

11-17-2021

## Kernel Block Diagonal Representation Subspace Clustering and Its Convergence Analysis

Maoshan Liu

*Engineering Research Center of Internet of Things Technology Applications Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China;*

Zhicheng Ji

*Engineering Research Center of Internet of Things Technology Applications Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China;*

Wang Yan

*Engineering Research Center of Internet of Things Technology Applications Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China;*

Jianfeng Wang

*Engineering Research Center of Internet of Things Technology Applications Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research](#), [Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

# Kernel Block Diagonal Representation Subspace Clustering and Its Convergence Analysis

## Abstract

**Abstract:** Focus on the problems that the linear block diagonal representation subspace clustering cannot effectively handle non-linear visual data, and the regular regularizers cannot directly pursue the k-block diagonal matrix, a kernel block diagonal representation subspace clustering is proposed. *In the proposed algorithm, the original input space is mapped into the kernel Hilbert space which is linearly separable, and the spectral clustering is performed in the feature space. The convergence analysis is given, and the strong convex of variables and the boundedness of function is utilized to verify the monotonically decreasing of objective function and the boundedness and convergence of the affinity matrix, which breaks through the difficulty of convergence proof.* Compared with other algorithms such as the kernel sparse subspace clustering and the block diagonal representation algorithm tested, the algorithm has achieved the lower clustering error and higher normalized mutual information on Extended Yale B, ORL and MVtec ITODD.

## Keywords

visual data, kernel subspace clustering, block diagonal representation, convergence analysis

## Recommended Citation

Liu Maoshan, Ji Zhicheng, Wang Yan, Wang Jianfeng. Kernel Block Diagonal Representation Subspace Clustering and Its Convergence Analysis[J]. Journal of System Simulation, 2021, 33(11): 2533-2544.

## 核块对角表达子空间聚类及收敛性分析

刘茂山, 纪志成, 王艳, 王建锋

(江南大学 教育部物联网技术应用工程中心, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 针对线性块对角表达子空间聚类算法不能有效处理非线性视觉数据, 以及常规的正则化器不能直接追求  $k$  块对角矩阵等缺点, 提出了核块对角表达子空间聚类算法。将原始输入空间映射到线性可分的核希尔伯特空间, 在该特征空间中进行谱聚类, 同时给出了算法的收敛性分析, 利用变量的强凸性和函数的有界性来验证目标函数单调递减和亲和力矩阵有界且收敛。与核稀疏子空间聚类、块对角表达子空间聚类算法相比, 结果表明: 该算法在 Extended Yale B, ORL(Olivetti Research Laboratory)和 MVtec ITODD 数据集上取得了较低的聚类误差和较高的归一化互信息。

**关键词:** 视觉数据; 核子空间聚类; 块对角表达; 收敛性分析

中图分类号: TP391.4 文献标志码: A 文章编号: 1004-731X (2021) 11-2533-12

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.21-0950

## Kernel Block Diagonal Representation Subspace Clustering and Its Convergence Analysis

Liu Maoshan, Ji Zhicheng, Wang Yan, Wang Jianfeng

(Engineering Research Center of Internet of Things Technology Applications Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

**Abstract:** Focus on the problems that the linear block diagonal representation subspace clustering cannot effectively handle non-linear visual data, and the regular regularizers cannot directly pursue the  $k$ -block diagonal matrix, a kernel block diagonal representation subspace clustering is proposed. In the proposed algorithm, the original input space is mapped into the kernel Hilbert space which is linearly separable, and the spectral clustering is performed in the feature space. The convergence analysis is given, and the strong convex of variables and the boundedness of function is utilized to verify the monotonically decreasing of objective function and the boundedness and convergence of the affinity matrix, which breaks through the difficulty of convergence proof. Compared with other algorithms such as the kernel sparse subspace clustering and the block diagonal representation algorithm tested, the algorithm has achieved the lower clustering error and higher normalized mutual information on Extended Yale B, ORL and MVtec ITODD.

**Keywords:** visual data; kernel subspace clustering; block diagonal representation; convergence analysis

## 引言

智慧企业的制造过程和制造服务等制造流程产生大量高维非线性视觉数据, 这些高维视觉数据集位于许多不同低维子空间的并集上, 如何更加准确地把属于同一簇的数据样本划分到对应的子空间是数据挖掘领域重要的研究分支<sup>[1-4]</sup>。本文重点

研究了谱型子空间聚类算法, 与其他类型的子空间聚类算法相比, 这种子空间聚类算法最受欢迎。许多传统的谱型子空间聚类算法假设高维数据集符合线性子空间模型, 即一个数据点可以由属于同一类的其他数据点线性表示。

目前很多研究者从不同的角度设计了很多行

收稿日期: 2021-09-14 修回日期: 2021-10-26

基金项目: 国家重点研发计划(2018YFB1701903); 国家自然科学基金(61973138)

第一作者: 刘茂山(1992-), 男, 博士生, 研究方向为数据挖掘与模式识别。E-mail: maoshanliu@aliyun.com

之有效的线性谱型子空间聚类算法, 这些研究表明, 更好的亲和力矩阵将有利于聚类效果的提升<sup>[5-7]</sup>。很多研究人员致力于线性谱型子空间聚类算法的改进, 核心在于算法目标函数中正则项范数的设计。

在稀疏子空间聚类(Sparse Subspace Clustering, SSC)算法中<sup>[8-11]</sup>, 正则项范数上面施加  $l_1$  范数,  $l_1$  范数可以促进表达矩阵的稀疏性; 在低秩表达(Low-Rank Representation, LRR)聚类算法<sup>[12-13]</sup>和低秩子空间聚类(Low-Rank Subspace Clustering, LRSC)算法中<sup>[14-15]</sup>, 核范数施加在正则项范数上, 并且核范数是秩函数的凸缩放。此外, LRSC 算法与 LRR 算法的一个关键区别在于 LRSC 算法多了一个约束条件, 即 LRSC 算法中的表达矩阵是对称的; 在基于  $l_2$  图的子空间聚类( $l_2$ -graph Subspace Clustering)算法<sup>[16]</sup>、最小二乘回归(Least Square Regression, LSR)聚类算法<sup>[17]</sup>和高效密集子空间聚类(Efficient Dense Subspace Clustering, EDSC)算法<sup>[18]</sup>中, 正则项范数上面施加  $l_2$  范数,  $l_2$  范数将使得 LSR, DSC 和 EDSC 算法具有封闭形式的解, 因此这 3 种算法比其他谱型子空间聚类算法具有更高的效率。

Lu 等指出<sup>[19]</sup>, 由 SSC 算法获得的表达矩阵过于稀疏, 即不仅类与类之间稀疏, 而且同类之间也稀疏。然而, 当施加  $l_2$  范数或者核范数在正则项范数上, 由这种子空间聚类算法获得的表达矩阵过于密集, 即类与类之间存在着不想要的联系。

$l_1$  范数替代  $l_0$  范数施加在正则项范数上, 会使得问题有凸解, 但获得的解却是次优的。在迭代加权稀疏子空间聚类(Reweighted Sparse Subspace Clustering, RSSC)算法<sup>[20]</sup>, 基于平滑  $l_0$  范数的鲁棒仿射子空间聚类(Robust Affine Subspace Clustering via Smoothed  $l_0$ -norm, ASCSL0)算法<sup>[21]</sup>和基于平滑  $l_p$  最小化的快速稀疏子空间聚类(Sparse Subspace Clustering via Smoothed  $l_p$  minimization, SSC-SLp)算法<sup>[22]</sup>中, 改进的范数会施加在正则项范数上, 这种改进的范数近似  $l_0$  范数。

在块对角表达(Block Diagonal Representation, BDR)子空间聚类算法中<sup>[5-7]</sup>,  $k$  块对角正则化器被施加在亲和力矩阵上, 即  $k$  块对角正则化器的定义是对应的拉普拉斯矩阵的  $k$  个最小特征值之和, 同时, 该定义还表明当该  $k$  块对角正则化器为 0 时, 对应的亲和力矩阵符合  $k$  块对角结构。相比之前的  $l_1$  正则化器、 $l_2$  正则化器, 以及其他形式的正则化器, 该  $k$  块对角正则化器是直接追求块对角矩阵, 显然该正则化器表现得更具竞争力。而且大量的仿真实验数据也表明, 与许多经典的线性谱型子空间聚类算法相比, 块对角表达子空间聚类算法实现了优越的聚类效果。许多研究人员也迫切研究块对角表达子空间聚类算法的原理, 进一步设计出改进的块对角表达子空间聚类算法。

由于视觉数据的非线性本质, 大量的高维数据集不一定位于线性子空间上, 有必要设计出非线性的谱型子空间聚类算法。一些研究者提出了许多基于核的谱型子空间聚类算法<sup>[23-27]</sup>, 这些基于核的子空间聚类算法首先将输入数据映射到线性可分的特征空间, 这个特征空间将符合线性子空间模型, 许多先进的子空间聚类算法可以对该特征空间进行聚类分析。此外, 这些基于核的子空间聚类算法可以利用核技术来实现映射过程。在具体实现基于核的谱型子空间聚类算法时, 不需要显式计算映射后的核希尔伯特空间。 $k$  块对角正则化器有助于减少聚类误差, 然后把块对角表达子空间聚类算法扩展成非线性的子空间聚类算法, 进而提出了核块对角表达(Kernel Block Diagonal Representation, KBDR)子空间聚类算法。

## 1 核块对角表达子空间聚类算法

### 1.1 问题描述

线性谱型子空间聚类算法的原理是一个数据点可以由属于其同类的其他数据点线性表达。而在实际应用中, 大规模的视觉数据未必符合线性模型, 故需将原来的数据  $\mathbf{X}$  映射到特征空间中, 即

是  $\Phi(\mathbf{X})$ ; 原来的正则化器施加在表达矩阵  $\mathbf{C}$  上, 不能直接追求块对角矩阵, 故提出  $k$  块对角正则化器来直接追求块对角矩阵。

## 1.2 块对角表达子空间聚类

直接追求块对角矩阵的块对角表达子空间聚类算法显示出很好的聚类效果。当数据样本中包含高斯噪声时, 块对角表达子空间聚类算法的目标函数为

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{B}} \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{XB}\|_F^2 + \gamma \|\mathbf{B}\|_{\nabla k} \\ \text{s.t. } \text{diag}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}, \mathbf{B} \geq \mathbf{0}, \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{X}$  为数据样本矩阵;  $\mathbf{B}$  为亲和力矩阵;  $\|\cdot\|_{\nabla k}$  为  $k$  块对角正则化器, 即对应的拉普拉斯矩阵  $k$  个最小特征值之和;  $\gamma$  为平衡参数, 用以平衡这两项的效果。为了简化, 本文考虑数据样本矩阵  $\mathbf{X}$  只包含高斯噪声。

研究发现亲和力矩阵  $\mathbf{B}$  的许多限制会导致它的表达能力减弱, 因此引入了一个与  $\mathbf{B}$  相似的新矩阵  $\mathbf{Z}$ 。则新的目标函数为:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{Z}, \mathbf{B}} \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{XZ}\|_F^2 + \frac{\beta}{2} \|\mathbf{Z} - \mathbf{B}\|_F^2 + \gamma \|\mathbf{B}\|_{\nabla k} \\ \text{s.t. } \text{diag}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}, \mathbf{B} \geq \mathbf{0}, \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $\beta$  和  $\gamma$  是平衡参数, 用以平衡这 3 项的效果。

当参数  $\beta$  趋于无穷大时, 式(1)和(2)是等价的。

## 1.3 核块对角表达子空间聚类

在核块对角表达子空间聚类算法中, 首先计算特征映射  $\Phi(\mathbf{X})$ , 然后在特征空间中进行块对角表达子空间聚类。这里给出了它的目标函数:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{Z}, \mathbf{B}} \frac{1}{2} \|\Phi(\mathbf{X}) - \Phi(\mathbf{X})\mathbf{Z}\|_F^2 + \frac{\beta}{2} \|\mathbf{Z} - \mathbf{B}\|_F^2 + \gamma \|\mathbf{B}\|_{\nabla k} \\ \text{s.t. } \text{diag}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}, \mathbf{B} \geq \mathbf{0}, \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \end{cases} \quad (3)$$

在优化过程中, 不需要计算特征映射  $\Phi(\mathbf{X})$  的显式形式。可以应用核技术来处理含有  $\Phi(\mathbf{X})$  的项, 保真项  $\|\Phi(\mathbf{X}) - \Phi(\mathbf{X})\mathbf{Z}\|_F^2$  则可以表示为

$$\|\Phi(\mathbf{X}) - \Phi(\mathbf{X})\mathbf{Z}\|_F^2 = \text{tr}(\mathbf{K} - 2\mathbf{KZ} + \mathbf{Z}^T \mathbf{KZ}) \quad (4)$$

$$(\mathbf{K})_{ij} = \Phi(\mathbf{X}_i)^T \Phi(\mathbf{X}_j) = k(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为正半定核格拉姆矩阵, 核函数包括多项式核  $k(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = (\langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \rangle + a)^b$  和高斯核  $k(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \exp(-\delta \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_F^2)$ , 其中  $a$ ,  $b$  和  $\delta$  是核函数的参数。

## 1.4 核块对角表达子空间聚类的优化

在阐述核块对角表达子空间聚类算法的优化过程之前, 先给出关于非凸项  $\|\cdot\|_{\nabla k}$  的一些相关定理:

假设  $\mathbf{L} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  且  $\mathbf{L} \geq \mathbf{0}$  ( $\mathbf{L}$  是正半定), 则

$$\begin{cases} \sum_{i=n-k+1}^n \lambda_i(\mathbf{L}) = \min_{\mathbf{W}} \langle \mathbf{L}, \mathbf{W} \rangle \\ \text{s.t. } \mathbf{0} \leq \mathbf{W} \leq \mathbf{I}, \text{tr}(\mathbf{W}) = k \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{W}$  和  $\mathbf{L}$  为对称矩阵,  $\mathbf{L} \geq \mathbf{0}$  意味着  $\mathbf{L}$  是正半定;  $\mathbf{W} \leq \mathbf{L}$  即是  $\mathbf{W} - \mathbf{L} \leq \mathbf{0}$ ,  $\text{Tr}(\mathbf{W})$  为  $\mathbf{W}$  的主对角元素之和, 并且  $\langle \mathbf{L}, \mathbf{W} \rangle = \text{Tr}(\mathbf{L}^T \mathbf{W})$ 。

因此式(3)变为

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{Z}, \mathbf{B}, \mathbf{W}} \frac{1}{2} \|\Phi(\mathbf{X}) - \Phi(\mathbf{X})\mathbf{Z}\|_F^2 + \\ \frac{\beta}{2} \|\mathbf{Z} - \mathbf{B}\|_F^2 + \gamma \langle \text{diag}(\mathbf{B}\mathbf{1}) - \mathbf{B}, \mathbf{W} \rangle \\ \text{s.t. } \text{diag}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}, \mathbf{B} \geq \mathbf{0}, \mathbf{B} = \mathbf{B}^T, \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{W} \leq \mathbf{I}, \text{tr}(\mathbf{W}) = k \end{cases} \quad (7)$$

辅助矩阵  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{W}$  和亲和力矩阵  $\mathbf{B}$  的优化过程如下:

(1) 更新  $\mathbf{Z}$ , 矩阵  $\mathbf{B}^t$  固定。

$$\mathbf{Z}^{t+1} = \arg \min_{\mathbf{Z}} \frac{1}{2} \|\Phi(\mathbf{X}) - \Phi(\mathbf{X})\mathbf{Z}\|_F^2 + \frac{\beta}{2} \|\mathbf{Z} - \mathbf{B}^t\|_F^2 \quad (8)$$

矩阵  $\mathbf{Z}$  的封闭解如下:

$$\mathbf{Z}^{t+1} = (\Phi(\mathbf{X})^T \Phi(\mathbf{X}) + \beta \mathbf{I})^{-1} (\Phi(\mathbf{X})^T \Phi(\mathbf{X}) + \beta \mathbf{B}^t) = (\mathbf{K}_G + \beta \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{K}_G + \beta \mathbf{B}^t) \quad (9)$$

(2) 更新  $\mathbf{W}$ , 矩阵  $\mathbf{B}^t$  固定。

$$\begin{cases} \mathbf{W}^{t+1} = \arg \min_{\mathbf{W}} \langle \text{diag}(\mathbf{B}^t \mathbf{1} - \mathbf{B}^t), \mathbf{W} \rangle \\ \text{s.t. } \mathbf{0} \leq \mathbf{W} \leq \mathbf{I}, \text{tr}(\mathbf{W}) = k \end{cases} \quad (10)$$

矩阵  $\mathbf{W}$  的解:

$$\mathbf{W}^{t+1} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T \quad (11)$$

式中:  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$ ,  $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{n \times k}$  是由矩阵  $\text{diag}(\mathbf{B}^t \mathbf{1}) - \mathbf{B}^t$  的  $k$  个最小特征值对应的  $k$  个特征向量组成。

(3) 更新  $\mathbf{B}$ , 矩阵  $\mathbf{Z}^{t+1}$  和  $\mathbf{W}^{t+1}$  固定。

$$\begin{cases} \mathbf{B}^{t+1} = \arg \min_{\mathbf{B}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Z}^{t+1} - \mathbf{B}\|_F^2 + \\ \frac{\gamma}{\beta} \langle \text{diag}(\mathbf{B}_1) - \mathbf{B}, \mathbf{W}^{t+1} \rangle \\ \text{s.t. } \text{diag}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}, \mathbf{B} \geq \mathbf{0}, \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \end{cases} \quad (12)$$

$\mathbf{B}$  的封闭解:

$$\mathbf{B}^{t+1} = \left[ \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{B}}^{t+1} - \text{diag}(\text{diag}(\tilde{\mathbf{B}}^{t+1}))) + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{B}}^{t+1} - \text{diag}(\text{diag}(\tilde{\mathbf{B}}^{t+1})))^T \right]_+ \quad (13)$$

式中:  $[O]_+ = \max(O, 0)$ , 并且:

$$\tilde{\mathbf{B}}_{ij}^{t+1} = (\mathbf{Z}^{t+1} - \frac{\gamma}{\beta} (\text{diag}(\mathbf{W}^{t+1}) \mathbf{1}^T - \mathbf{W}^{t+1}))_{ij} \quad (14)$$

式中:  $\mathbf{B}_{ij}$  为  $\mathbf{B}$  的第  $i$  行第  $j$  列元素。

本文采用交替优化算法来求解核块对角表达子空间聚类算法, 算法的终止迭代条件包括两方面, 设置最大迭代次数和更新上面的步骤直至收敛。最大迭代次数可以给定常数  $T$ , 更新上面的步骤需要验证在每次迭代过程中下面的约束条件:

$$\|\mathbf{Z}^{t+1} - \mathbf{Z}^t\|_{\infty} \leq \varepsilon \quad (15)$$

$$\|\mathbf{B}^{t+1} - \mathbf{B}^t\|_{\infty} \leq \varepsilon \quad (16)$$

式中:  $\varepsilon > 0$ 。

核块对角表达子空间聚类算法中包含 2 个超参数  $\beta$  和  $\gamma$ , 为了获得最佳的聚类效果, 可以先固定一个参数, 然后穷举搜索另一个参数。在具体实验中, 可以采用网格搜索方法, 即在给定的参数列表中进行穷举搜索。相比于穷举搜索, 该方法效率有所提高。整个算法的流程为

核块对角表达子空间聚类算法

- 1: 输入  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{d \times n}$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $T$ ,  $\varepsilon > 0$
- 2: 初始化  $t = 0$ ,  $\mathbf{Z}^t = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{B}^t = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{W}^t = \mathbf{0}$

3: while 不收敛 do

4: 通过式(9)计算  $\mathbf{Z}^{t+1}$

5: 通过式(11)计算  $\mathbf{W}^{t+1}$

6: 通过式(13)计算  $\mathbf{B}^{t+1}$

7: if  $\max\{\|\mathbf{Z}^{t+1} - \mathbf{Z}^t\|_{\infty}, \|\mathbf{B}^{t+1} - \mathbf{B}^t\|_{\infty}\} \leq \varepsilon$  or  $t > T$ , break

8:  $t = t + 1$

9: end while

10: 输出  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{n \times n}$

## 1.5 核块对角表达子空间聚类的收敛性分析

将式(7)表示为  $f(\mathbf{Z}, \mathbf{B}, \mathbf{W})$ 。假设  $S_1 = \{\mathbf{B} | \text{diag}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}, \mathbf{B} \geq \mathbf{0}, \mathbf{B} = \mathbf{B}^T\}$ , 并且  $S_2 = \{\mathbf{W} | 0 \leq \mathbf{W} \leq \mathbf{I}, \text{Tr}(\mathbf{W}) = k\}$ 。  $S_1$  和  $S_2$  的指示函数分别表示为  $\tau_{S_1}$  和  $\tau_{S_2}$ , 即  $\tau_{S_1}(\mathbf{X})$  中,  $\mathbf{X}$  满足  $S_1$  中约束条件。给定矩阵  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{d \times n}$ , 我们有以下定理。

定理 1 给定参数  $\beta > 0$  和  $\gamma > 0$ , 核块对角表达子空间聚类算法目标函数  $f(\mathbf{Z}, \mathbf{B}, \mathbf{W})$  有如下结论:

- (1) 函数  $f(\mathbf{Z}, \mathbf{B}, \mathbf{W})$  是单调递减。
- (2) 矩阵序列  $\{\mathbf{Z}^t\}$ ,  $\{\mathbf{B}^t\}$  和  $\{\mathbf{W}^t\}$  有界。
- (3)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{Z}^{t+1} - \mathbf{Z}^t\|_F^2 = 0$ ,  
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{B}^{t+1} - \mathbf{B}^t\|_F^2 = 0$ ,  
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{W}^{t+1} - \mathbf{W}^t\|_F^2 = 0$ 。

证明:

从  $\mathbf{W}^{t+1}$  的优化, 得到

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Z}^t, \mathbf{B}^t, \mathbf{W}^{t+1}) + \tau_{S_2}(\mathbf{W}^{t+1}) &\leq \\ f(\mathbf{Z}^t, \mathbf{B}^t, \mathbf{W}^t) + \tau_{S_2}(\mathbf{W}^t) &\end{aligned} \quad (17)$$

更新矩阵  $\mathbf{Z}^{t+1}$ , 得到

$$\mathbf{Z}^{t+1} = \arg \min_{\mathbf{Z}} f(\mathbf{Z}, \mathbf{B}^t, \mathbf{W}^{t+1}) \quad (18)$$

注意到  $f(\mathbf{Z}, \mathbf{B}^t, \mathbf{W}^{t+1})$  是  $\lambda$ -强凸, 得到

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Z}^{t+1}, \mathbf{B}^t, \mathbf{W}^{t+1}) &\leq f(\mathbf{Z}^t, \mathbf{B}^t, \mathbf{W}^{t+1}) - \\ \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{Z}^{t+1} - \mathbf{Z}^t\|_F^2 &\end{aligned} \quad (19)$$

更新矩阵  $\mathbf{B}^{t+1}$ , 得到

$$\mathbf{B}^{t+1} = \arg \min_{\mathbf{B}} f(\mathbf{Z}^{t+1}, \mathbf{B}, \mathbf{W}^{t+1}) + \tau_{S_1}(\mathbf{B}) \quad (20)$$

$f(\mathbf{Z}^{t+1}, \mathbf{B}, \mathbf{W}^{t+1}) + \tau_{S_1}(\mathbf{B})$  是  $\lambda$ -强凸, 得到

$$f(\mathbf{Z}^{t+1}, \mathbf{B}^{t+1}, \mathbf{W}^{t+1}) + \tau_{S_1}(\mathbf{B}^{t+1}) \leq f(\mathbf{Z}^{t+1}, \mathbf{B}^t, \mathbf{W}^{t+1}) + \tau_{S_1}(\mathbf{B}^t) - \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{B}^{t+1} - \mathbf{B}^t\|_F^2 \quad (21)$$

结合(17), (19)和(21), 得到

$$f(\mathbf{Z}^{t+1}, \mathbf{B}^{t+1}, \mathbf{W}^{t+1}) + \tau_{S_1}(\mathbf{B}^{t+1}) + \tau_{S_2}(\mathbf{W}^{t+1}) \leq f(\mathbf{Z}^t, \mathbf{B}^t, \mathbf{W}^t) + \tau_{S_1}(\mathbf{B}^t) + \tau_{S_2}(\mathbf{W}^t) - \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{Z}^{t+1} - \mathbf{Z}^t\|_F^2 - \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{B}^{t+1} - \mathbf{B}^t\|_F^2 \quad (22)$$

因此,  $f(\mathbf{Z}^t, \mathbf{B}^t, \mathbf{W}^t) + \tau_{S_1}(\mathbf{B}^t) + \tau_{S_2}(\mathbf{W}^t)$  是单调递减, 并且是有上界,  $f(\mathbf{Z}^0, \mathbf{B}^0, \mathbf{W}^0) + \tau_{S_1}(\mathbf{B}^0) + \tau_{S_2}(\mathbf{W}^0)$  是上界值。这表明  $\{\mathbf{Z}^t\}$  和  $\{\mathbf{B}^t\}$  有界。 $\mathbf{W}^t \in S_2$  表明  $\|\mathbf{W}^t\|_F^2 \leq 1$ , 并且  $\{\mathbf{W}^t\}$  有界。定理 1 的结论(1)和(2)得证。

相应的拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}_{\mathbf{B}^t} = \text{diag}(\mathbf{B}^t \mathbf{1}) - \mathbf{B}^t$  ( $\mathbf{1} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ ) 有以下的特殊属性:

(1)  $\mathbf{L}_{\mathbf{B}^t} \geq 0$ , 因此  $\lambda_i(\mathbf{L}_{\mathbf{B}^t}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ 。

(2)  $\mathbf{L}_{\mathbf{B}^t}$  至少有一个特征值为 0, 所以  $\lambda_n(\mathbf{L}_{\mathbf{B}^t}) = 0$ , 换句话说,  $\text{rank}(\mathbf{L}_{\mathbf{B}^t}) \leq (n-1)$ 。

(3) 亲和力矩阵  $\mathbf{B}^t$  有  $k$  个连接成分, 当且仅当

$$\begin{cases} \lambda_i(\mathbf{L}_{\mathbf{B}^t}) > 0, & \text{当 } i = 1, 2, \dots, n-k, \\ \lambda_i(\mathbf{L}_{\mathbf{B}^t}) = 0, & \text{当 } i = n-k+1, n-k+2, \dots, n \end{cases} \quad (23)$$

$\mathbf{W}^t$  和  $\{\text{diag}(\mathbf{B}^t \mathbf{1}) - \mathbf{B}^t\}^T$  是半正定, 对于上述 2 个半正定矩阵, 可以找到共同的正交矩阵  $\mathbf{T}$ , 使得

$$\mathbf{T}^T \mathbf{W}^t \mathbf{T} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (24)$$

式中:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $\mathbf{T}^T \mathbf{W}^t \mathbf{T}$  的特征值。

$$\mathbf{T}^T \{\text{diag}(\mathbf{B}^t \mathbf{1}) - \mathbf{B}^t\}^T \mathbf{T} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (25)$$

式中:  $b_1, b_2, \dots, b_n$  是  $\mathbf{T}^T \{\text{diag}(\mathbf{B}^t \mathbf{1}) - \mathbf{B}^t\}^T \mathbf{T}$  的特征值。

得到

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T \{\text{diag}(\mathbf{B}^t \mathbf{1}) - \mathbf{B}^t\}^T \mathbf{T} \mathbf{T}^T \mathbf{W}^t \mathbf{T} &= \\ \mathbf{T}^T \{\text{diag}(\mathbf{B}^t \mathbf{1}) - \mathbf{B}^t\}^T \mathbf{W}^t \mathbf{T} &= \\ \text{diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n) & \end{aligned} \quad (26)$$

这表明  $\{\text{diag}(\mathbf{B}^t \mathbf{1}) - \mathbf{B}^t\}^T \mathbf{W}^t$  是半正定, 即  $\langle \text{diag}(\mathbf{B}^t \mathbf{1}) - \mathbf{B}^t, \mathbf{W}^t \rangle = \text{Tr}(\{\text{diag}(\mathbf{B}^t \mathbf{1}) - \mathbf{B}^t\}^T \mathbf{W}^t) =$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0。$$

由于  $\frac{1}{2} \|\Phi(\mathbf{X}) - \Phi(\mathbf{X})\mathbf{Z}\|_F^2$ ,  $\frac{\beta}{2} \|\mathbf{Z} - \mathbf{B}\|_F^2$  和  $\gamma \langle \text{diag}(\mathbf{B} \mathbf{1}) - \mathbf{B}, \mathbf{W} \rangle$  这 3 项是大于等于 0, 因此  $f(\mathbf{Z}^t, \mathbf{B}^t, \mathbf{W}^t) + \tau_{S_1}(\mathbf{B}^t) + \tau_{S_2}(\mathbf{W}^t) \geq 0$ 。现在, 从  $t = 0, 1, \dots, n$  累加(22), 得到

$$\sum_{t=0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} (\|\mathbf{Z}^{t+1} - \mathbf{Z}^t\|_F^2 + \|\mathbf{B}^{t+1} - \mathbf{B}^t\|_F^2) \leq f(\mathbf{Z}^0, \mathbf{B}^0, \mathbf{W}^0) \quad (27)$$

这表明

$$\mathbf{Z}^{t+1} - \mathbf{Z}^t \rightarrow 0 \quad (28)$$

且

$$\mathbf{B}^{t+1} - \mathbf{B}^t \rightarrow 0 \quad (29)$$

通过式(29), 得到

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\text{diag}(\mathbf{B}^{t+1} \mathbf{1}) - \mathbf{B}^{t+1} - \text{diag}(\mathbf{B}^t \mathbf{1}) + \mathbf{B}^t\|_F^2 = 0 \quad (30)$$

给出  $\mathbf{U}_1$  和  $\mathbf{U}_2$  的具体解, 形式如下:

$\mathbf{U}_1 \in \mathbf{R}^{n \times k}$  是由矩阵  $\text{diag}(\mathbf{B}^{t+1} \mathbf{1}) - \mathbf{B}^{t+1}$  的  $k$  个最小特征值对应的  $k$  个特征向量组成。

$\mathbf{U}_2 \in \mathbf{R}^{n \times k}$  是由矩阵  $\text{diag}(\mathbf{B}^t \mathbf{1}) - \mathbf{B}^t$  的  $k$  个最小特征值对应的  $k$  个特征向量组成。

得到

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2\|_F^2 = 0 \quad (31)$$

最后

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^T - \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^T\|_F^2 = 0 \quad (32)$$

$$\text{即 } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{W}^{t+1} - \mathbf{W}^t\|_F^2 = 0 \quad (33)$$

因此, 定理 1 的结论(3):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{Z}^{t+1} - \mathbf{Z}^t\|_F^2 = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{B}^{t+1} - \mathbf{B}^t\|_F^2 = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{W}^{t+1} - \mathbf{W}^t\|_F^2 = 0。得证。$$

综上, 定理 1 的结论(1)(2)(3)全部得证。

## 2 实验验证

### 2.1 实验设置

为了证明所提出的核块对角表达子空间聚类

算法与其他先进算法相比具有出色的聚类效果, 本文在 3 种数据集上进行了多次对比实验, 即 Extended Yale B 数据库、Olivetti Research Laboratory(ORL)数据集和 MVTec ITODD 数据集。Extended Yale B 数据集的图像数量远多于 ORL 数据集, 而 Extended Yale B 数据集的类数小于 ORL 数据集, 这 2 种人脸数据集对于子空间聚类具有相当大的挑战性。MVTec ITODD 数据集是工业数据集, 以验证算法对工业应用的泛化能力。先进的算法包括 LRR<sup>[13]</sup>, LRSC<sup>[15]</sup>, LSR<sup>[17]</sup>, SSC<sup>[9]</sup>, EDSC<sup>[18]</sup>, KSSC<sup>[23]</sup>, ALKSSC<sup>[26]</sup>, KTRR(核截断回归表达)<sup>[27]</sup>, BDR-B/BDR-Z<sup>[5]</sup>。在具体的实验中, 调节其他算法的关键参数以获得最佳聚类效果。本文实验中,  $\varepsilon$  取  $10^{-6}$ <sup>[28]</sup>。

为了定量地评估核块对角表达子空间聚类算法与其他先进算法相比的聚类效果, 这里有 2 个定量的评估指标, 即聚类误差(Clustering Error, CE)和归一化互信息(Normalized Mutual Information, NMI)。

聚类误差:

$$CE(a, \hat{a}) = \min_{\pi} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\pi(a_i) \neq \hat{a}_i\}} \quad (34)$$

式中:  $a$  和  $\hat{a}$  分别是数据矩阵的真实标签和输出标签。式(34)的最小值是关于  $\pi: \{1, 2, \dots, k\}^n \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}^n$  所有排列的,  $k$  为子空间个数;  $n$  为数据样本个数。

归一化互信息:

$$NMI(a, \hat{a}) = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^C n_{ij} \log_2 \left( \frac{n \cdot n_{ij}}{n_i \cdot n_j} \right) \right\}}{\sqrt{\left\{ \sum_{i=1}^Q n_i \log_2 \left( \frac{n_i}{n} \right) \sum_{j=1}^C n_j \log_2 \left( \frac{n_j}{n} \right) \right\}}} \quad (35)$$

式中:  $Q$  为真实类别数;  $C$  为输出标签中的聚类数;  $n_i$  为真实标签中第  $i$  类的数据样本数;  $n_j$  为输出标签中第  $j$  簇的数据样本数;  $n_{ij}$  为真实标签中第  $i$  类样本被划分到输出标签中第  $j$  簇的数据样本个数。

$CE$  越小或  $NMI$  越高表明获得的聚类质量越好。

## 2.2 Extended Yale B 人脸数据集

Extended Yale B 数据库包含 38 名受试者的 2 414 张正脸图像, 每个受试者有 64 张图像, 他们均是在固定姿势和不同光照条件下拍摄。如图 1 所示, 文中列出了 4 位受试者的一些人脸图像。根据文献[29]的实验设置, 将原始人脸图像从 192 像素  $\times$  168 像素调整为 48 像素  $\times$  42 像素, 并将这些二维人脸图像拉伸为一维向量, 然后一维向量归一化为具有单位长度的向量。这项工作中选择  $k \in \{10, 20, 30, 35, 38\}$  受试者进行定量实验, Ji 等<sup>[29]</sup>提出了一个实验方案, 即当选择  $k=10$  时, 必须从受试者 1~10, 2~11, ..., 29~38 中获取所有图像, 所以需要进行 29 次实验。当选择其他  $k$  时, 实验方案类似。如果让  $t$  表示实验的次数, 这样可以得到方程  $k+t=39$  并且每次实验需要处理  $64k$  张图像。这里, 文中使用多项式核, 参数  $a$  和  $b$  分别是 12 和 2。



图 1 Extended Yale B 数据集的 4 个受试者  
Fig. 1 4 subjects of Extended Yale B dataset

为了搜索提出的核块对角表达子空间聚类算法中参数  $\beta$  和参数  $\gamma$  的合理设置, 本文在不同的参数设置下进行实验, 即  $\beta \in \{10^4, 10^3, 10^2, 10^1\}$  和  $\gamma \in \{10^4, 10^3, 10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}$ 。文中是在 10 类图像上进行核块对角表达子空间聚类实验, 然后记录了这 29 次实验中聚类误差和归一化互信息的平均值。

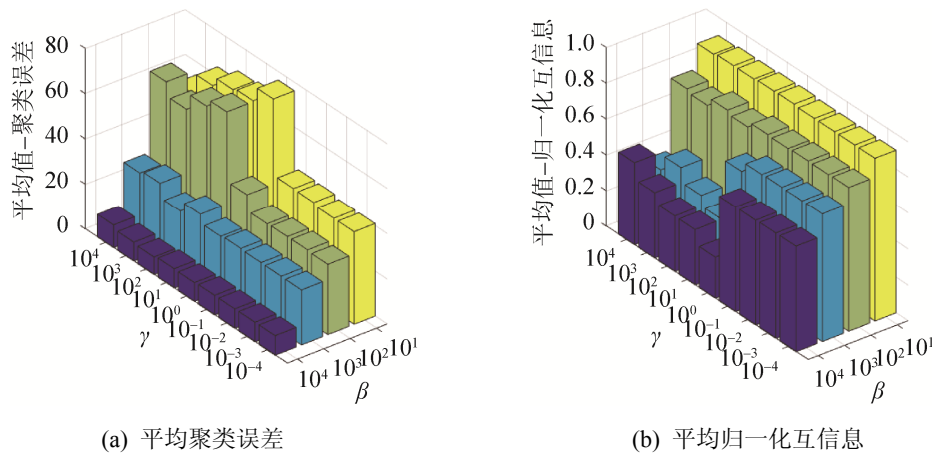
如图 2 所示, 文中分别绘制了核块对角表达子空间聚类算法在不同参数设置下的聚类误差和归一化互信息的三维直方图。从图 2(a)可以看出, 当参数  $\beta=10^4$ , 核块对角表达子空间聚类算法取得的平均聚类误差较小。而且, 从图 2(b)可以看出,



当参数  $\beta=10^4$ , 平均归一化互信息明显较高。总之, 当参数  $\beta=10^4$ , 核块对角表达子空间聚类算法的聚类效果最佳。更进一步, 当参数  $\beta$  固定取  $10^4$  时, 参数  $\gamma$  的取值对聚类效果几乎没有影响。基于上面的分析, 在具体的实验中发现, 参数  $\beta$  取 7 500,  $\gamma$  取 1, 对于 Extended Yale B 数据集, 核块对角表达子空间聚类算法能够取得满意的效果。

文中记录了不同的谱型子空间聚类算法的聚类误差和归一化互信息的均值和中值, 实验数据如表 1 和表 2 所示。从表 1 和表 2 中可以看出, 相比

于其他算法, 核块对角表达子空间聚类算法在  $k \in \{10, 20, 30, 35, 38\}$  实现了更好的聚类效果, 而且核稀疏子空间聚类算法和自适应低秩核稀疏子空间聚类算法的实验数据也表明, 自适应低秩核稀疏子空间聚类算法的确比核稀疏子空间聚类算法实现了更好的聚类效果。除此之外, 在其他受欢迎的算法中, 块对角表达子空间聚类算法展现出很强的竞争性, 这同时也表明了  $k$  块对角正则化器的重要性。



(a) 平均聚类误差

(b) 平均归一化互信息

图 2 10 类图像聚类分析(Extended Yale B 数据集)

Fig. 2 10 categories clustering analysis on Extended Yale B dataset

表 1 在 Extended Yale B 数据集上不同算法的聚类误差

Tab. 1 CE(%) of different algorithms on Extended Yale B dataset

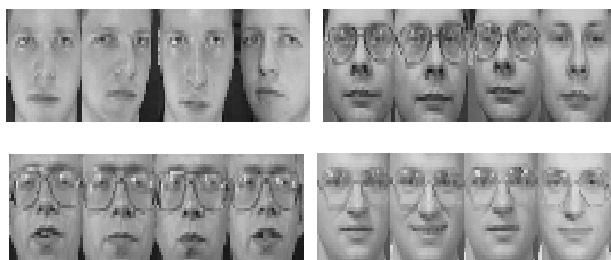
算法	10 类	20 类	30 类	35 类	38 类
LRR	18.63/19.84	29.56/28.12	40.24/39.90	41.29/42.68	35.24/35.24
LRSC	30.32/31.56	30.21/30.00	30.18/29.84	30.49/31.12	30.67/30.67
LSR1	37.12/38.44	31.04/30.16	32.16/32.40	32.13/32.21	31.41/31.41
LSR2	36.02/34.53	33.33/34.30	33.07/32.92	33.09/32.41	33.18/33.18
SSC	10.43/9.53	19.32/19.22	23.86/24.38	27.79/27.95	30.02/30.02
EDSC	9.02/7.66	10.74/10.47	10.03/9.69	10.27/10.31	10.19/10.19
KSSC	16.93/18.28	14.70/14.92	18.27/18.96	21.38/21.45	20.19/20.19
ALKSSC	8.73/6.09	12.29/11.64	14.97/15.21	14.45/14.69	17.27/17.27
KTRR	12.35/12.97	12.63/12.27	15.91/16.67	17.49/17.79	16.41/16.41
BDR-Z	12.39/11.09	16.09/17.11	19.00/20.00	24.53/24.20	26.93/26.93
BDR-B	7.54/4.06	9.67/10.23	9.84/10.31	9.55/9.62	9.87/9.87
KBDR	<b>6.16/3.44</b>	<b>8.41/9.84</b>	<b>9.29/8.80</b>	<b>8.58/8.68</b>	<b>8.76/8.76</b>

表 2 在 Extended Yale B 数据集上不同算法的归一化互信息  
Tab. 2 NMI([0-1]) of different algorithms on Extended Yale B dataset

算法	10 类	20 类	30 类	35 类	38 类
LRR	0.83/0.83	0.81/0.81	0.77/0.77	0.76/0.75	0.80/0.80
LRSC	0.76/0.75	0.86/0.86	0.85/0.85	0.81/0.81	0.77/0.77
LSR1	0.63/0.63	0.61/0.61	0.64/0.63	0.63/0.63	0.63/0.63
LSR2	0.65/0.68	0.61/0.61	0.62/0.62	0.62/0.62	0.62/0.62
SSC	0.88/0.87	0.79/0.77	0.73/0.73	0.73/0.73	0.73/0.73
EDSC	0.90/0.89	0.91/0.92	0.92/0.92	0.91/0.91	0.91/0.91
KSSC	0.85/0.85	0.89/0.89	0.88/0.88	0.87/0.87	0.85/0.85
ALKSSC	0.90/0.90	0.90/0.91	0.89/0.89	0.89/0.89	0.88/0.88
KTRR	0.86/0.86	0.90/0.90	0.89/0.89	0.89/0.89	0.90/0.90
BDR-Z	0.84/0.84	0.85/0.85	0.81/0.81	0.78/0.77	0.76/0.76
BDR-B	0.92/0.93	0.92/0.91	0.92/0.92	0.92/0.92	0.92/0.92
KBDR	<b>0.92/0.94</b>	<b>0.93/0.93</b>	<b>0.93/0.93</b>	<b>0.93/0.93</b>	<b>0.93/0.93</b>

### 2.3 ORL 人脸数据集

ORL 数据集包含 400 张人脸图像, 该数据集中含有 40 个受试者, 每个受试者 10 个图像。如图 3 所示, 这里列出了 4 类人脸图像, 这些人脸图像具有不同面部表情和面部细节。与 Extended Yale B 人脸数据集相比, ORL 数据集对于子空间聚类任务更具挑战性。可以认为有 2 个主要原因: ①ORL 数据集拥有不同的面部表情和面部细节; ②类的数目多。同样 ORL 数据集首先从 112 像素×92 像素调整为 48×12 像素, 然后将这些二维矩阵拉伸为一维向量, 然后一维向量归一化为具有单位长度的向量。这里, 本文使用多项式核, 参数  $a$  和  $b$  分别是 12 和 2。

图 3 ORL 数据集的 4 个受试者  
Fig. 3 4 subjects of ORL dataset

为了搜索核块对角表达子空间聚类算法中参数  $\beta$  和参数  $\gamma$  的恰当设置, 本文运行该算法 10 次, 然后分别记录了在不同参数设置下 40 类图像实验

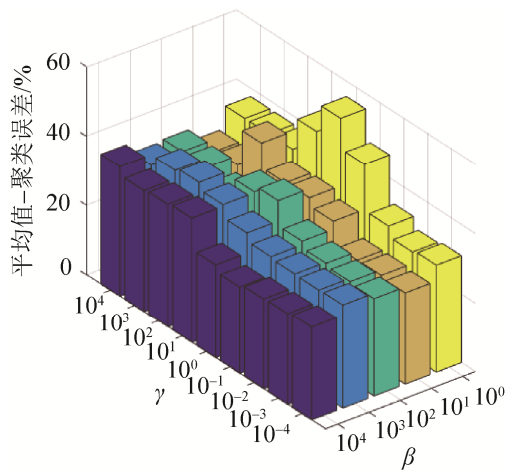
中聚类误差和归一化互信息的平均值。如图 4 所示, 分别绘制了核块对角表达子空间聚类算法在不同参数设置下的聚类误差和归一化互信息的三维直方图, 即提出的子空间聚类算法中参数  $\beta$  的设置是  $\beta \in \{10^4, 10^3, 10^2, 10^1, 10^0\}$  和参数  $\gamma$  的设置是  $\gamma \in \{10^4, 10^3, 10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}$ 。本文得出结论, 当参数  $\beta$  相对较大, 参数  $\gamma$  相对较小, 核块对角表达子空间聚类算法取得相对较好的聚类效果。更加具体地说, 当参数  $\beta \in \{10^4, 10^1\}$  和参数  $\gamma \in \{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}$ , 平均聚类误差相对较小, 并且平均归一化互信息相对较大。

对于核块对角表达子空间聚类算法, 本文取  $\beta=10$  和  $\gamma=0.001$ 。文中运行这些算法 10 次, 分别记录了不同的谱型子空间聚类算法的聚类误差和归一化互信息的均值和中值, 实验数据如表 3 和表 4 所示。从表 3 和表 4 中可以看出, 相比于其他算法, 核块对角表达子空间聚类算法实现了更好的聚类效果, 而且核稀疏子空间聚类算法和自适应低秩核稀疏子空间聚类算法的实验数据也表明, 在核稀疏子空间聚类算法的基础上, 自适应低秩核稀疏子空间聚类算法的确提高了聚类质量。

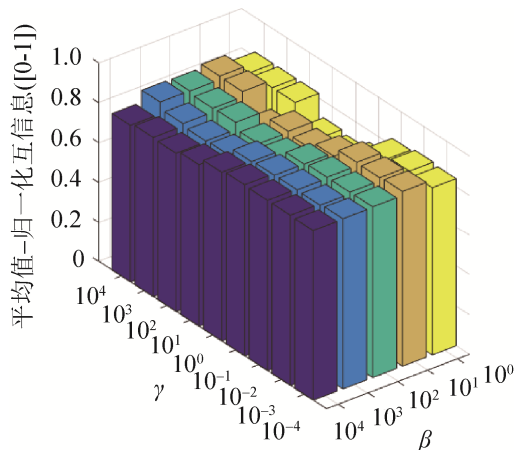
### 2.4 MVTEC ITODD 工业数据集

MVTEC ITODD 数据集包含布置在 800 多个场景中的 28 个对象, 场景由 2 个工业 3D 传感器和 3

个灰度相机进行观察<sup>[30]</sup>。该数据集是用于 3D 对象检测和姿态估计, 重点关注工业设置和应用。本文从该数据集中取 20 个物体对象进行聚类实验, 每个物体对象包含 15 张图像。具体做法是先手动裁剪出  $20 \times 15$  张物体图像, 然后缩放成像素大小是  $50 \times 50$  的图像。如图 5 所示, 文中列出了 4 类物体的一些图像, 它们分别是保险丝、星形饰物、连接板和螺帽。同样地, 本文首先将制造流程中一些具有复杂表面形貌的零部件二维图像拉伸为一维向量, 然后将该一维向量归一化为具有单位长度的向量。这里, 本文使用多项式核, 参数  $a$  和  $b$  分别是 12 和 2。



(a) 平均聚类误差



(b) 平均归一化互信息

图 4 40 类图像聚类分析(ORL 数据集)

Fig. 4 40 categories clustering analysis on ORL dataset

表 3 在 ORL 数据集上不同算法的聚类误差

Tab. 3 CE(%) of different algorithms on ORL dataset

算法	40 类	算法	40 类
LRR	36.00/36.00	KSSC	28.15/28.13
LRSC	29.30/29.13	ALKSSC	26.65/26.38
LSR1	28.00/28.63	KTRR	29.67/29.13
LSR2	30.32/30.13	BDR-Z	28.23/28.63
SSC	34.10/34.13	BDR-B	27.80/27.88
EDSC	32.10/32.63	KBDR	<b>25.45/25.75</b>

表 4 在 ORL 数据集上不同算法的归一化互信息

Tab. 4 NMI([0-1]) of different algorithms on ORL dataset

算法	40 类	算法	40 类
LRR	0.83/0.83	KSSC	0.87/0.87
LRSC	0.83/0.83	ALKSSC	<b>0.88/0.88</b>
LSR1	0.83/0.84	KTRR	0.83/0.83
LSR2	0.81/0.81	BDR-Z	0.86/0.86
SSC	0.84/0.84	BDR-B	0.86/0.85
EDSC	0.85/0.85	KBDR	<b>0.88/0.88</b>

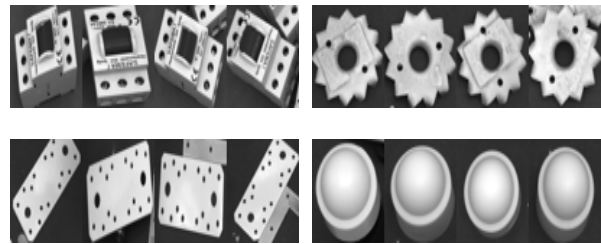


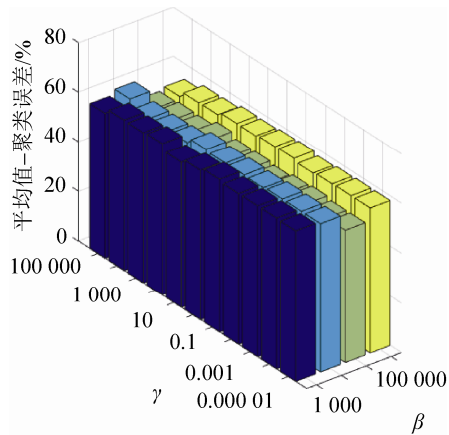
图 5 MVtec ITODD 数据集的 4 类物体

Fig. 5 4 categories of MVtec ITODD dataset

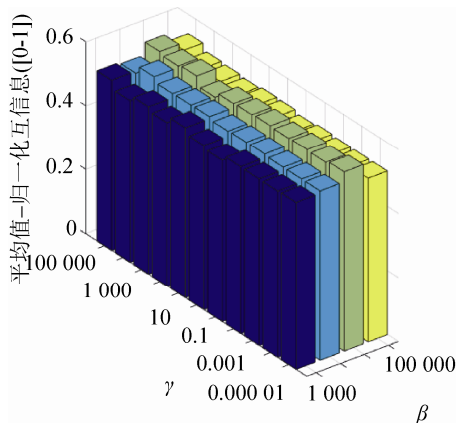
类似于上述人脸数据集实验, 本文首先搜索参数  $\beta$  和  $\gamma$  的最佳设置, 然后与其他流行子空间聚类算法进行对比实验。在不同参数设置下, 运行该算法 10 次, 分别记录这 20 类聚类图像实验中聚类误差和归一化互信息的平均值。如图 6 所示, 分别绘制了该算法在不同参数设置下的平均聚类误差和平均归一化互信息的三维直方图, 即参数  $\beta \in \{10^6, 10^5, 10^4, 10^3\}$  和  $\gamma \in \{10^5, 10^4, 10^3, 10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$ 。当参数  $\beta=10^5$ , 平均聚类误差相对较小, 并且平均归一化互信息相对较大。

对于核块对角表达子空间聚类算法, 本文取  $\beta=10^5$  和  $\gamma=0.1$ 。运行块对角表达聚类、自适应低秩核稀疏子空间聚类等这些算法 10 次, 分别记录了不同的谱型子空间聚类算法的聚类误差和归一化互信息的均值和中值, 实验数据如表 5~6 所示。从表

5~6 中可以看出, 相比于其他算法, 核块对角表达子空间聚类算法取得了较低的聚类误差和具有竞争力的归一化互信息。从核稀疏子空间聚类算法和自适应低秩核稀疏子空间聚类算法的实验数据可得出, 在核稀疏子空间聚类算法的基础上, 自适应低秩核稀疏子空间聚类算法提高了聚类质量。



(a) 平均聚类误差



(b) 平均归一化互信息

图6 20类图像聚类分析 (MVTec ITODD数据集)

Fig. 6 20 categories clustering analysis on MVTec ITODD dataset

表5 在MVTec ITODD数据集上不同算法的聚类误差

Tab. 5 CE(%) of different algorithms on MVTec ITODD dataset

算法	20类	算法	20类
LRR	61.33/61.33	KSSC	55.97/56.33
LRSC	65.93/65.67	ALKSSC	55.20/54.67
LSR1	54.80/55.00	KTRR	57.57/57.50
LSR2	58.27/58.00	BDR-Z	57.87/57.83
SSC	62.37/62.50	BDR-B	57.27/57.50
EDSC	60.03/60.17	KBDR	<b>52.73/53.00</b>

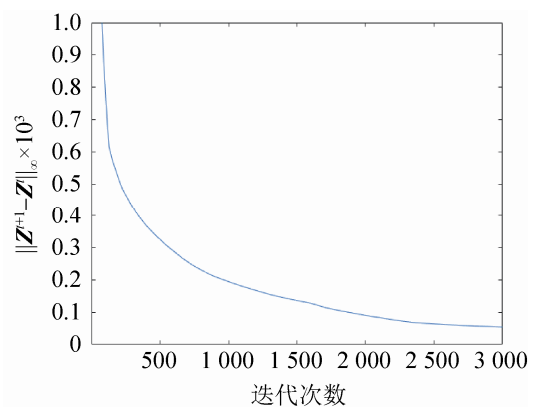
表6 在MVTec ITODD数据集上不同算法的归一化互信息

Tab. 6 NMI([0-1]) of different algorithms on MVTec ITODD dataset

算法	20类	算法	20类
LRR	0.50/0.50	KSSC	<b>0.59/0.59</b>
LRSC	0.47/0.47	ALKSSC	<b>0.59/0.59</b>
LSR1	0.52/0.52	KTRR	0.54/0.54
LSR2	0.48/0.48	BDR-Z	0.54/0.54
SSC	0.53/0.53	BDR-B	0.53/0.54
EDSC	0.52/0.52	KBDR	0.55/0.55

## 2.5 收敛性验证

核块对角表达子空间聚类算法中, 亲和力矩阵  $\mathbf{B}$  越符合块对角结构, 聚类效果越好。理论部分说明了提出的算法经过若干次迭代后, 辅助矩阵  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{W}$  和亲和力矩阵  $\mathbf{B}$  的解会收敛于稳定值。这里, 辅助矩阵  $\mathbf{W}$  是中间变量, 主要考虑辅助矩阵  $\mathbf{Z}$  和亲和力矩阵  $\mathbf{B}$  解的收敛性。对于 Extended Yale B 人脸数据集, 前面的实验表明当参数  $\beta = 10^4$ , 核块对角表达子空间聚类算法的聚类效果最佳。不失一般性, 本文取  $\{\beta, \gamma\} = \{10\ 000, 1\}$ , 在 38 类图像上进行聚类实验, 并计算矩阵  $\mathbf{Z}$  和  $\mathbf{B}$  在连续 2 次迭代上的变化, 即  $\|\mathbf{Z}^{t+1} - \mathbf{Z}^t\|_\infty$  和  $\|\mathbf{B}^{t+1} - \mathbf{B}^t\|_\infty$ 。如图 7 所示, 在大约 2 800 次迭代后  $\mathbf{Z}$  和  $\mathbf{B}$  连续 2 次的变化足够小, 最后趋于稳定。

(a)  $\|\mathbf{Z}^{t+1} - \mathbf{Z}^t\|_\infty$

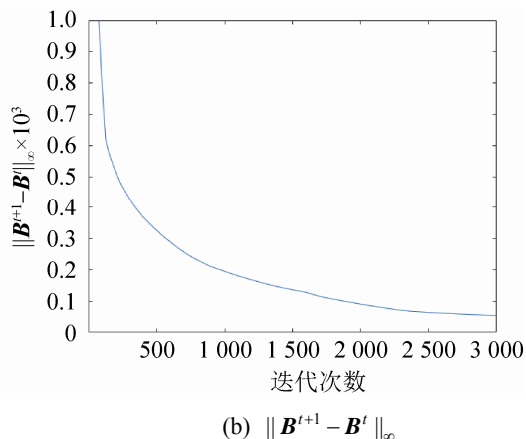


图 7 38 类图像聚类实验中核块对角表达算法的收敛曲线 (Extended Yale B 数据集)

Fig. 7 Convergence curves of KBDR algorithm for subspace clustering experiment of 38 subjects on Extended Yale B dataset

### 3 结论

本文提出了核块对角表达子空间聚类算法 (KBDR), 并且给出了该算法的收敛性分析。KBDR 算法是线性块对角表达子空间聚类算法的改进版本, 它致力于处理非线性的视觉数据。KBDR 算法首先将原始数据映射到线性可分的特征空间, 然后在特征空间中进行聚类。本文从理论角度说明了 KBDR 算法的收敛性, 而且在 Extended Yale B 数据集、ORL 数据集和 MVTec ITODD 数据集上的仿真实验表明, 相比于其他先进的谱型子空间聚类算法, 该算法确实取得了很好的聚类效果。文中使用固定的核, 接下来可以研究多核学习, 使得算法自适应选择核函数。

### 参考文献:

- [1] Barik L. Data Mining Approach for Digital Forensics Task with Deep Learning Techniques[J]. International Journal of Advanced and Applied Sciences (S2050-7488), 2020, 7(5): 56-65.
- [2] 程艳云, 边荟淞, 边长生. 基于图数据模型的聚类方法及可信度检测[J]. 系统仿真学报, 2018, 30(6): 2102-2109.  
Cheng Yanyun, Bian Huisong, Bian Changsheng. Clustering Method Based on Graph Data Model and Reliability Detection[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(6): 2102-2109.
- [3] 吕盛坪, 乐强生, 刘涛. 基于数据挖掘的印制电路板投料优化[J]. 系统仿真学报, 2018, 30(7): 2656-2665.  
Lü Shengping, Yue Qiangsheng, Liu Tao. Optimization of Material Release for Printed Circuit Board Template Based on Data Mining[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(7): 2656-2665.
- [4] Cai S S, Zhang J. Exploration of Credit Risk of P2P Platform Based on Data Mining Technology[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics (S0377-0427), 2020, 372: 112718.
- [5] Lu C, Feng J, Lin Z, et al. Subspace Clustering by Block Diagonal Representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (S0162-8828), 2019, 41(2): 487-501.
- [6] Zhang Z, Xu Y, Shao L, et al. Discriminative Block Diagonal Representation Learning for Image Recognition [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems(S2162-237X), 2018, 29(7): 3111-3125.
- [7] Xie X, Guo X, Liu G, et al. Implicit Block Diagonal Low-Rank Representation[J]. IEEE Transactions on Image Processing (S1057-7149), 2018, 27(1): 477-489.
- [8] Pourkamali-Anaraki F, Folberth J, Becker S. Efficient Solvers for Sparse Subspace Clustering[J]. Signal Processing (S0165-1684), 2020, 172: 107548.
- [9] Elhamifar E, Vidal R. Sparse Subspace Clustering: Algorithm, Theory, and Applications[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (S0162-8828), 2013, 35(11): 2765-2781.
- [10] Fan J, Chow T W S. Sparse Subspace Clustering for Data with Missing Entries and High-Rank Matrix Completion[J]. Neural Networks (S1879-2782), 2017, 93: 36-44.
- [11] Zhai H, Zhang H, Zhang L, et al. A New Sparse Subspace Clustering Algorithm for Hyperspectral Remote Sensing Imagery[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters (S1545-598X), 2016, 14(1): 43-47.
- [12] Bin C, Jianchao Y, Shuicheng Y, et al. Learning with  $l_1$ -Graph for Image Analysis[J]. IEEE Transactions on Image Processing (S1057-7149), 2010, 19(4): 858-866.
- [13] Liu G, Lin Z, Yan S, et al. Robust Recovery of Subspace Structures by Low-Rank Representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (S0162-8828), 2012, 35(1): 171-184.
- [14] Liu J, Chen Y, Zhang J, et al. Enhancing Low-Rank Subspace Clustering by Manifold Regularization[J]. IEEE Transactions on Image Processing (S1057-7149),

- 2014, 23(9): 4022-4030.
- [15] Vidal R, Favaro P. Low Rank Subspace Clustering (LRSC)[J]. Pattern Recognition Letters (S0167-8655), 2014, 43(1): 47-61.
- [16] Peng X, Yu Z, Yi Z, et al. Constructing the L2-graph for Robust Subspace Learning and Subspace Clustering [J]. IEEE Transactions on Cybernetics (S2168-2267), 2016, 47(4): 1053-1066.
- [17] Chen Y, Yi Z. Locality-Constrained Least Squares Regression for Subspace Clustering[J]. Knowledge-Based Systems (S0950-7051), 2019, 163: 51-56.
- [18] Ji P, Salzmann M, Li H. Efficient Dense Subspace Clustering[C]// IEEE Winter Conference on Applications of Computer Vision. WACV 2014: Steamboat Springs, CO, USA, 2014: 461-468.
- [19] Lu C, Feng J, Lin Z, et al. Correlation Adaptive Subspace Segmentation by Trace Lasso[C]//IEEE International Conference on Computer Vision. 14th ICCV2013: Sydney, Australia, 2013: 1345-1352.
- [20] Xu J, Xu K, Chen K, et al. Reweighted Sparse Subspace Clustering[J]. Computer Vision and Image Understanding (S1077-3142), 2015, 138: 25-37.
- [21] Dong W, Wu X, Kittler J. Sparse Subspace Clustering via Smoothed  $l_p$  Minimization[J]. Pattern Recognition Letters (S0167-8655), 2019, 125: 206-211.
- [22] Dong W, Wu X. Robust Affine Subspace Clustering via Smoothed  $l_0$  -Norm[J]. Neural Processing Letters (S1370-4621), 2019, 50(1): 785-797.
- [23] Patel V M, Vidal R. Kernel Sparse Subspace Clustering [C]//IEEE International Conference on Image Processing. ICIP 2014: Paris, France, 2014: 2849-2853.
- [24] Patel V M, Nguyen H V, Vidal R. Latent Space Sparse and Low-Rank Subspace Clustering [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing (S1932-4553), 2015, 9(4): 691-701.
- [25] Patel V M, Nguyen H V, Vidal R. Latent Space Sparse Subspace Clustering[C]//IEEE International Conference on Computer Vision. 14th ICCV 2013: Sydney, Australia, 2013: 225-232.
- [26] Ji P, Reid I, Garg R, et al. Adaptive Low-Rank Kernel Subspace Clustering[J]. arXiv preprint arXiv:1707.04974. [2021-08-11]. <https://arxiv.org/abs/1707.04974>.
- [27] Zhen L, Peng D, Wang W, et al. Kernel Truncated Regression Representation for Robust Subspace Clustering[J]. Information Sciences(S0020-0255), 2020, 524: 59-76.
- [28] Li C G, You C, Vidal R. Structured Sparse Subspace Clustering: A Joint Affinity Learning and Subspace Clustering Framework[J]. IEEE Transactions on Image Processing(S1057-7149), 2017, 26(6): 2988-3001.
- [29] Ji P, Zhang T, Li H, et al. Deep Subspace Clustering Networks[C]//Neural Information Processing Systems (NIPS). NIPS 2017: Long Beach, CA, USA, 2017: 24-33.
- [30] Drost B, Ulrich M, Bergmann P, et al. Introducing Mvtcc Itodd-A Dataset for 3d Object Recognition in Industry[C]//IEEE International Conference on Computer Vision Workshops. 16th ICCV Workshops 2017: Venice, Italy, 2017: 2200-2208.