

1-14-2022

## Autonomous Vehicle Path Tracking Control System Based on Energy Optimization

Xiaolong Wu

1. *School of Vehicle Engineering, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China;;*

Fugen Xia

2. *Chengdu Yiwei New Energy Automobile Co., Ltd., Chengdu 610015, China;*

Chen Jing

1. *School of Vehicle Engineering, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China;;*

Xu Jia

1. *School of Vehicle Engineering, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China;;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

# Autonomous Vehicle Path Tracking Control System Based on Energy Optimization

## Abstract

**Abstract:** Powertrain control is important to the dynamic performance and economy of driverless cars and a *path following control strategy based on energy optimization is proposed. The control strategy includes two parts. The nonlinear model predictive control is used in the upper controller to calculate the required power parameters and front wheel angle. The lower-level controller is designed based on the optimal value of motor energy consumption which ensure the motor being always running at the optimal state of efficiency. In addition, the continuously variable transmission (CVT) is dynamically adjusted according to the motor state to meet the vehicle power demand.* The simulation results show that the control scheme has good tracking performance and energy saving potential.

## Keywords

autonomous vehicle, powertrain system, path following control, numerical optimization, continuously variable transmission

## Recommended Citation

Wu Xiaolong, Xia Fugen, Chen Jing, Xu Jia. Autonomous Vehicle Path Tracking Control System Based on Energy Optimization[J]. Journal of System Simulation, 2022, 34(1): 163-169.

# 基于能量最优的无人驾驶汽车路径跟踪控制

吴小龙<sup>1</sup>, 夏甫根<sup>2</sup>, 陈静<sup>1</sup>, 徐佳<sup>1</sup>

(1. 重庆理工大学 车辆工程学院, 重庆 400054; 2. 成都壹为新能源汽车有限公司, 四川 成都 611730)

**摘要:** 动力总成控制对无人驾驶汽车的动态性能和经济性起着重要的作用。为了提高车辆在路径跟踪过程中的动力性和经济性, 提出了一种基于能量最优化的路径跟踪控制策略。控制策略分为两部分, 在上层控制器中使用非线性模型预测控制来计算所需要的动力参数和前轮转角。下层控制器采用基于电机能耗数值最优的方法进行设计。该方法可以确保电机一直运行在效率最优状态, 并可根据电机状态动态调节无级变速器以满足车辆动力需求。仿真结果表明, 控制方案具有良好的跟踪性能和节能潜力。

**关键词:** 无人驾驶汽车; 动力总成系统; 路径跟踪控制; 数值优化; 无级变速器

中图分类号: TP391; U463 文献标志码: A 文章编号: 1004-731X (2022) 01-0163-07

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.20-0655

## Autonomous Vehicle Path Tracking Control System Based on Energy Optimization

Wu Xiaolong<sup>1</sup>, Xia Fugen<sup>2</sup>, Chen Jing<sup>1</sup>, Xu Jia<sup>1</sup>

(1. School of Vehicle Engineering, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China;

2. Chengdu Yiwei New Energy Automobile Co., Ltd., Chengdu 610015, China)

**Abstract:** Powertrain control is important to the dynamic performance and economy of driverless cars and a path following control strategy based on energy optimization is proposed. The control strategy includes two parts. The nonlinear model predictive control is used in the upper controller to calculate the required power parameters and front wheel angle. The lower-level controller is designed based on the optimal value of motor energy consumption which ensure the motor being always running at the optimal state of efficiency. In addition, the continuously variable transmission (CVT) is dynamically adjusted according to the motor state to meet the vehicle power demand. The simulation results show that the control scheme has good tracking performance and energy saving potential.

**Keywords:** autonomous vehicle; powertrain system; path following control; numerical optimization; continuously variable transmission

## 引言

全球许多大学、汽车公司与汽车供应商都在研究和开发无人驾驶汽车<sup>[1]</sup>。无人驾驶与人类驾驶相比可以提高安全性, 减少交通事故, 提高能源效率和舒适度<sup>[2-3]</sup>。

随着无人驾驶汽车的发展, 其控制体系结构和

控制算法也在不断的改进和完善<sup>[4-6]</sup>。车辆在跟踪参考路径行驶时, 为提高车辆的经济性, 需要使用不同的节能方法。Daoud M A<sup>[7]</sup>提出了双目标非线性模型预测控制(nonlinear model predictive control, NMPC)的路径跟踪控制方法。该方法使用管制部分和经济部分组成的双目标成本函数, 在考虑车辆跟踪情况下也考虑车辆的能量消耗; Sajadi-

收稿日期: 2020-09-03

修回日期: 2020-11-16

基金项目: 四川省科技厅重点研发项目(2019YFG0528)

第一作者: 吴小龙(1994-), 男, 硕士生, 研究方向为新能源传动系统控制。E-mail: wuxlong@2018.cqut.edu.cn

Alamdari S A<sup>[8]</sup>改进了实时非线性模型预测控制。通过利用道路坡度,有效绕弯行驶以及遵守交通法规,以节能的方式控制 EV(electric vehicle)的纵向速度。通过实车实验验证了电动汽车的续航能力。Ma<sup>[9]</sup>提出了基于 NMPC 的生态系统自适应巡航控制方法。NMPC 的成本函数包含速度、偏差和能耗。Ma 使用 V2V 拓扑通信结构在车间通信,使能量消耗最小。基于一种非线性预测控制扩展生态巡航控制的方法被提出。该方法考虑交通和道路几何信息,为未来行驶计算出最佳的控制。仿真结果表明控制算法可显著降低电动汽车的能耗<sup>[10]</sup>。

上述方法都是通过将能量消耗项添加到成本函数中以减少车辆能量消耗,并没有完全挖掘出车辆节能潜力。所以,搭载无级变速器(continuously variable transmission, CVT)的传动系统能够极大地提高车辆动力系统效率,以减少车辆的能耗<sup>[11-12]</sup>。因为无级变速器可以通过改变传动比使电机或发动机一直运行在高效率工作区间<sup>[13]</sup>。

本文以电动无人驾驶汽车为例,建立了运动自行车模型和电机能耗模型,提出了基于能量最优化的路径跟踪控制策略, NMPC 在上位控制器中计算车辆所需要的加速度和前轮转角,在下位控制器中,使用电机能耗数值最优算法计算出电机输出转矩和转速,再根据电机状态调节无级变速器以满足跟踪动力需求。

## 1 运动自行车模型

使用自行车模型进行建模<sup>[14]</sup>,将汽车建模成质量为  $m$  的刚体,将四轮汽车简化为自行车,那么车辆动力学可以简写为

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

式中:  $\dot{x}(t) \in R^n$  为系统的状态变量,  $n$  为状态变量数目;  $u(t) \in R^k$  为输入变量,  $k$  为控制变量数目。

图 1 是运动自行车模型图,模型包含 4 个主要车辆状态变量,惯性坐标系内的横向和纵向坐标、偏航角和车辆速度:

$$\dot{x}(t) = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi}, \dot{v}]$$

$$u(t) = [\delta_f, a_x]$$

式中:  $\delta_f$  为前轮转向角;  $a_x$  为车辆坐标系下  $x$  轴方向加速度。

运动自行车模型图的运动学方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos(\psi + \beta) \\ \dot{y} = v \sin(\psi + \beta) \\ \dot{\psi} = \frac{v}{l_r} \sin \beta \\ \dot{v} = a_x \cos \beta \\ \beta = \arctan\left(\frac{l_r}{l_f + l_r} \tan \delta_f\right) \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $l_f$  和  $l_r$  为距离车辆重心到前轮与后轮的距离;  $\beta$  为车辆速度相对于车辆纵轴的夹角。本文假设车辆后轮无法转向,设定  $\delta_r=0$ 。

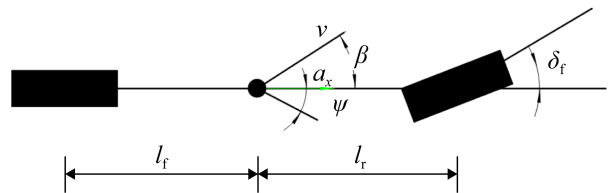


图 1 自行车模型  
Fig. 1 Bicycle model

为了提高模型预测精度,采用四阶龙格库塔方法建立离散运动学模型,它能使用较小的计算量提供较高的模型离散精度<sup>[15]</sup>。

## 2 能量消耗模型

### 2.1 车辆纵向能耗模型

车辆在运行过程中横向能源消耗相对于纵向能源消耗可以忽略<sup>[16]</sup>。本文仅对其纵向能耗建立动力学模型,其中电机需求转矩为

$$T_{mr} = \frac{r}{i_c i_f} (m a_x + m g C_R + \frac{1}{2} \rho C_d A v^2 + m g \sin \theta) \quad (3)$$

式中:  $T_{mr}$  为电机需求转矩;  $r$  为轮胎半径;  $i_f$  为主传动比;  $\theta$  为坡道路面与路面夹角;  $i_c$  为无级变速器(CVT)传动比;  $m$  为车辆质量;  $g$  为重力加速度;  $C_R$  为滚动阻力;  $\rho$  为空气密度;  $C_d$  为空气阻力系

数;  $A$  为车辆迎风面积;  $v$  为车辆纵向速度。车辆速度  $v$  与电机需求转速  $\omega_{mr}$  转换关系为

$$\omega_{mr} = \frac{30i_c i_f v}{\pi r} \quad (4)$$

因此可得到车辆纵向需求功率为

$$P_{mr} = T_{mr} \omega_{mr} \quad (5)$$

### 2.2 电机能耗模型

电机运行过程中总功率为电机输出功率与电机损耗。损耗主要由铜损 ( $\propto T_m^2$ )、铁损 ( $\propto \omega_m^2$ )、轴承损耗和风阻损耗 ( $\propto \omega_m^3$ ) 组成<sup>[17]</sup>。使用 2 或 3 量级的系数足以准确描述不同损耗项<sup>[18]</sup>。

Pourabdollah M 等<sup>[19-20]</sup>使用此原理对永磁同步电机能耗进行拟合, 得到了满意效果。电机输入功率为

$$P_{in}(T_{out}(t), \omega_{out}(t)) = T_{out}(t)\omega_{out}(t) + a_1 T_{out}(t)^2 + a_2 \omega_{out}(t) + a_3 \omega_{out}(t)^2 + a_4 \quad (6)$$

式中:  $T_{out}(t)$  为电机在  $t$  时刻输出扭矩;  $\omega_{out}(t)$  为电机在  $t$  时刻输出转速;  $a_i$  为各项损耗系数。电机的输出功率为  $P_{out} = T(t)_{out} \omega(t)_{out}$ , 电机效率  $\eta_m(t)$  计算等式如下。

$$\eta_m(t) = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{T(t)_{out} \cdot \omega(t)_{out}}{P_m(T(t)_{out}, \omega(t)_{out})} \quad (7)$$

本文使用 MATLAB 曲线拟合工具箱(cftool)对 40 kW 电机能耗数据处理后进行多项式拟合, 得到电机输入功率函数  $P_{in}$ , 通过式(7)计算出拟合电机的效率如图 2 所示, 实际 40 kW 电机效率如图 3

所示。对比可以发现电机拟合多项式能够很好地反映出电机效率工作区的分布趋势。

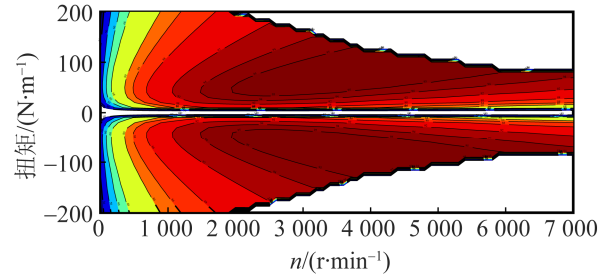


图 2 拟合电机效率图  
Fig. 2 Fitted motor efficiency diagram

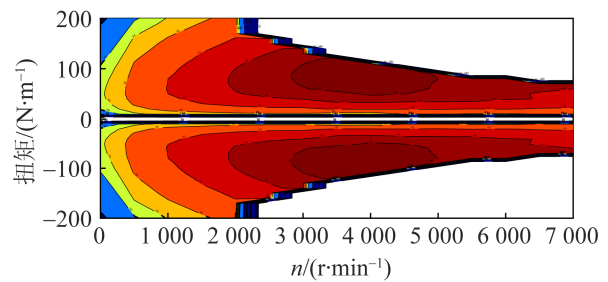


图 3 40 kW 电机效率图  
Fig. 3 40 kW motor efficiency diagram

### 3 能量最优化路径跟踪控制算法

能量最优路径跟踪控制分为两个部分: ①路径跟踪控制器根据跟踪目标计算出车辆前轮转角和车辆加速度; ②动力总成控制根据动力需求计算出电机最优工作点与相应的 CVT 传动比, 其总体控制架构如图 4 所示。

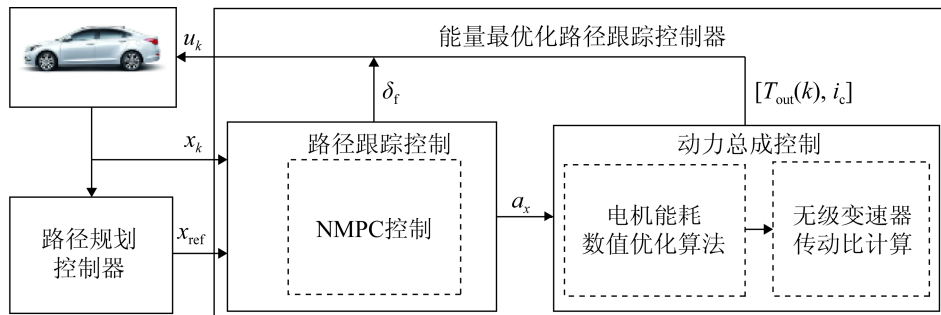


图 4 总体控制架构  
Fig. 4 Overall control architecture

### 3.1 路径跟踪控制

基于 NMPC 的路径跟踪控制问题可以表示为式(8)。目标函数在满足状态约束与控制变量约束的条件下求解出最优控制变量<sup>[21]</sup>。

$$\begin{aligned} \min_U J &= \sum_{k=0}^N \|x_{\text{ref}} - x_k\|_Q^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \|u_{\text{ref}} - u_k\|_R^2 \\ \text{s.t. } X_{K+1} &= f_d(X_{K-1}, U_K) \\ \Delta U_{\min} &\leq \Delta U \leq \Delta U_{\max} \\ U_{\min} &\leq U \leq U_{\max} \\ X_{\min} &\leq X \leq X_{\max} \end{aligned} \quad (8)$$

式中： $J$  为目标函数； $x_{\text{ref}}$  为参考状态变量； $x_k$  为  $k$  时刻的状态变量； $u_k$  为  $k$  时刻的控制变量； $U_{\min}$  与  $U_{\max}$  为控制变量的最小与最大边界； $\Delta u$  为控制变量的变化值； $\Delta U_{\min}$  与  $\Delta U_{\max}$  为控制变量变化的最小与最大边界； $X_{\min}$  和  $X_{\max}$  为状态变量的最小与最大边界； $Q$  和  $R$  为误差权重。

### 3.2 动力总成控制

#### 3.2.1 电机能耗数值最优算法

路径跟踪控制的每一次迭代会得到控制变量  $u$ 。提取第一个控制变量  $u_0$ ，用式(3)~(4)计算出电机需求转矩和转速。建立以电机输入功率函数  $P_{\text{in}}$  为目标函数的数值优化算法<sup>[22]</sup>：

$$\begin{aligned} \min_{T_{\text{out}}(t), \omega_{\text{out}}(t)} & P_{\text{in}}(T_{\text{out}}(t), \omega_{\text{out}}(t)) \\ T_{\text{lb}} &\leq T_{\text{out}} \leq T_{\text{ub}} \\ \text{subject to: } & \omega_{\text{lb}} \leq \omega_{\text{out}} \leq \omega_{\text{ub}} \\ T_{\text{out}}(t)\omega_{\text{out}}(t) - T_{\text{mr}}(t)\omega_{\text{mr}}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

式中： $T_{\text{lb}}$ ， $T_{\text{ub}}$  为电机扭矩最小值与最大值； $\omega_{\text{lb}}$  为电机转速最小值； $\omega_{\text{ub}}$  为电机转速最大值。

#### 3.2.2 变速比计算

通过电机能耗数值最优算法得到  $T_{\text{out}}(t)$ ， $\omega_{\text{out}}(t)$  为电机效率最高扭矩与转速。需要通过 CVT 调节使其满足车辆需求扭矩  $T_{\text{mr}}$ 。因此传动比为

$$i_c = \omega_{\text{out}} / \omega_{\text{mr}} \quad (10)$$

## 4 动态仿真实验

### 4.1 仿真配置

使用 MATLAB/Simulink 搭建车辆动力学模型与控制器，使用 CasADI<sup>[23]</sup>与 IPOPT<sup>[24]</sup>对控制算法进行求解。所有仿真都是在配备为 Intel Core i5-7300HQ 2.5 GHz 处理器，16 G RAM。64-b Windows 10 系统进行仿真实验环境。

### 4.2 交通场景建立

选择重庆市巴南区红光大道道路作为研究对象。图 5 显示了该道路的高精度地图。道路是四车道，长度约 3 000 m。本文没考虑交通信号灯、行驶车辆、天气和行人对车辆的影响。导入高精度地图数据到 MATLAB/Driving Scenario Designer 模块中构建测试道路，如图 6 所示。

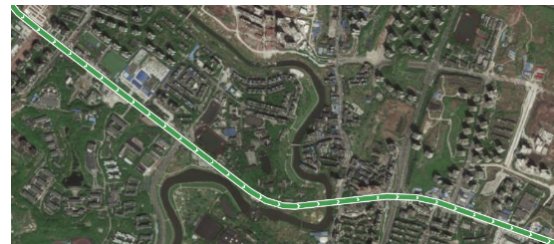


图 5 实验道路高精地图  
Fig. 5 Test road high-precision map

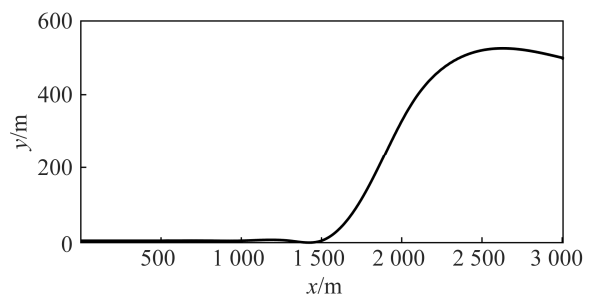


图 6 测试虚拟道路  
Fig. 6 Test virtual road

### 4.3 仿真参数设置

研究表明 200 ms 离散化的运动学模型与动力学模型具有相似的精度<sup>[25]</sup>。为了提高模型精度，设置控制器采样时间  $t=0.2$  s，预测步长  $N=10$ ，仿真车辆主要参数如表 1 所示。设置 NMPC 误差权重

$Q = \text{diag}(50, 50, 10, 20)$ ,  $R = \text{diag}(20, 20)$ , 设置各个状态变量约束不等式如下:

$$\begin{cases} -0.5 \text{ rad/s} \leq \delta_f \leq 0.5 \text{ rad/s} \\ -5 \text{ m/s}^2 \leq a_x \leq 5 \text{ m/s}^2 \\ -0.1 \text{ rad/s} \leq \Delta\delta_f \leq 0.1 \text{ rad/s} \\ -2 \text{ m/s}^2 \leq \Delta a_x \leq 2 \text{ m/s}^2 \end{cases} \quad (11)$$

表 1 仿真车辆主要参数

Table 1 Main parameters of simulated vehicles

序号	主要参数	量值
1	前轴距离/m	1.2
2	后轴距离/m	1.6
3	车辆质量/kg	1 575
4	车轮半径/m	0.364
5	滚动阻力系数	0.015
6	空气阻力系数	0.4
7	空气密度/(kg/m <sup>3</sup> )	1.2
8	车辆迎风面积/m <sup>2</sup>	2
9	主传动比	6
10	CVT 传动比	0.5~2.5

#### 4.4 仿真分析

通过仿真研究了控制器的路径跟踪和能量优化控制性能。图 7 显示了车辆位置跟踪, 在直线跟踪时表现了很好的跟踪性能, 进入弯道跟踪时位置偏差控制在 0.2 m 以下, 相对于汽车尺寸较小, 车辆跟踪行驶路径接近参考路径, 从而表明了路径跟踪的有效性。图 8 显示了车辆速度跟踪, 车辆在高速行驶并且瞬时加速较大时误差控制在 0.5 m/s 以下, 在低速跟踪和瞬时加速较小时跟踪效果较好, 表明了速度跟踪的有效性。

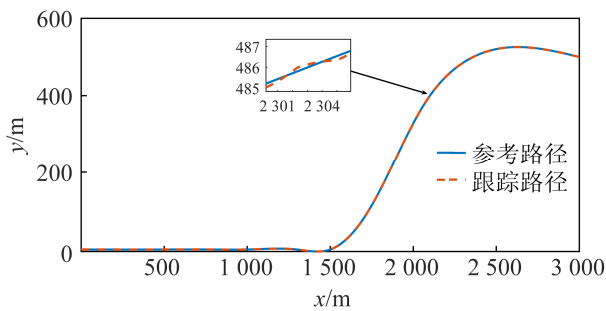


图 7 非时间参考的路径跟踪仿真

Fig. 7 Non-time-referenced path tracking simulation

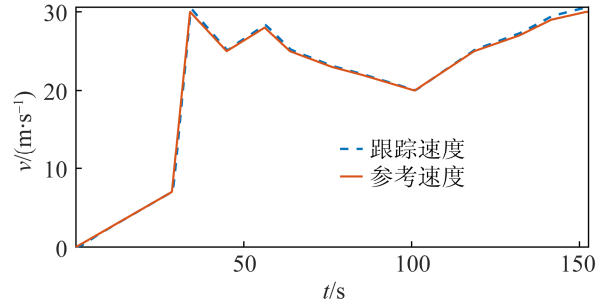


图 8 速度跟踪

Fig. 8 Speed tracking

图 9 展现了车辆在跟踪过程中电机的最优工作点。电机能耗数值最优控制算法根据需求功率调节电机工作状态使其工作在效率最高点。从图 9 可以看出, 工作点是沿着电机效率最高曲线分布, 表明了控制器的有效性。图 10 展现了在跟踪过程中 CVT 根据电机工作状态实时调节传动比, 使动力系统输出满足车辆动力需求, 仿真开始时车辆动力需求较大变速器的传动比为最高, 后面随着需求动力的降低变速器的传动比逐渐下降, 表明了 CVT 控制的有效性。

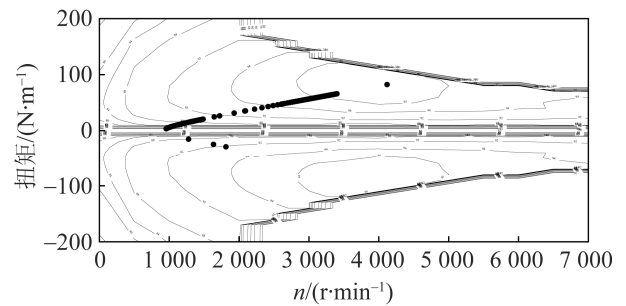


图 9 电机工作点

Fig. 9 Motor operating point

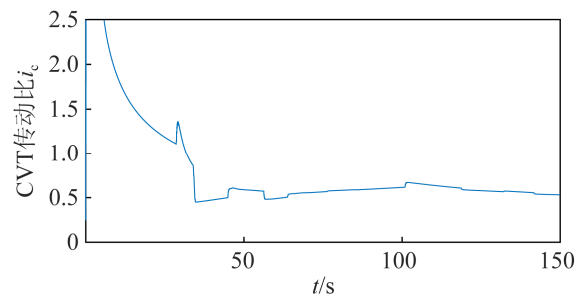


图 10 无级变速器传动比

Fig. 10 CVT ratio

## 5 结论

针对无人驾驶车辆路径跟踪和能量优化问题,提出了一种基于能量最优的路径跟踪控制策略,从而解决了无人驾驶汽车在满足路径跟踪控制的同时使车辆耗能最小的难题。通过仿真实验结果可得,所设计的控制算法能够有效的满足路径跟踪精度,同时使电机工作在效率最高的工作点以达到节能的目的。

设计的控制策略与之前的车辆跟踪算法相比考虑到了车辆在路径跟踪过程中的能量优化问题,通过控制无级变速器(CVT)的传动比以调整电机最优工作点来优化车辆能耗。所提出的控制策略在无人驾驶车辆开发中具有一定的意义。

### 参考文献:

- [1] Barkenbus J N. Eco-driving: An Overlooked Climate Change Initiative[J]. *Energy Policy* (S0301-4215), 2010, 38(2): 762-769.
- [2] Ritschel R, Schrödel F, Hädrich J, et al. Nonlinear Model Predictive Path-Following Control for Highly Automated Driving[J]. *IFAC-Papers On Line* (S2405-8963), 2019, 52(8): 350-355.
- [3] Grigorescu S, Trasnea B, Cocias T, et al. A Survey of Deep Learning Techniques for Autonomous Driving[J]. *Journal of Field Robotics* (S1556-4959), 2020, 37(3): 362-386.
- [4] De L D A, Pereira G A S. Navigation of an Autonomous Car Using Vector Fields and the Dynamic Window Approach[J]. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* (S2195-3899), 2013, 24(1/2): 106-116.
- [5] Doherty K, Wang J, Englot B. Probabilistic map fusion for fast, incremental occupancy mapping with 3d hilbert maps[C]//2016 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA). Stockholm, Sweden, IEEE 2016: 1011-1018.
- [6] Droschel D, Schwarz M, Behnke S. Continuous Mapping and Localization for Autonomous Navigation in Rough Terrain Using a 3D Laser Scanner[J]. *Robotics and Autonomous Systems* (S0921-8890), 2017, 88: 104-115.
- [7] Daoud M A, Osman M, Mehrez M W, et al. Path-Following and Adjustable Driving Behavior of Autonomous Vehicles Using Dual-Objective Nonlinear MPC[C]//2019 IEEE International Conference on Vehicular Electronics and Safety (ICVES). Cairo, Egypt, IEEE, 2019: 1-6.
- [8] Sajadi-Alamdari S A, Voos H, Darouach M. Nonlinear Model Predictive Control for Ecological Driver Assistance Systems in Electric Vehicles[J]. *Robotics and Autonomous Systems*(S0921-8890), 2019, 112: 291-303.
- [9] Ma F, Yang Y, Wang J, et al. Predictive Energy-Saving Optimization Based on Nonlinear Model Predictive Control for Cooperative Connected Vehicles Platoon with V2V Communication[J]. *Energy*(S0360-5442), 2019, 189: 116-120.
- [10] Sajadi-Alamdari S A, Voos H, Darouach M. Nonlinear model predictive extended eco-cruise control for battery electric vehicles[C]//2016 24th mediterranean conference on control and automation (MED). Athens, Greece, IEEE, 2016: 467-472.
- [11] Hofman T, Salazar M. Transmission ratio design for electric vehicles via analytical modeling and optimization [C]//2020 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC). Gijon: Spain, 2020: 1-6.
- [12] Verbruggen F, Salazar M, Pavone M, et al. Joint design and control of electric vehicle propulsion systems[C]//2020 European Control Conference (ECC), St. Petersburg, Russia: IEEE, 2020: 1725-1731.
- [13] Verbruggen F J R, Rangarajan V, Hofman T. Powertrain design optimization for a battery electric heavy-duty truck[C]//2019 American Control Conference (ACC). Philadelphia, PA, USA: IEEE, 2019: 1488-1493.
- [14] Farag W. Complex track maneuvering using real-time MPC control for autonomous driving[J]. *International Journal of Computing and Digital Systems*(S2210-142X), 2020, 9(5): 909-920.
- [15] Gao Y, Lin T, Borrelli F, et al. Predictive Control of Autonomous Ground Vehicles with Obstacle Avoidance on Slippery Roads[C]//Dynamic Systems and Control Conference. Cambridge, Massachusetts, USA, ASME 2010, 44175: 265-272.
- [16] Guzzella L, Sciarretta A. *Vehicle Propulsion Systems*[M]. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [17] Mahmoudi A, Soong W L, Pellegrino G, et al. Loss Function Modeling of Efficiency Maps of Electrical Machines[J]. *IEEE Transactions on Industry Applications* (S2644-1241), 2017, 53(5): 4221-4231.
- [18] Hofman T, Salazar M. Transmission ratio design for electric vehicles via analytical modeling and optimization



- [C]/2020 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC), 2020: 1-6.
- [19] Zhao J. Design and Control Co-Optimization for Advanced Vehicle Propulsion Systems[D]. Paris, France Université Paris-Scalay IFP Energies Nouvelles, 2017.
- [20] Pourabdollah M, Murgovski N, Grauers A, et al. Optimal Sizing of a Parallel PHEV Powertrain[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology (S1939-9359), 2013, 62(6): 2469-2480.
- [21] Rawlings J B, Mayne D Q, Diehl M. Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design[M]. Madison, WI: Nob Hill Publishing, 2017.
- [22] Nocedal J, Wright S. Numerical Optimization[M]. Berlin, Heidelberg, Springer Science & Business Media, 2006.
- [23] Andersson J A E, Gillis J, Horn G, et al. CasADi: A Software Framework for Nonlinear Optimization and Optimal Control[J]. Mathematical Programming Computation (S1867-2949), 2019, 11(1): 1-36.
- [24] Wächter A, Biegler L T. On the Implementation of an Interior-Point Filter Line-Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming[J]. Mathematical Programming (S0025-5610), 2006, 106(1): 25-57.
- [25] Kong J, Pfeiffer M, Schildbach G, et al. Kinematic and Dynamic Vehicle Models for Autonomous Driving Control Design[C]/2015 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV), eoul, Korea (South): IEEE 2015: 1094-1099.