$V(t) = e_x^T P e_x + \frac{1}{\sigma} e_f^T \Gamma^{-1} e_f \quad (18)$$

取  $V(t)$  对时间的导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \dot{e}_x^T P e_x + e_x^T P \dot{e}_x + \frac{2}{\sigma} e_f^T \Gamma^{-1} \dot{e}_f = \\ & e_x^T [P(A-KC) + (A-KC)^T P] e_x + \\ & 2e_x^T P F e_f + 2e_x^T P (g(\hat{x}, t) - g(x, t)) + \\ & \frac{2}{\sigma} e_f^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{f}} - \frac{2}{\sigma} e_f^T \Gamma^{-1} \dot{f} \end{aligned} \quad (19)$$

由定理 1 和引理 1 可得

$$\begin{aligned} 2e_x^T P F e_f + \frac{2}{\sigma} e_f^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{f}} = \\ 2e_x^T P F e_f + \frac{2}{\sigma} e_f^T \Gamma^{-1} (-\Gamma F_1 e_y + \Gamma G \hat{f}) = \\ 2e_f^T \hat{f} \leq e_f^T G e_f + \hat{f}^T G^{-1} \hat{f} \leq \\ e_f^T G e_f + f_1^2 \lambda_{\max} G^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

式中:  $\lambda_{\max}(\cdot)$  为相关矩阵的最大特征值。

由引理 1 可得

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\sigma} e_f^T \Gamma^{-1} \dot{f} = \frac{2}{\sigma} (-e_f^T) (\Gamma^{-1} \dot{f}) \leq \\ \frac{1}{\sigma} (e_f^T G e_f + \hat{f}^T G^{-1} G^{-1} \hat{f}) \leq \\ \frac{1}{\sigma} (e_f^T G e_f + f_2^2 \lambda_{\max} (\Gamma^{-1} G^{-1} \Gamma^{-1})) \end{aligned} \quad (21)$$

由引理 2 可得

$$\begin{aligned} e_x^T [P(A-KC) + (A-KC)^T P] e_x + \\ 2e_x^T P (g(\hat{x}, t) - g(x, t)) \leq \\ e_x^T [P(A-KC) + (A-KC)^T P + \gamma^2 PP + I] e_x \end{aligned} \quad (22)$$

将式(20)~(22)代入式(19), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq \\ e_x^T [P(A-KC) + (A-KC)^T P + \gamma^2 PP + I] e_x + \\ e_f^T G e_f + f_1^2 \lambda_{\max} (G^{-1}) + \\ \frac{1}{\sigma} (e_f^T G e_f + f_2^2 \lambda_{\max} (\Gamma^{-1} G^{-1} \Gamma^{-1})) \leq \\ e_x^T [P(A-KC) + (A-KC)^T P + \gamma^2 PP + I] e_x + \\ \frac{\sigma+1}{\sigma} e_f^T G e_f + \eta \leq \xi^T(t) \Phi \xi(t) + \eta \end{aligned} \quad (23)$$

其中:  $\xi(t) = [e_x^T(t), e_y^T(t)]$ ;

$$\eta = f_1^2 \lambda_{\max} (G^{-1}) + \frac{1}{\sigma} f_2^2 \lambda_{\max} (\Gamma^{-1} G^{-1} \Gamma^{-1});$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} P(A-KC) + (A-KC)^T P + \gamma^2 PP + I & 0 \\ 0 & \frac{\sigma+1}{\sigma} G \end{bmatrix}.$$

当  $\Phi < 0$  时, 若  $\sigma \|\xi(t)\|^2 > \eta$ , 可得  $\dot{V}(t) < 0$ 。

其中,  $\sigma = \lambda_{\min}(-\Phi)$ , 根据李亚普诺夫稳定性理论, 可得  $e_x(t)$  和  $e_f(t)$  逐渐收敛为  $0^{[17]}$ 。

值得注意的是, 式(15)和(16)不能用 MATLAB 中的 LMI toolbox 同时求解, 本文参考文献[18], 将式(16)转化为一个最小化问题去求解, 即

$$\begin{aligned} \text{minimize } & \delta \\ \text{s. t 式(15)和} & \begin{bmatrix} \delta I & F^T P - \frac{1}{\sigma} F_1 C \\ \left(F^T P - \frac{1}{\sigma} F_1 C\right)^T & \delta I \end{bmatrix} > 0. \end{aligned}$$

## 3 容错控制器设计

### 3.1 姿态子系统控制器设计

考虑姿态虚拟系统

$$\dot{\hat{\theta}} = \alpha_1 \quad (24)$$

式中:  $\hat{\theta} = [\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}]^T$ ;  $\alpha_1$  为虚拟控制量。

定义姿态跟踪误差  $e_1$  为

$$e_1 = \hat{\theta} - \theta_d + K_1 \int (\hat{\theta} - \theta_d) dt \quad (25)$$

式中:  $\theta_d = [\phi_d, \theta_d, \psi_d]^T$ ;  $K_1$  为正定对角矩阵。

选取 Lyapunov 函数

$$V_1(t) = \frac{1}{2} e_1^T e_1 \quad (26)$$

取  $V_1(t)$  对时间的导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = e_1^T \dot{e}_1 = e_1^T (\dot{\hat{\theta}} - \dot{\theta}_d + K_1(\hat{\theta} - \theta_d)) = \\ e_1^T (\alpha_1 - \dot{\theta}_d + K_1(\hat{\theta} - \theta_d)) \end{aligned} \quad (27)$$

为确保  $\dot{V}_1(t) < 0$  始终成立, 可得

$$\alpha_1 = -A_1 e_1 - K_1(\hat{\theta} - \theta_d) + \dot{\theta}_d \quad (28)$$

式中:  $A_1$  为正定对角矩阵。

选取滑模面为

$$\begin{aligned} e_2 = \alpha_1 - \dot{\hat{\theta}} = -A_1 e_1 - K_1(\hat{\theta} - \theta_d) + \dot{\theta}_d - \dot{\hat{\theta}} = \\ -A_1 e_1 - \dot{e}_1 = s_1 \end{aligned} \quad (29)$$

选取 Lyapunov 函数

$$V_2(t) = \frac{1}{2}(e_1^T e_1 + s_1^T s_1) \quad (30)$$

取  $V_2(t)$  对时间的导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & e_1^T \dot{e}_1 + s_1^T \dot{s}_1 = e_1^T (-A_1 e_1 - s_1) + \\ & s_1^T (\dot{\alpha}_1 - \ddot{\Theta}) = -e_1^T A_1 e_1 + \\ & s_1^T (A_1 (-A_1 e_1 - s_1) - K_1 (\dot{\Theta} - \dot{\Theta}_d) + \\ & \ddot{\Theta}_d - (\Theta(\hat{x}, t) + U_\Theta + f) + e_1) \end{aligned} \quad (31)$$

为了确保  $\dot{V}_2(t) < 0$  始终成立, 得到控制律为

$$\begin{aligned} U_\Theta = & A_1 (-A_1 e_1 - s_1) - K_1 (\dot{\Theta} - \dot{\Theta}_d) + \ddot{\Theta}_d - \\ & \Theta(\hat{x}, t) + e_1 - f + Q_1 s_1 \end{aligned} \quad (32)$$

式中:  $Q_1$  为正定对角矩阵。

考虑执行器故障情况, 结合上节所设计的故障自适应律, 得到姿态子系统容错控制律为

$$\begin{aligned} U_\Theta = & A_1 (-A_1 e_1 - s_1) - K_1 (\dot{\Theta} - \dot{\Theta}_d) + \ddot{\Theta}_d - \\ & \Theta(\hat{x}, t) + e_1 - \hat{f} + Q_1 s_1 \end{aligned} \quad (33)$$

**定理 2:** 对于四旋翼姿态子系统式(9), 将自适应律式(17)和控制律式(33)应用于姿态子系统式(9), 在执行器发生故障时, 姿态角仍能稳定跟踪期望信号。

**证明:** 由式(32), (34)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & e_1^T \dot{e}_1 + s_1^T \dot{s}_1 = e_1^T (-A_1 e_1 - s_1) + \\ & s_1^T (\dot{\alpha}_1 - \ddot{\Theta}) = -e_1^T A_1 e_1 + \\ & s_1^T (A_1 (-A_1 e_1 - s_1) - K_1 (\dot{\Theta} - \dot{\Theta}_d) + \\ & \ddot{\Theta}_d - (\Theta(\hat{x}, t) + U_\Theta + \hat{f}) + e_1) = \\ & -e_1^T A_1 e_1 - s_1^T Q_1 s_1 < 0, \forall e_1 \neq 0, s_1 \neq 0 \end{aligned} \quad (34)$$

因此, 采用本节所设计的控制律, 可以实现姿态子系统的稳定。

### 3.2 位置子系统控制器设计

首先, 考虑位置虚拟系统

$$\dot{P} = \alpha_3 \quad (35)$$

式中:  $P = [x, y, z]^T$ ;  $\alpha_3$  为虚拟控制量。

定义位置跟踪误差

$$e_3 = P - P_d + K_2 \int (P - P_d) dt \quad (36)$$

式中:  $P_d = [x_d, y_d, z_d]^T$ ;  $K_2$  为正定对角矩阵。

选取 Lyapunov 函数

$$V_3(t) = \frac{1}{2} e_3^T e_3 \quad (37)$$

取  $V_3(t)$  对时间的导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) = & e_3^T \dot{e}_3 = e_3^T (\dot{P} - \dot{P}_d + K_2 (P - P_d)) = \\ & e_3^T (\alpha_3 - \dot{P}_d + K_2 (P - P_d)) \end{aligned} \quad (38)$$

为了确保  $\dot{V}_3(t) < 0$  始终成立, 可得  $\alpha_3$  为

$$\alpha_3 = -A_2 e_3 - K_2 (P - P_d) + \dot{P}_d \quad (39)$$

式中:  $A_2$  为正定对角矩阵。

$$\dot{V}_3(t) = -e_3^T A_2 e_3 < 0 \quad (40)$$

选取滑模面为

$$\begin{aligned} e_4 = & \alpha_3 - \dot{P} = -A_2 e_3 - K_2 (P - P_d) + \\ & \dot{P}_d - \dot{P} = -A_2 e_3 - \dot{e}_3 = s_2 \end{aligned} \quad (41)$$

选取 Lyapunov 函数:

$$V_4(t) = \frac{1}{2}(e_3^T e_3 + s_2^T s_2) \quad (42)$$

取  $V_4(t)$  对时间的导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) = & e_3^T \dot{e}_3 + s_2^T \dot{s}_2 = e_3^T (-A_2 e_3 - s_2) + \\ & s_2^T (\dot{\alpha}_3 - \ddot{P}) = -e_3^T A_2 e_3 + \\ & s_2^T (A_2 (-A_2 e_3 - s_2) - K_2 (\dot{P} - \dot{P}_d) + \\ & \ddot{P}_d - (P(x, t) + U_P) + e_3) \end{aligned} \quad (43)$$

其中, 根据式(5), 可得:

$$\begin{aligned} U_P = & \begin{bmatrix} (C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi) U_4 \\ (C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi) U_4 \\ C_\phi C_\theta U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix}; \\ P(x, t) = & \begin{bmatrix} -a_7 \dot{x} \\ -a_8 \dot{y} \\ -g - a_9 \dot{z} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

为了确保  $\dot{V}_4(t) < 0$  始终成立, 得到控制律为

$$\begin{aligned} U_P = & A_2 (-A_2 e_3 - s_2) - K_2 (\dot{P} - \dot{P}_d) + \ddot{P}_d - \\ & P(x, t) + e_3 + Q_2 s_2 \end{aligned} \quad (44)$$

式中:  $Q_2$  为正定对角矩阵。

**定理 3:** 对于四旋翼位置子系统, 将虚拟控制律应用于位置子系统, 可使得位置子系统能跟踪上期望轨迹。

**证明:** 由式(43), (44)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) = & e_3^T \dot{e}_3 + s_2^T \dot{s}_2 = e_3^T (-A_2 e_3 - s_2) + \\ & s_2^T (\dot{\alpha}_3 - \ddot{P}) = -e_3^T A_2 e_3 + \\ & s_2^T (A_2 (-A_2 e_3 - s_2) - K_2 (\dot{P} - \dot{P}_d) + \\ & \ddot{P}_d - (P(x, t) + U_P) + e_3) = -e_3^T A_2 e_3 - \\ & s_2^T Q_2 s_2 < 0, \forall e_3 \neq 0, s_2 \neq 0 \end{aligned} \quad (45)$$

因此, 采用本节所设计的控制律式(44), 可以

实现位置子系统的稳定。

通过设计的姿态控制器，可实现  $\psi$  快速跟踪  $\psi_d$ ，因而利用虚拟控制量可以解出：

$$\begin{cases} U_4 = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2} \\ \phi_d = \arcsin\left(\frac{U_x \sin\psi_d - U_y \cos\psi_d}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}}\right) \\ \theta_d = \arctan\left(\frac{U_x \cos\psi_d + U_y \sin\psi_d}{U_z}\right) \end{cases} \quad (46)$$

式中： $\phi_d$  和  $\theta_d$  作为期望信号用于姿态控制器的设计； $U_4$  为位置子系统控制输入。需要注意的是，为了让  $U_4$  有解， $\psi_d$  需要满足  $(-\pi/2, \pi/2)$ 。

## 4 仿真

### 4.1 仿真参数

在 MATLAB/Simulink 平台上搭建一个四旋翼飞行器系统模型并进行仿真验证，其模型参数如表 1 所示。

表 1 四旋翼无人机模型参数  
Table 1 Parameters of quadrotor

参数	描述	数值
$m/\text{kg}$	四旋翼质量	2
$g/(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$	重力加速度	9.81
$l/\text{m}$	质心转轴距离	0.2
$\tau/(\text{N}\cdot\text{s}^2\cdot\text{rad}^{-2})$	扭矩系数	$1.15\times 10^{-7}$
$\kappa/(\text{N}\cdot\text{s}^2\cdot\text{rad}^{-2})$	拉力系数	$2.98\times 10^{-6}$
$I_x, I_y/(\text{N}\cdot\text{s}^2\cdot\text{rad}^{-1})$	$x, y$ 轴转动惯量	1.25
$I_z/(\text{N}\cdot\text{s}^2\cdot\text{rad}^{-1})$	$z$ 轴转动惯量	2.5
$k_x, k_y, k_z/(\text{N}\cdot\text{s}^2\cdot\text{rad}^{-1})$	空气阻力系数	0.01
$k_\phi, k_\theta, k_\psi/(\text{N}\cdot\text{s}^2\cdot\text{rad}^{-1})$	气动阻力系数	0.012

由式(9)可知( $A, C$ )是可观测而且  $g(x, t)$  是连续可微的，所以满足假设 1 和假设 2。因此，所提出的观测器方案是可行的。自适应观测器需要的矩阵及控制器的参数设计：

$$K = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 104.9 & 0.04 & 0.04 & -0.15 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 104.9 & 0.04 & 0.04 & -0.15 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 104.9 & 0.04 & 0.04 & -0.15 \\ -0.15 & 0.04 & 0.04 & 104.9 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & -0.15 & 0.04 & 0.04 & 104.9 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & -0.15 & 0.04 & 0.04 & 104.9 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} -0.072 & 0.02 & 0.02 & -50.45 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.067 & 0.02 & 0.02 & -46.37 & 0.02 \\ 0.01 & 0.01 & -0.064 & 0.01 & 0.01 & -3.963 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = 0.005\text{diag}(1, 1, 1), G = 100 \times I_{6 \times 6},$$

$$K_1 = 10I_{3 \times 3}, K_2 = 0.5I_{3 \times 3}, A_1 = 1.5I_{3 \times 3},$$

$$A_2 = 10I_{3 \times 3}, Q_1 = 10I_{3 \times 3}, Q_2 = 35I_{3 \times 3}.$$

### 4.2 仿真结果与分析

在仿真实验中，四旋翼无人机的期望轨迹为  $x_d = \sin t$ ， $y_d = \cos t$ ， $z_d = 3t$ ；偏航角期望信号为  $\psi_d = \sin t$ ；仿真中位置和姿态的初始值设置为  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ， $\phi_0 = \theta_0 = \psi_0 = 0$ 。

#### 4.2.1 执行器无故障情况下的跟踪控制

本节侧重考虑执行器无故障情况下四旋翼飞行器的跟踪控制，通过仿真验证控制器的稳定性以及控制性能。此外，为了体现本文所设计的控制策略的优越性，与文献[19]中的传统 SMC 方法进行了对比。由图 2~4 可知，对于姿态子系统，当系统未发生故障时，本文所设计的积分反演滑模控制器能够在 2 s 内保证  $\phi, \theta$  跟踪上期望信号，而传统 SMC 虽然也能够较快跟踪上  $\phi, \theta$  期望信号，但是初始时刻跟踪误差较大。对于位置子系统，设计与姿态子系统相同的控制器，由图 5~7 可知，IBS-SMC 也能够使得位置  $x, y, z$  快速跟踪上期望位置信号，虽然位置  $y$  在初始时并未跟踪上  $y_d$ ，但是 IBS-SMC 使得位置  $y$  在 0.5 s 内跟踪上期望信号，而传统 SMC 需要约 1 s。从图 8 可知，位置轨迹在初始时并未跟踪上期望轨迹，但是在 IBS-SMC 的作用下位置轨迹也能够 0.5 s 左右跟踪上期望轨迹，比传统 SMC 快 1.5 s 左右。



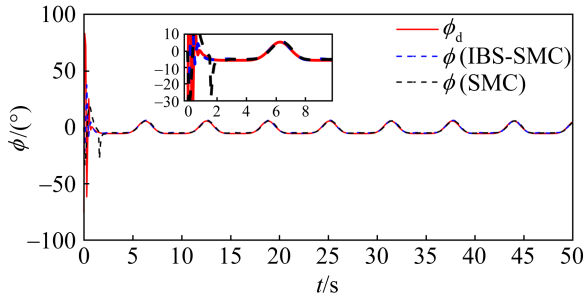


图 2 横滚角  $\phi$  跟踪曲线  
Fig. 2 Roll tracking curves

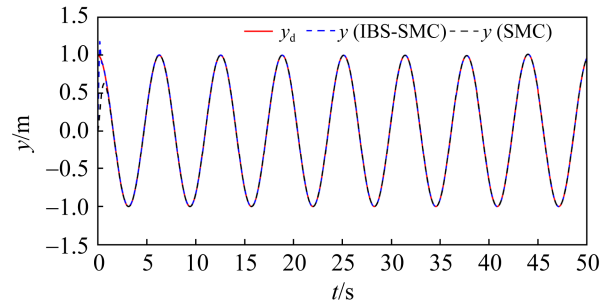


图 6 位置  $y$  跟踪曲线  
Fig. 6 Position  $y$  tracking curves

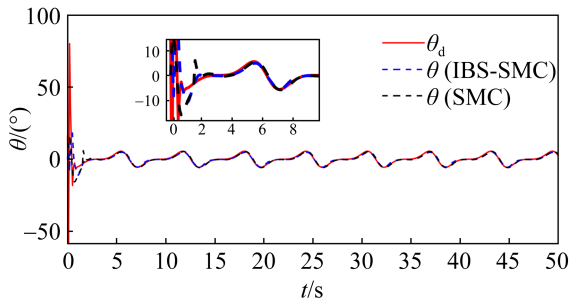


图 3 俯仰角  $\theta$  跟踪曲线  
Fig. 3 Pitch tracking curves

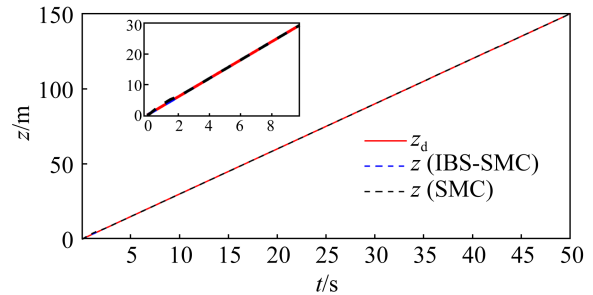


图 7 位置  $z$  跟踪曲线  
Fig. 7 Position  $z$  tracking curves

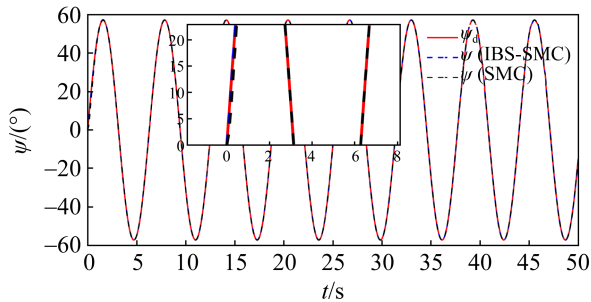


图 4 偏航角  $\psi$  跟踪曲线  
Fig. 4 Yaw tracking curves

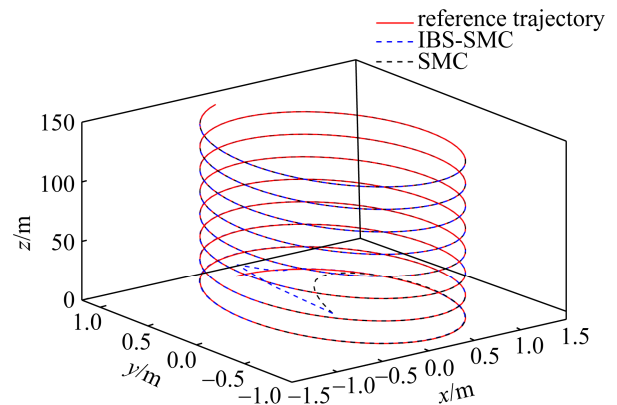


图 8 位置轨迹跟踪曲线  
Fig. 8 Position trajectory tracking curve

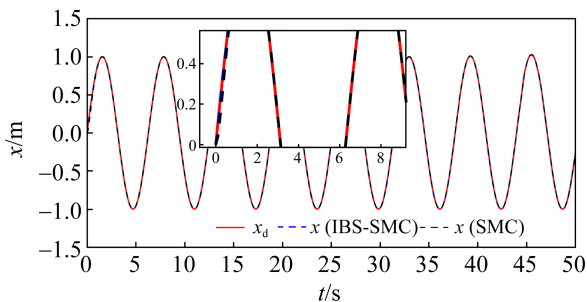


图 5 位置  $x$  跟踪曲线  
Fig. 5 Position  $x$  tracking curves

#### 4.2.2 执行器故障情况下的跟踪控制

为了不失一般性, 本文考虑执行器在  $t=15$  s 时发生不同形式的时变故障。曲线图如图 9~11 所示。

$$f_{\phi} = \begin{cases} 0, t \in [0, 15) \\ 4 \times (1 - e^{-0.1 \times (t-15)}), t \geq 15 \end{cases}$$

$$f_{\theta} = \begin{cases} 0, t \in [0, 15) \\ 3 + \sin t, t \geq 15 \end{cases}$$

$$f_{\psi} = \begin{cases} 0, t \in [0, 15) \\ 3 + \cos t, t \geq 15 \end{cases}$$

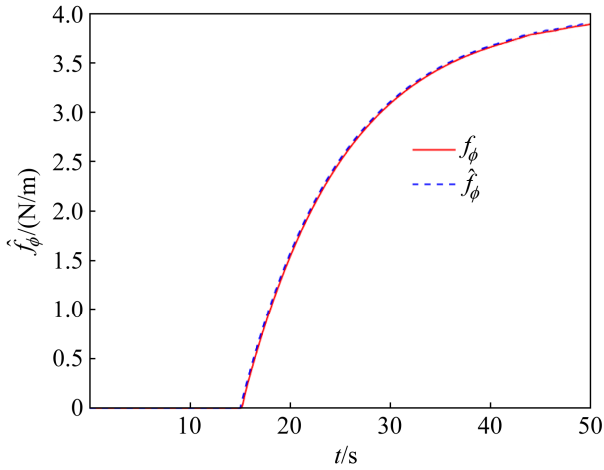


图9 故障 $f_\phi$ 的估计曲线  
Fig. 9 Estimation curve of  $f_\phi$

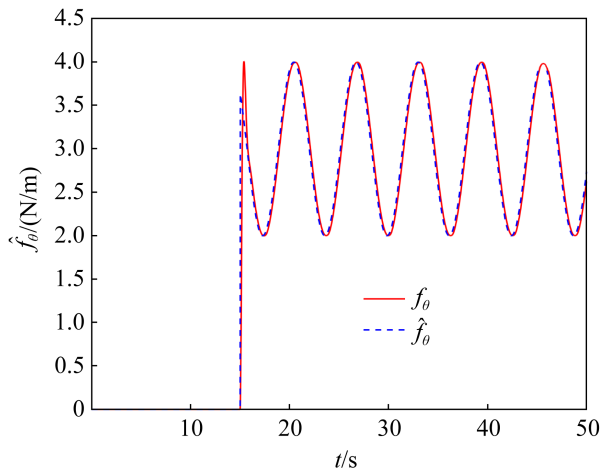


图10 故障 $f_\theta$ 的估计曲线  
Fig. 10 Estimation curve of  $f_\theta$

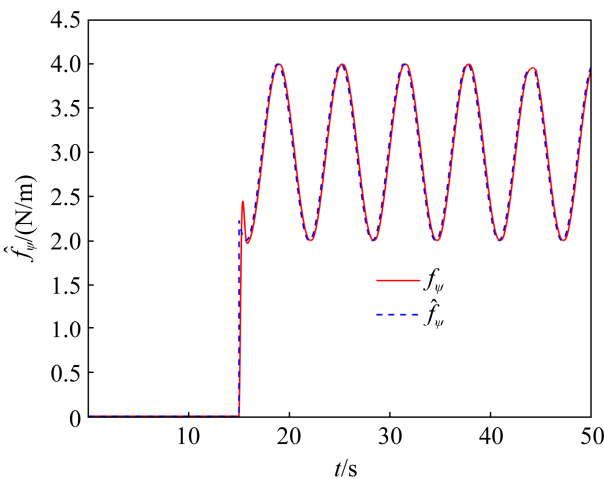


图11 故障 $f_\psi$ 的估计曲线  
Fig. 11 Estimation curve of  $f_\psi$

图9~11可知,当执行器在 $t=15\text{ s}$ 时发生故障,初始时观测器估计误差较大,但观测器能够在故障发生2 s内收敛到真实值附近,证明了该观测器对时变的执行器偏差故障的有效性;由图12~14可知,对于姿态子系统,在 $t=15\text{ s}$ 后,姿态角 $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ 的跟踪曲线与期望曲线偏离幅度较大,但是3 s内,在姿态容错控制器作用下,能够保证姿态子系统仍能保持良好的跟踪性能;对于位置子系统,由于四旋翼飞行器系统的耦合作用,飞行器的位置会受到姿态角的影响,由图15~16可知,当姿态子系统发生故障时,位置子系统的IBS-SMC仍然能够保证 $x, y, z$ 快速跟踪期望位置信号。

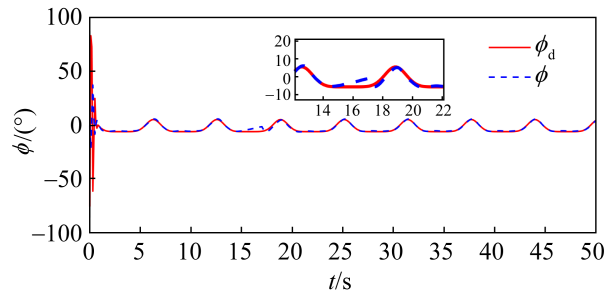


图12 执行器故障下的横滚角 $\phi$ 跟踪曲线  
Fig. 12 Roll angle tracking curves under actuator fault

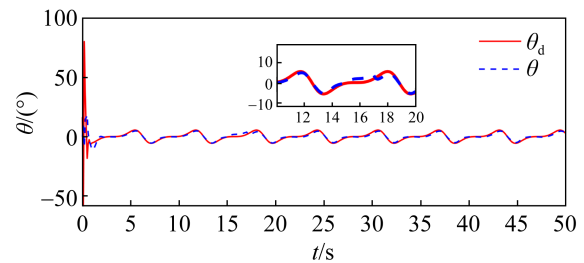


图13 执行器故障下的俯仰角 $\theta$ 跟踪曲线  
Fig. 13 Pitch angle tracking curves under actuator fault

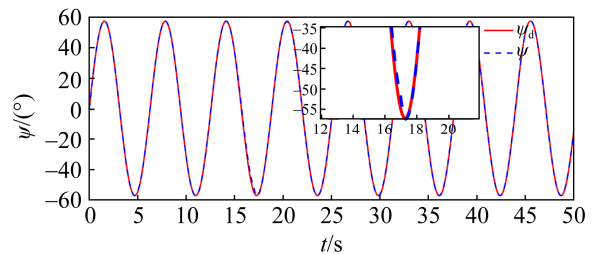


图14 执行器故障下的偏航角 $\psi$ 跟踪曲线  
Fig. 14 Yaw angle tracking curves under actuator fault

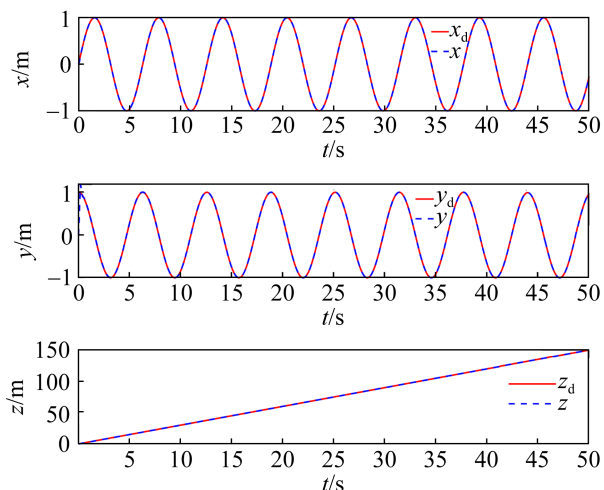


图 15 执行器故障下的位置跟踪曲线  
Fig. 15 Position tracking curves under actuator fault

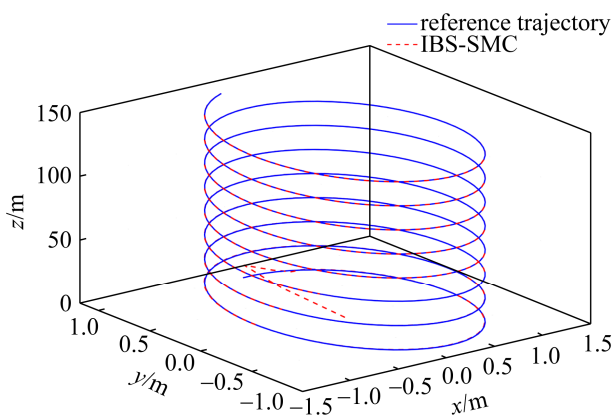


图 16 执行器故障下的位置轨迹跟踪曲线  
Fig. 16 Position trajectory tracking curve under actuator fault

## 5 结论

本文以四旋翼飞行器为对象, 采用双闭环的策略, 根据观测器获取的信息, 分别对姿态和位置子系统设计控制器, 实现四旋翼姿态及位置的稳定控制。本文所设计的自适应观测器来观测系统状态以及故障估计, 并将观测的信息应用于姿态容错控制器的设计。在姿态和位置控制器上都采用了积分反演与 SMC 相结合的方法, 不仅有效避免控制输入的不连续性和传统 SMC 的抖振, 也解决了欠驱动系统设计的问题, 保证系统能够渐近跟踪期望信号。在现有的研究基础上, 将在今后的工作中考虑多执行器故障同时发生的容错问题。

## 参考文献:

- [1] Menouar H, Guvenc I, Akkaya K, et al. UAV-Enabled Intelligent Transportation Systems for the Smart City: Applications and Challenges[J]. IEEE Communications Magazine (S0163-6804), 2017, 55(3): 22-28.
- [2] Zhang Y M, Chamseddine A, Rabbath C A, et al. Development of Advanced FDD and FTC Techniques with Application to an Unmanned Quadrotor Helicopter Testbed[J]. Journal of the Franklin Institute (S0016-0032), 2013, 350(9): 2396-2422.
- [3] 张鑫, 李嘉欣. 基于分数阶微积分的机械臂滑模控制的研究[J]. 系统仿真学报, 2020, 32(5): 911-917.  
Zhang Xin, Li Jiabin. Research on Sliding Mode Control of Robotic Arm Based on Fractional Calculus[J]. Journal of System Simulation, 2020, 32(5): 911-917.
- [4] 刘锦涛, 吴文海, 李静, 等. 四旋翼无人机 SO(3)滑模变结构姿态控制器设计[J]. 控制与决策, 2016, 31(6): 1057-1064.  
Liu Jintao, Wu Wenhai, Li Jing, et al. Sliding Mode Variable Structure Attitude Controller Design of Quadrotor UAVs on SO(3)[J]. Control and Decision, 2016, 31(6): 1057-1064.
- [5] Li S, Wang Y, Tan J, et al. Adaptive RBFNNs/Integral Sliding Mode Control for a Quadrotor Aircraft[J]. Neurocomputing (S0925-2312), 2016, 216(5): 126-134.
- [6] Kaddouri D, Mokhtari A, Abdelaziz B. Attitude Optimal Backstepping Controller Based Quaternion for a UAV[J]. Mathematical Problems in Engineering (S1024-123X), 2016(4): 1-11.
- [7] 周楠, 王亮, 艾剑良. 基于反步法的矢量推力旋翼机建模及仿真研究[J]. 系统仿真学报, 2020, 32(6): 1117-1125.  
Zhou Nan, Wang Liang, Ai Jianliang. Modeling and Simulation of Quadrotor UAV with Vector Thrust Based on Backstepping[J]. Journal of System Simulation, 2020, 32(6): 1117-1125.
- [8] Labbadi M, Cherkaoui M. Robust Adaptive Backstepping Fast Terminal Sliding Mode Controller for Uncertain Quadrotor UAV[J]. Aerospace Science and Technology (S1270-9638), 2019, 93: 105306.
- [9] Jia Z Y, Yu J Q, Mei Y S, et al. Integral Backstepping Sliding Mode Control for Quadrotor Helicopter under External Uncertain Disturbances[J]. Aerospace Science and Technology (S1270-9638), 2017, 68: 299-307.
- [10] 刘慧博, 刘尚磊. 基于干扰补偿和微分器的转台反演滑模控制[J]. 系统仿真学报, 2018, 30(4): 1593-1600.  
Liu Huibo, Liu Shanglei. Sliding Backstepping Mode

- Control for Flight Simulator Servo Based on Disturbance Compensation and Differentiator[J]. *Journal of System Simulation*, 2018, 30(4): 1593-1600.
- [11] Hou Z W, Lu P, Tu Z J. Nonsingular Terminal Sliding Mode Control for a Quadrotor UAV with a Total Rotor Failure[J]. *Aerospace Science and Technology(S1270-9638)*, 2020, 98: 105716.
- [12] Wang B, Yu X, Mu L X, et al. Disturbance Observer-based Adaptive Fault-Tolerant Control for a Quadrotor Helicopter subject to Parametric Uncertainties and External Disturbances[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing (S0888-3270)*, 2019, 120: 727-743.
- [13] Chen F Y, Zhang K K, Jiang B, et al. Adaptive Sliding Mode Observer-Based Robust Fault Reconstruction for a Helicopter with Actuator Fault[J]. *Asian Journal of Control (S1561-8625)*, 2016, 18(4): 1558-1565.
- [14] Ma H J, Liu Y L, Li T B, et al. Nonlinear High-Gain Observer-Based Diagnosis and Compensation for Actuator and Sensor Faults in a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics (S1551-3203)*, 2019, 15(1): 550-562.
- [15] Fethalla N, Saad M, Michalska H, et al. Robust Observer-Based Dynamic Sliding Mode Controller for a Quadrotor UAV[J]. *IEEE Access (S2169-3536)*, 2018, 6: 45846-45859.
- [16] Zhang K, Jiang B, Shi P, et al. Observer-Based Fault Estimation Techniques[M]. Heidelberg: Springer, 2017: 147.
- [17] Zhang K K, Jiang B, Cocquempot V. Adaptive Observer-Based Fast Fault Estimation[J]. *International Journal of Control Automation and Systems (S1598-6446)*, 2008, 6(3): 320-326.
- [18] Corless M, Tu J. State and Input Estimation for a Class of Uncertain Systems[J]. *Automatica (S0005-1098)*, 1998, 34(6): 757-764.
- [19] 刘金琨. 滑模变结构控制 MATLAB 仿真[M]. 3 版. 北京: 清华大学出版社, 2015: 34-38.
- Liu Jinkun. Sliding Mode Control and MATLAB Simulation[M]. 3rd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2015: 34-38.