Journal of System Simulation

Volume 33 | Issue 10 Article 15

10-18-2021

Fixed-time Event-triggered Formation Control for Multiple UAVs

Ye Shuai
1. College of Automation & College of Artificial Intelligence, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China; ;2. Jiangsu Engineering Lab for Iot Intelligent Robots (IotRobot), Nanjing 210023, China;

Guoping Jiang
1. College of Automation & College of Artificial Intelligence, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China; ;2. Jiangsu Engineering Lab for Iot Intelligent Robots (IotRobot), Nanjing 210023, China;

Yingjiang Zhou
1. College of Automation & College of Artificial Intelligence, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China; ;2. Jiangsu Engineering Lab for Iot Intelligent Robots (IotRobot), Nanjing 210023, China;

Liu Shang
1. College of Automation & College of Artificial Intelligence, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China; ;2. Jiangsu Engineering Lab for Iot Intelligent Robots (IotRobot), Nanjing 210023, China;

Fixed-time Event-triggered Formation Control for Multiple UAVs

Abstract

Abstract: To solve the quadrotor UAV formation control problem, an event-triggered fixed time formation control algorithm of multi quadrotor UAV system is studied. For the attitude loop control problem of UAV, *the switching fixed time sliding surface is selected to make the system reach the equilibrium point in a fixed time when the system state is on the sliding surface.* A *fixed-time sliding mode controller is designed so that the system state which is not on the sliding surface can reach the sliding surface within a fixed time.* In view of the position loop control problem of UAV, *the event-driven fixed time formation control strategy is studied. It is analyzed that the shortest trigger time interval of position controller is a finite value and there is no Zeno phenomenon*. The effectiveness of the proposed control algorithm is verified by numerical simulations.

Keywords

multiple quadrotor aircraft, event-triggered, fixed-time, formation control, inner and outer ring control

Recommended Citation

Ye Shuai, Jiang Guoping, Zhou Yingjiang, Liu Shang. Fixed-time Event-triggered Formation Control for Multiple UAVs[J]. Journal of System Simulation, 2021, 33(10): 2420-2431.

第 33 卷第 10 期 系统仿真学报© Vol. 33 No. 10
2021 年 10 月 Journal of System Simulation Oct. 2021

基于事件触发的多无人机固定时间编队控制

叶帅[1,2]，蒋国平[1,2]，周映江[1,2*]，刘尚[1,2]
(1. 南京邮电大学 自动化学院、人工智能学院，江苏 南京 210023；2. 江苏省物联网智能机器人工程实验室，江苏 南京 210023)

摘要：为解决四旋翼无人机编队控制问题，提出基于事件触发的多四旋翼无人机系统固定时间编队控制算法。针对无人机的姿态环控制，*选取切换的固定时间滑模面，使得当系统状态在滑模面上时，系统能够在固定时间到达平衡点*。当系统状态不在滑模面上时，*设计固定时间滑模控制器，使得不在滑模面上的系统状态，能够在固定时间内到达滑模面*。针对无人机的位置环控制，*研究了事件驱动下的固定时间编队控制策略。分析表明：位置控制器最短触发时间间隔是一个有限的值，证明系统不存在 Zeno 现象*。通过数值仿真验证了所提控制算法的有效性。

关键词：多四旋翼无人机；事件触发；固定时间；编队控制；内外环控制
中图分类号：TP391 文献标志码：A 文章编号：1004-731X (2021) 10-2420-12
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.20-0613

Fixed-time Event-triggered Formation Control for Multiple UAVs

Ye Shuai[1,2], *Jiang Guoping*[1,2], *Zhou Yingjiang*[1,2*], *Liu Shang*[1,2]
(1. College of Automation & College of Artificial Intelligence, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China;
2. Jiangsu Engineering Lab for Iot Intelligent Robots (IotRobot), Nanjing 210023, China)

Abstract: To solve the quadrotor UAV formation control problem, an event-triggered fixed time formation control algorithm of multi quadrotor UAV system is studied. For the attitude loop control problem of UAV, *the switching fixed time sliding surface is selected to make the system reach the equilibrium point in a fixed time when the system state is on the sliding surface.* A *fixed-time sliding mode controller is designed so that the system state which is not on the sliding surface can reach the sliding surface within a fixed time.* In view of the position loop control problem of UAV, *the event-driven fixed time formation control strategy is studied. It is analyzed that the shortest trigger time interval of position controller is a finite value and there is no Zeno phenomenon*. The effectiveness of the proposed control algorithm is verified by numerical simulations.

Keywords: multiple quadrotor aircraft; event-triggered; fixed-time; formation control; inner and outer ring control

引言

四旋翼无人机因其结构简单、控制方便、低成本、易维护等特点，受到越来越多的关注，国内外研究表明，四旋翼无人机在径规划[1]、航拍摄影[2]、军事空战[3]等方面均已实现了良好应用。

多四旋翼无人机编队控制问题[4-5]一直受到广泛关注，在编队系统中每个无人机都是一个独立的自主体，不仅自身可以进行自主控制，而且可以与邻居无人机实现信息交互，从而实现编队控制。相比单个无人机自主控制，多四旋翼无人机编队控制可以增强对环境的适应性和提高任务的

收稿日期：2020-08-20 修回日期：2020-10-27
基金项目：国家自然科学基金(616033196，61873326)；江苏省研究生科研与实践创新计划(KYCX19_0975)
第一作者：叶帅(1996-)，男，硕士，研究方向为无人机的编队优化控制。E-mail：15950511893@163.com
通讯作者：周映江(1985-)，男，博士，讲师，研究方向为多智能体系统及其应用。E-mail：zhouyj@njupt.edu.cn

执行效率，每架无人机不仅可以在各自空间完成各自的任务，还可以协同完成复杂任务，使得整体的工作效率得到提升。如果无人机编队中出现某些成员遭遇故障或意外不能继续执行任务，系统将任务自动分配给其他无人机，不会影响完成任务，因此编队系统具有更高的容错性。随着多智能系统的快速发展，分布式编队控制引起了人们的研究兴趣，并且在多个领域都有应用。文献[6]研究了具有绝对/相对阻尼的多分数阶系统的分布式编队控制问题，文献[7]利用多智能体理论和有限时间控制方法，提出了一种基于扰动观测器的多四旋翼飞行器分布式编队控制方法。

多智能体的编队控制大多数结果都是渐近时间收敛的结果，它们的收敛时间都是无穷大的。但是控制算法的收敛速率问题一直是大家的关注重点，有限时间稳定性算法[8]相比于传统渐进稳定算法，前者具有较好的扰动抑制性能和较快的收敛速度[9]。在有限时间一致性的算法研究上，文献[10]利用一种新的终端滑模控制方法，研究了刚性机器人连续有限时间控制问题。除此之外，有限时间收敛算法在多智能体系统里也应用广泛，文献[11]研究了存在有界扰动的二阶多智能体系统的分布式有限时间一致性问题。文献[12]研究了异构高阶多智能体系统的有限时间一致协议。为了解决有限时间算法依赖于初始状态这一限制，基于固定时间稳定性的研究方法被提出[13]，固定时间算法的收敛时间是一个不依赖于系统的初始状态的固定值。目前关于固定时间收敛的控制算法也有很多研究成果，文献[14]重点研究了具有未知动力学的一阶多智能体系统固定时间一致性的问题。文献[15]针对非线性多智能体系统研究了无领导和有领导两种情况下的固定时间一致性问题。

在上述研究中考虑的是连续控制策略，即时间驱动控制器采用时钟周期采样来获取系统的状态信息，信息的更新是依靠高频的周期传感器采样。事件触发控制策略不同于传统的时间驱动算法，其最大的特点是非周期采样，以达到节约通讯资源和减少计算的目的，当多四旋翼无人机系统状态趋于一致时，高频的传感器采样和控制器值的更新会造成大量不必要的资源浪费。在多四旋翼无人机编队控制中，无人机之间依靠通讯网络交换状态信息，但随着无人机个数的增加，时间驱动策略相应所需的通信带宽也会呈指数增加，巨大的网络负荷有可能会造成网络崩溃，以至于无人机失去控制乃至坠毁[16]。因此事件触发控制[17-18]是一种有效避免资源浪费的方法。基于事件触发的编队方法也已经在多智能体系统[19-20]上得到应用。文献[21]将事件触发控制运用在多智能体一致性的问题上，而且针对不同的策略对系统状态设计了相应的事件触发函数，并证明了不存在 Zeno 现象。文献[22]研究了一般线性多智能体系统的分布式自适应事件触发容错一致性问题，采用了分布式自适应在线更新策略，避免了拉普拉斯矩阵最小特征值的计算。文献[23]研究了多智能体系统的事件触发分布式预测控制问题，基于输入状态稳定性推导出了相应的事件触发条件，只有在满足触发条件时才能解决分布式预测控制优化问题，从而降低了通信负担和计算负载。文献[24]在基于事件驱动的基础上，解决了带饱和输入条件下的多智能体系统一致性问题。

结合以上研究，本文充分考虑了事件触发控制的优势，将其与固定时间收敛算法相结合，应用于多四旋翼无人机系统上，提出了基于事件触发的多四旋翼无人机系统固定时间编队控制方法。其中多四旋翼无人机系统采用内外环控制方法，针对无人机的位置环，考虑事件驱动下的控制问题，研究了其固定时间编队控制策略。针对无人机的姿态环，选取切换的固定时间滑模面，使得在滑模面上的状态能够在固定时间到达平衡点。同时，设计固定时间滑模控制器，使得状态能够在固定时间内到达滑模面。通过理论证明，验证了事件触发控制器不存在 Zeno 现象。仿真结果可以看出，与传统的时间驱动相比，分布式事

https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal/vol33/iss10/15
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.20-0613

第 33 卷第 10 期 系统仿真学报 Vol. 33 No. 10
2021 年 10 月 Journal of System Simulation Oct. 2021

件驱动算法能够降低控制器更新频率、减小计算负担；而固定时间算法使得整个系统收敛速度更快、精度更高。

1 问题描述

1.1 代数图论

一个具有 n 架无人机的多四旋翼无人机系统，用无向图 $G=(V,E,\boldsymbol{A})$ 表示无人机间的拓扑连接关系。在图 G 中，$V=\{1,2,\cdots,n\}$ 是图中节点的集合，$i\in V$ 表示第 i 架无人机。E 是图中边的集合，$(i,j)\in E$ 表示节点 i 和 j 能够通讯、互换信息。$\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 是图的邻接矩阵，当 $(i,j)\in E$ 时，$a_{ij}=1$，否则 $a_{ij}=0$。拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}=\left[l_{ij}\right]_{n\times n}$ 可以表示为 $l_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}$，$l_{ij}=-a_{ij}$，$i\neq j$。

1.2 多四旋翼无人机系统模型

四旋翼无人机是四输入、六输出的欠驱动系统，通过改变无人机四个旋翼电机的转速，可以实现升力的变化，从而使无人机呈现不同的飞行姿态，到达空间中的指定位置。假设编队中四旋翼无人机为同构系统，对其进行受力分析，建立位置子系统、姿态子系统模型，如式(1)，(2)所示：

$$\begin{cases}\ddot{x}_i=(\cos\varphi_i\sin\theta_i\cos\psi_i+\sin\varphi_i\sin\psi_i)\cdot\dfrac{T_{i1}}{m}\\ \ddot{y}_i=(\cos\varphi_i\sin\theta_i\sin\psi_i-\sin\varphi_i\cos\psi_i)\cdot\dfrac{T_{i1}}{m}\\ \ddot{z}_i=\cos\varphi_i\cos\theta_i\cdot\dfrac{T_{i1}}{m}-g\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}\ddot{\varphi}_i=J_x^{-1}(J_y-J_z)\dot{\theta}_i\dot{\psi}_i+J_x^{-1}\cdot T_{i2}\\ \ddot{\theta}_i=J_y^{-1}(J_z-J_x)\dot{\varphi}_i\dot{\psi}_i+J_y^{-1}\cdot T_{i3}\\ \ddot{\psi}_i=J_z^{-1}(J_x-J_y)\dot{\theta}_i\dot{\varphi}_i+J_z^{-1}\cdot T_{i4}\end{cases}\tag{2}$$

式中：$[x_i, y_i, z_i]$ 为无人机 i 在三维空间中的位置；$[\varphi_i, \theta_i, \psi_i]$ 分别为无人机的俯仰、翻滚和偏航姿态角；m 为无人机的质量；g 为重力加速度，$[J_x, J_y, J_z]$ 分别为绕 x, y, z 轴的转动惯量；无人机的 4 个输入量用 $T_{ir}\,(r=1,2,3,4)$ 表示。

1.3 相关引理

引理 1[25] 假设 $\boldsymbol{L}$ 为图 G 的拉普拉斯矩阵。则对于任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{w}=[w_1, w_2, \cdots, w_n]^{\mathrm{T}}$，公式 $\lambda_2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{w}\leqslant\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{w}$ 恒成立，其中 $\boldsymbol{L}^2$ 表示 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}$，$\lambda_2$ 为 $\boldsymbol{L}$ 的最小非零特征值。此外，若向量 $\boldsymbol{w}$ 满足 $1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}=0$，则公式 $\lambda_2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\leqslant\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{w}$ 恒成立，其中 1 为 n 阶单位列向量。

引理 2[26] 若向量 $\boldsymbol{e}(t)\in R^n$ 连续可微，则有不等式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{e}(t)\|_k\leqslant\|\dot{\boldsymbol{e}}(t)\|_k$，$k=1,2,\cdots,\infty$ 恒成立。

引理 3[11] 对于任意向量 $\boldsymbol{e}(t)\in R^n$，如果能找到一个径向连续无界函数 $V:R^n\rightarrow R^+\cup\{0\}$，满足 $\dot{V}(\boldsymbol{e}(t))\leqslant-aV(\boldsymbol{e}(t))^p-bV(\boldsymbol{e}(t))^q$，$a,b>0$，$p\in(0,1)$，$q\in(1,\infty)$；则可以实现全局固定时间稳定，且稳定时间 T 满足：

$$T\leqslant T_{\max}=\frac{1}{(1-p)a}+\frac{1}{(q-1)b}$$

2 控制器设计

本节将研究多四旋翼无人机系统的固定时间编队控制问题，设计事件触发控制器和固定时间滑模控制器，使得位置子系统(1)和姿态子系统(2)在固定时间内实现编队。

2.1 位置子系统控制器设计

对系统(1)设计事件触发控制器。定义状态向量 $\boldsymbol{P}_i(t)=[x_i, y_i, z_i]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}_i(t)=\dot{\boldsymbol{P}}_i(t)$，则位置子系统状态方程为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{P}}_i(t)=\boldsymbol{Q}_i(t)\\ \dot{\boldsymbol{Q}}_i(t)=\boldsymbol{u}_i(t)\end{cases}\tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{\mu}_i(t)$ 为无人机 i 的虚拟控制输入向量，$\boldsymbol{\mu}_i(t)=[u_{i1}(t), u_{i2}(t), u_{i3}(t)]^{\mathrm{T}}$。

假设 $\{t_i^0=0, t_i^1, \cdots, t_i^k, t_i^{k+1}, \cdots\}$ 为无人机 i 的触发时间序列，定义中间向量 $\boldsymbol{h}_i(t_i^k)$：

$$\boldsymbol{h}_i(t_i^k)=\beta_1\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\boldsymbol{P}_i(t_i^k)-\boldsymbol{P}_j(t_i^k)\right)+\beta_2\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\boldsymbol{Q}_i(t_i^k)-\boldsymbol{Q}_j(t_i^k)\right)\tag{4}$$

式中：β_1, β_2 为参数且满足 $0<\beta_1<\lambda_2\cdot\beta_2^2$；$\lambda_2$ 为拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的最小非零特征值。

对于 $t\in\left[t_i^k, t_i^{k+1}\right)$，无人机 i 的固定时间控制器为：

$$\boldsymbol{u}_i(t)= -\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)-\gamma_1\operatorname{sig}\left(\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right)^{\alpha_1}-\gamma_2\operatorname{sig}\left(\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right)^{\alpha_2} \tag{5}$$

式中：$\gamma_1>0$，$\gamma_2>0$，$a_1\in(0,1)$，$a_2\in(1,\infty)$，其中 $\operatorname{sig}(*^{\alpha})=\operatorname{sign}(*)|*|^{\alpha}$，$\operatorname{sign}(*)$ 是标准符号函数。

对每个无人机 i，时变误差向量为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_i^{\boldsymbol{P}}(t)=\boldsymbol{P}_i\left(t_i^k\right)-\boldsymbol{P}_i(t)\\ \boldsymbol{e}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)=\boldsymbol{Q}_i\left(t_i^k\right)-\boldsymbol{Q}_i(t)\end{cases}, t\in\left[t_i^k, t_i^{k+1}\right) \tag{6}$$

辅助向量为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{P}}(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\boldsymbol{P}_i(t)-\boldsymbol{P}_j(t)\right)\\ \boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\boldsymbol{Q}_i(t)-\boldsymbol{Q}_j(t)\right)\\ \boldsymbol{\varepsilon}_i^{\boldsymbol{P}}(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\boldsymbol{e}_i^{\boldsymbol{P}}(t)-\boldsymbol{e}_j^{\boldsymbol{P}}(t)\right)\\ \boldsymbol{\varepsilon}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\boldsymbol{e}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)-\boldsymbol{e}_j^{\boldsymbol{Q}}(t)\right)\end{cases} \tag{7}$$

注释 1. $\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{P}}(t), \boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)$ 是时变向量，与状态 $\boldsymbol{P}_i(t)$，$\boldsymbol{Q}_i(t)$ 相关；状态为触发时刻的值 $\boldsymbol{P}_i\left(t_i^k\right), \boldsymbol{Q}_i\left(t_i^k\right)$ 时，对应得到 $\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{P}}\left(t_i^k\right), \boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{Q}}\left(t_i^k\right)$ 的表达式。

根据式(7)，式(4)等价于：

$$\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)=\beta_1\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{P}}\left(t_i^k\right)+\beta_2\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{Q}}\left(t_i^k\right) \tag{8}$$

四旋翼无人机 i 的事件函数为：

$$f_i(t)=\left\|\boldsymbol{g}_i(t)\right\|-\eta\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\| \tag{9}$$

式中：向量 $\boldsymbol{g}_i(t)=\beta_1\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\boldsymbol{P}}(t)+\beta_2\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)$；$\eta>0$ 为事件函数的参数；$\|*\|$ 是二范数 $\|*\|_2$ 的缩写形式。

在 t_i^k 时刻，事件被触发并且控制器中的状态值得到更新，此时 $\left\|\boldsymbol{g}_i(t)\right\|=0$，$\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|\geqslant 0$。当 $t\in\left[t_i^k, t_i^{k+1}\right)$ 时，$f_i(t)\leqslant 0$。在 t_i^{k+1} 时刻，事件再次被触发，并重复上述过程，所以可以认为事件函数 $f_i(t)\leqslant 0$ 一定成立。

图 1 详细的描述了在事件触发控制算法下，无人机之间的通信与控制过程。每架无人机的传感器都在持续的测量自身的状态参数，当无人机满足事件触发条件时事件被触发，如果式(9)事件函数值小于 0，那么对于无人机来说就没有必要更新其控制输入。一旦事件检测器测量到误差函数超过阈值，即 $f_i(t)=\left\|\boldsymbol{g}_i(t)\right\|-\eta\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|>0$，控制器就会更新它的控制输入并且将它的状态信息传递给相邻节点，与此同时也会将 $\boldsymbol{g}_i(t)=\beta_1\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\boldsymbol{P}}(t)+\beta_2\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)$ 置零。

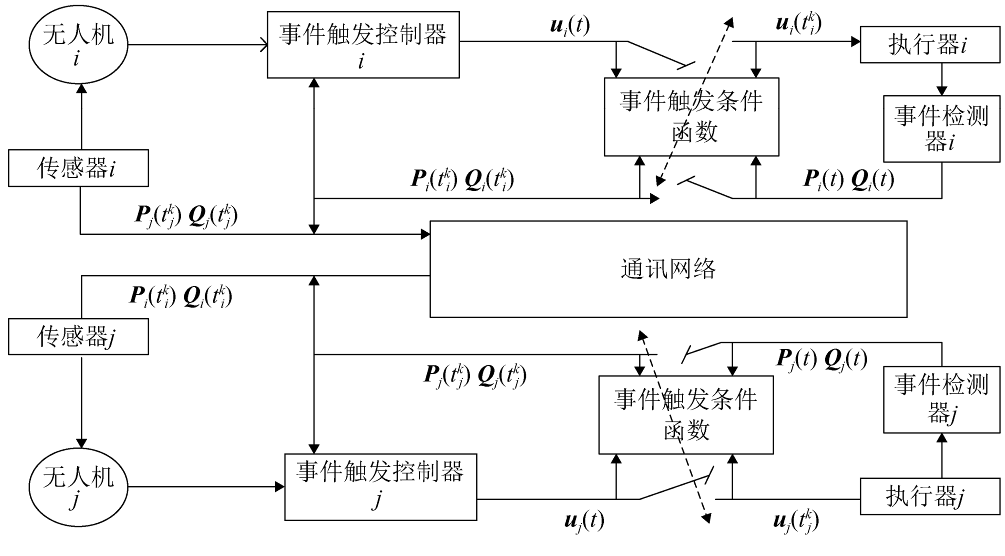

图 1　多无人机事件触发算法原理图
Fig. 1　Schematic diagram of multi-UAV event-triggered algorithm

https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal/vol33/iss10/15
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.20-0613

第 33 卷第 10 期 系统仿真学报 Vol. 33 No. 10
2021 年 10 月 Journal of System Simulation Oct. 2021

根据事件式(9)和注释 1，可以得到：

$$\|\boldsymbol{g}_i(t)\| \leqslant \eta \left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|；$$

将式(6)，(7)带入式(8)可得：

$$\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)=\boldsymbol{h}_i(t)+\boldsymbol{g}_i(t)；$$

根据范数的性质

$$\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|=\|\boldsymbol{h}_i(t)+\boldsymbol{g}_i(t)\| \leqslant \|\boldsymbol{h}_i(t)\|+\|\boldsymbol{g}_i(t)\|；$$

因此可以得到不等式：

$$\begin{cases}\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\| \leqslant \dfrac{1}{1-\eta}\|\boldsymbol{h}_i(t)\| \\ \|\boldsymbol{g}_i(t)\| \leqslant \dfrac{\eta}{1-\eta}\|\boldsymbol{h}_i(t)\|\end{cases} \tag{10}$$

注释 2. 本小节所有定义与 $\boldsymbol{P}_i(t), \boldsymbol{Q}_i(t)$ 相关的向量皆为三维向量，在后续证明过程中会用到向量的分量形式。所以统一用角标 $i1, i2, i3$ 表示向量的分量，即 $\boldsymbol{P}_i(t)=\left[P_{i1}(t), P_{i2}(t), P_{i3}(t)\right]^{\mathrm{T}}$。其余三维向量形式类似，在此不一一例举。

定义 $\boldsymbol{P}(t)=\left[\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}(t), \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}(t), \cdots, \boldsymbol{P}_n^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}}$，依照 $\boldsymbol{P}(t)$ 形式定义 $3n$ 维向量 $\boldsymbol{P}(t)$，$\boldsymbol{Q}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$，$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{P}}(t)$，$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{Q}}(t)$，$\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}}(t)$，$\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{Q}}(t)$，$\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{P}}(t)$，$\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{Q}}(t)$，$\boldsymbol{h}(t)$，$\boldsymbol{g}(t)$。可以得到向量间关系为：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}}(t)=\bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{P}(t),\ \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{Q}}(t)=\bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{q}(t) \\ &\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{P}}(t)=\bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{P}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{Q}}(t)=\bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{Q}}(t)\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{I}_3 \otimes \boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{I}_3$ 为 3 阶单位矩阵。

定理 1 假设多四旋翼无人机系统对应的图 G 是无向连通的；对无人机 i 定义式(9)形式事件函数，和式(5)形式基于事件触发的控制器，当事件函数参数与控制器参数满足式(12)时，系统(3)能够在固定时间内实现位置子系统编队控制。

$$\begin{cases}\beta_1<\lambda_2\beta_2^2 \\ \eta<\min\left\{\dfrac{\lambda_2\beta_2^2-\beta_1}{3\lambda_2\beta_2^2-\beta_1}, 3^{\frac{\alpha_1-1}{2}}, 3^{\frac{1-\alpha_2}{2}}, 3^{-1}\right\}\end{cases} \tag{12}$$

证明 首先证明系统渐进稳定，选取李雅普诺夫函数：

$$V(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}(t) \\ \boldsymbol{Q}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2\beta_1\beta_2\bar{\boldsymbol{L}}^2 & \beta_1\bar{\boldsymbol{L}} \\ \beta_1\bar{\boldsymbol{L}} & \beta_2\bar{\boldsymbol{L}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}(t) \\ \boldsymbol{Q}(t)\end{bmatrix} \tag{13}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{L}}^2$ 是 $\bar{\boldsymbol{L}}\cdot\bar{\boldsymbol{L}}$ 的缩写，$\bar{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{I}_3 \otimes \boldsymbol{L}$。

根据引理 1 可得：

$$V(t) \geqslant \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}(t) \\ \boldsymbol{Q}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2\lambda_2\beta_1\beta_2\bar{\boldsymbol{L}} & \beta_1\bar{\boldsymbol{L}} \\ \beta_1\bar{\boldsymbol{L}} & \beta_2\bar{\boldsymbol{L}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}(t) \\ \boldsymbol{Q}(t)\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{L}}^{1/2}\boldsymbol{P}(t) \\ \bar{\boldsymbol{L}}^{1/2}\boldsymbol{Q}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega_1}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{L}}^{1/2}\boldsymbol{P}(t) \\ \bar{\boldsymbol{L}}^{1/2}\boldsymbol{Q}(t)\end{bmatrix}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_1=\begin{bmatrix}2\lambda_2\beta_1\beta_2\boldsymbol{I}_{3n} & \beta_1\boldsymbol{I}_{3n} \\ \beta_1\boldsymbol{I}_{3n} & \beta_2\boldsymbol{I}_{3n}\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{I}_{3n}$ 为 $3n$ 阶单位矩阵。

矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_1$ 正定则 $V(t) \geqslant 0$。采用文献[26]中的引理 5：

$$\begin{aligned}0 \leqslant \boldsymbol{\Omega}_1 \quad &\Leftrightarrow \quad 0<\beta_2,\ 0<\beta_2-\beta_1^2/(2\lambda_2\beta_1\beta_2) \\ &\Leftrightarrow \quad \beta_1<2\lambda_2\beta_2^2\end{aligned}$$

所以，当 $\beta_1<2\lambda_2\beta_2^2$ 时，$V(t)$ 是一个正定的李雅普诺夫函数。

对式(13)求导，可得：

$$\dot{V}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}(t) \\ \boldsymbol{Q}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2\beta_1\beta_2\bar{\boldsymbol{L}}^2 & \beta_1\bar{\boldsymbol{L}} \\ \beta_1\bar{\boldsymbol{L}} & \beta_2\bar{\boldsymbol{L}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}(t) \\ \boldsymbol{u}(t)\end{bmatrix}=$$

$$\begin{aligned}&2\beta_1\beta_2\boldsymbol{P}(t)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{L}}^2\boldsymbol{Q}(t)+\boldsymbol{\beta_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(t)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{Q}(t)+ \\ &\left(\beta_1\bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{P}(t)+\beta_2\bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{Q}(t)\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(t) \leqslant \\ &2\beta_1\beta_2\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{Q}}(t)+ \\ &\lambda_2^{-1}\beta_1\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{Q}}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{Q}}(t)+\boldsymbol{h}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(t)\end{aligned}$$

定义变量 $\varsigma_1(t), \varsigma_2(t), \varsigma_3(t), \varsigma_4(t)$：

$$\varsigma_1(t)=-\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{h}_i(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right) \tag{14}$$

$$\varsigma_2(t)=-\sum_{i=1}^{n}\gamma_1\boldsymbol{h}_i(t)^{\mathrm{T}}\operatorname{sig}\left(\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right)^{\alpha_1} \tag{15}$$

$$\varsigma_3(t)=-\sum_{i=1}^{n}\gamma_2\boldsymbol{h}_i(t)^{\mathrm{T}}\operatorname{sig}\left(\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right)^{\alpha_2} \tag{16}$$

$$\varsigma_4(t)=2\beta_1\beta_2\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{Q}}(t) \tag{17}$$

所以，$\boldsymbol{h}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(t)=\varsigma_1(t)+\varsigma_2(t)+\varsigma_3(t)$。接着分别缩放 $\varsigma_1(t), \varsigma_2(t), \varsigma_3(t)$。

$$\begin{aligned}&\varsigma_1(t)=-\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{h}_i(t)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{g}_i(t)+\boldsymbol{h}_i(t)\right)=\\&-\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{h}_i(t)\right\|^2-\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{h}_i(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_i(t)\leqslant\\&-\left\|\boldsymbol{h}(t)\right\|^2+\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{h}_i(t)\right\|\cdot\left\|\boldsymbol{g}_i(t)\right\|\end{aligned}$$

参考文献[27]，并根据式(10)和二范数的定义，可得：

$$\begin{aligned}&\varsigma_1(t)+\varsigma_4(t)\leqslant\\&\left(\varsigma_4(t)-\left\|\boldsymbol{h}(t)\right\|^2\right)+\frac{\eta}{1-\eta}\left\|\boldsymbol{h}(t)\right\|^2=\\&-\beta_1^2\left\|\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}}(t)\right\|^2-\beta_2^2\left\|\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{Q}}(t)\right\|^2+\\&\frac{\eta}{1-\eta}\left\|\beta_1\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}}(t)+\beta_2\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{Q}}(t)\right\|^2\leqslant\\&-\beta_1^2\left\|\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}}(t)\right\|^2-\beta_2^2\left\|\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{Q}}(t)\right\|^2+\\&\frac{2\eta}{1-\eta}\left(\beta_1^2\left\|\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}}(t)\right\|^2+\beta_2^2\left\|\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{Q}}(t)\right\|^2\right)=\\&-\frac{1-3\eta}{1-\eta}\left(\beta_1^2\left\|\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}}(t)\right\|^2+\beta_2^2\left\|\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{Q}}(t)\right\|^2\right)\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}&\varsigma_2(t)=-\sum_{i=1}^{n}\gamma_1\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)^{\mathrm{T}}\operatorname{sig}\left(\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right)^{\alpha_1}+\\&\sum_{i=1}^{n}\gamma_1\boldsymbol{g}_i(t)^{\mathrm{T}}\operatorname{sig}\left(\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right)^{\alpha_1}\leqslant\\&-\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{h}_{ij}(t)\operatorname{sig}\left(\boldsymbol{h}_{ij}\left(t_i^k\right)\right)^{\alpha_1}+\\&\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\left(\left\|\boldsymbol{g}_i(t)\right\|\left\|\operatorname{sig}\left(\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right)^{\alpha_1}\right\|\right)\leqslant\\&-\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}\left|\boldsymbol{h}_{ij}\left(t_i^k\right)\right|^{\alpha_1+1}+\\&\eta\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\left(\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|\cdot\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)^{\alpha_1}\right\|\right)\end{aligned}$$

采用文献[28]中的引理 1 可得：

$$\begin{aligned}&\varsigma_2(t)\leqslant-\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{3}\left|h_{ij}\left(t_i^k\right)\right|^2\right)^{\frac{\alpha_1+1}{2}}+\\&3^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\eta\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|^{\alpha_1+1}\leqslant\\&-\gamma_1\left(1-3^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\eta\right)\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|^{\alpha_1+1}\end{aligned}\tag{19}$$

$\varsigma_3(t)$ 缩放步骤与 $\varsigma_2(t)$ 类似，这里直接给出缩放后的结果：

$$\varsigma_3(t)\leqslant-\gamma_2\left(3^{\frac{1-\alpha_2}{2}}-\eta\right)\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|^{\alpha_2+1}\tag{20}$$

将式(14)~(19)带入 $\dot{V}(t)$：

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t)\leqslant-\left(\frac{1-3\eta}{1-\eta}\beta_1^2\right)\left\|\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}}(t)\right\|^2-\\&\left(\frac{1-3\eta}{1-\eta}\beta_2^2-\frac{\beta_1}{\lambda_2}\right)\left\|\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{Q}}(t)\right\|^2-\\&\gamma_1\left(1-3^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\eta\right)\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|^{\alpha_1+1}-\\&\gamma_2\left(3^{\frac{1-\alpha_2}{2}}-\eta\right)\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|^{\alpha_2+1}\end{aligned}\tag{21}$$

根据式(12)参数约束条件，可得 $\dot{V}(t)\leqslant0$；当且仅当 $\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{P}}(t)=\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)=\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)=\boldsymbol{0}_{3n}$ 时，系统所有状态达成一致，$\dot{V}(t)=0$。系统(3)渐进稳定。

在渐近稳定基础上，证明系统固定时间稳定。定义矩阵 $\boldsymbol{\Omega_2}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\beta_1\beta_2\bar{\boldsymbol{L}} & \beta_1\boldsymbol{I}_{3n}\\ \beta_1\boldsymbol{I}_{3n} & \beta_2\boldsymbol{I}_{3n}\end{bmatrix}$，根据式(13)：

$$\begin{aligned}&V(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}(t)\\\boldsymbol{Q}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2\beta_1\beta_2\bar{\boldsymbol{L}}^2 & \beta_1\bar{\boldsymbol{L}}\\ \beta_1\bar{\boldsymbol{L}} & \beta_2\bar{\boldsymbol{L}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}(t)\\\boldsymbol{Q}(t)\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{L}}^{1/2}\boldsymbol{P}(t)\\\bar{\boldsymbol{L}}^{1/2}\boldsymbol{Q}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega_2}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{L}}^{1/2}\boldsymbol{P}(t)\\\bar{\boldsymbol{L}}^{1/2}\boldsymbol{Q}(t)\end{bmatrix}\leqslant\\&\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Omega_2})\left(\boldsymbol{P}(t)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{P}(t)+\boldsymbol{Q}(t)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{Q}(t)\right)\leqslant\\&\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Omega_2})}{\lambda_2}\left(\left\|\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}}(t)\right\|^2+\left\|\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{Q}}(t)\right\|^2\right)\end{aligned}$$

其中 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Omega_2})$ 为矩阵 $\boldsymbol{\Omega_2}$ 的最大特征值。

根据文献[26]中引理 6 可知：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|^2\geqslant\\&\kappa_1\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_1^2\left\|\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{P}}\left(t_i^k\right)\right\|^2+\beta_2^2\left\|\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{Q}}\left(t_i^k\right)\right\|^2\right)=\\&\kappa_1\left(\beta_1^2\left\|\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{P}}\left(t_i^k\right)\right\|^2+\beta_2^2\left\|\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{Q}}\left(t_i^k\right)\right\|^2\right)\geqslant\\&\kappa_2V\left(t_i^k\right)\end{aligned}\tag{22}$$

https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal/vol33/iss10/15
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.20-0613

第 33 卷第 10 期 系统仿真学报 Vol. 33 No. 10
2021 年 10 月 Journal of System Simulation Oct. 2021

式中：$\kappa_1=\min\limits_{\bar{\boldsymbol{h}}_i\left(t_i^k\right)}\left\{\bar{\boldsymbol{h}}_i\left(t_i^k\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}_{3n}\otimes\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right)\bar{\boldsymbol{h}}_i\left(t_i^k\right)\right\}$；$\kappa_2=\dfrac{\lambda_2\kappa_1}{\lambda_{\max}\left(\boldsymbol{\Omega}_2\right)}\cdot\min\left\{\beta_1^2,\beta_2^2\right\}>0$；$\bar{\boldsymbol{h}}_i\left(t_i^k\right)$ 为 $\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)$ 的单位向量。

在式(21)基础上继续缩放 $\dot{V}(t)$：

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)\leqslant&-\gamma_1\left(1-3^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\eta\right)\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|^{\alpha_1+1}\\&-\gamma_2\left(3^{\frac{1-\alpha_2}{2}}-\eta\right)\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|^{\alpha_2+1}\leqslant\\&-\gamma_1\left(1-3^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\eta\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|^2\right)^{\frac{\alpha_1+1}{2}}\\&-\gamma_2\left(3^{\frac{1-\alpha_2}{2}}-\eta\right)n^{\frac{1-\alpha_2}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|^2\right)^{\frac{\alpha_2+1}{2}}\leqslant\\&-\kappa_3V\left(t_i^k\right)^{\frac{\alpha_1+1}{2}}-\kappa_4V\left(t_i^k\right)^{\frac{\alpha_2+1}{2}}\end{aligned}$$

式中：$\kappa_3=\gamma_1\left(1-3^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\eta\right)\kappa_2^{\frac{\alpha_1+1}{2}}>0$；$\kappa_4=\gamma_2\left(3^{\frac{1-\alpha_2}{2}}-\eta\right)n^{\frac{1-\alpha_2}{2}}\kappa_2^{\frac{\alpha_2+1}{2}}>0$。

根据 $\dot{V}(t)\leqslant 0$，对于每一个 $t\in\left[t_i^k,t_i^{k+1}\right)$，都有 $V\left(t_i^k\right)\geqslant V(t)$，所以：

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)\leqslant&-\kappa_3V\left(t_i^k\right)^{\frac{\alpha_1+1}{2}}-\kappa_4V\left(t_i^k\right)^{\frac{\alpha_2+1}{2}}\leqslant\\&-\kappa_3V(t)^{\frac{\alpha_1+1}{2}}-\kappa_4V(t)^{\frac{\alpha_2+1}{2}}\end{aligned}$$

利用引理 3 可得，系统全局固定时间稳定，且稳定时间 T^p 满足：

$$T^P\leqslant T_{max}^P=\frac{2}{(1-\alpha_1)\kappa_3}+\frac{2}{(\alpha_2-1)\kappa_4}\tag{23}$$

2.2 位置控制器最短触发时间间隔

在基于事件触发控制策略中，称 $\{t_i^{k+1}-t_i^k\}$ 为控制器的触发时间间隔。当触发时间间隔趋近于 0 时，在单位时间内控制器会被无限次触发(称之为 Zeno 现象)，导致事件驱动算法退化成传统连续控制，影响事件触发控制器性能。所以需要证明所设计的控制器(5)的触发时间间隔具有下界。

定理 2 针对系统(3)，设计式(5)基于事件驱动的控制器，选择式(9)作为事件函数控制器事件被触发时刻，则触发时间间隔 $\left\{t_i^{k+1}-t_i^k\right\}$ 存在大于零的下界。

证明 根据事件触发的过程分析可知，触发时间间隔 $\left\{t_i^{k+1}-t_i^k\right\}$，与 $\left\|\boldsymbol{g}_i(t)\right\|$ 从零增长到 $\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|$ 的时间相同。所以根据引理 2，对 $t\in\left[t_i^k,t_i^{k+1}\right)$ 都有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\boldsymbol{g}_i(t)\right\|\right)\leqslant\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{g}_i(t)\right)\right\|\tag{24}$$

带入 $\boldsymbol{g}_i(t)=\beta_1\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\boldsymbol{P}}(t)+\beta_2\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)$，根据式(6), (7), (11)可得：

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\beta_1\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\boldsymbol{P}}(t)+\beta_2\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)\right)\right\|=\\&\left\|\beta_1\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)+\beta_2\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\boldsymbol{u}_i(t)-\boldsymbol{u}_j(t)\right)\right\|\leqslant\\&\beta_1\left\|\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)\right\|+\left\|\beta_2\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\boldsymbol{u}_i(t)-\boldsymbol{u}_j(t)\right)\right\|\leqslant\\&\beta_1\left\|\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)\right\|+2\beta_2\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)\left\|\boldsymbol{u}_r(t)\right\|\end{aligned}\tag{25}$$

其中 $r=\underset{j=1,2,\cdots,n}{\arg\max}\left\|\boldsymbol{u}_j(t)\right\|$。

联合式(24), (25)，$t\in\left[t_i^k,t_i^{k+1}\right)$ 时，有：

$$\begin{aligned}&\left\|\boldsymbol{g}_i(t)\right\|=\int_{t_i^k}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\boldsymbol{g}_i(t)\right\|\right)\mathrm{d}s\leqslant\\&\int_{t_i^k}^{t}\left(\beta_1\left\|\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)\right\|+2\beta_2\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)\left\|\boldsymbol{u}_r(t)\right\|\right)\mathrm{d}s\leqslant\\&\left(t-t_i^k\right)\kappa_5\end{aligned}\tag{26}$$

式中：κ_5 是 $\left\{\beta_1\left\|\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{Q}}(t)\right\|+2\beta_2\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)\left\|\boldsymbol{u}_r(t)\right\|\right\}$ 在 $t\in\left[t_i^k,t_i^{k+1}\right)$ 时间段内的最大值。

根据引理 2 和式(26)，事件被触发时，必有 $\left(t_i^{k+1}-t_i^k\right)\kappa_5\geqslant\eta\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|$，可得 $\left\{t_i^{k+1}-t_i^k\right\}$ 下界：

$$\left(t_i^{k+1}-t_i^k\right)\geqslant\frac{\eta\left\|\boldsymbol{h}_i\left(t_i^k\right)\right\|}{\kappa_5}>0$$

2.3 姿态子系统控制器设计

对系统(2)设计基于切换滑模的固定时间控制器。姿态系统控制器的目标是根据控制器(5)解算出的姿态的设定值。根据式(1)，当 $t\in\left[t_i^k, t_i^{k+1}\right)$ 时，选择偏航设定值 $\psi_i^d=0$，可得姿态的设定值为：

$$T_{i1}=m\sqrt{u_{i1}\left(t_i^k\right)^2+u_{i2}\left(t_i^k\right)^2+\left(g-u_{i3}\left(t_i^k\right)\right)^2}$$

$$\varphi_i^d=\arcsin\left(m\frac{u_{i2}\left(t_i^k\right)\cos\psi_i^d-u_{i1}\left(t_i^k\right)\sin\psi_i^d}{T_{i1}}\right)$$

$$\theta_i^d=\arctan\left(m\frac{u_{i2}\left(t_i^k\right)\sin\psi_i^d-u_{i1}\left(t_i^k\right)\cos\psi_i^d}{g-u_{i3}\left(t_i^k\right)}\right)$$

对每个智能体 i，定义状态变量 $\tilde{\varphi}_i=\varphi_i-\varphi_i^d$，$\tilde{\theta}_i=\theta_i-\theta_i^d$，$\tilde{\psi}_i=\psi_i-\psi_i^d$。当 $t\in\left[t_i^k, t_i^{k+1}\right)$ 时，$\dot{\varphi}_i^d=\dot{\theta}_i^d=\dot{\psi}_i^d=0$，姿态子系统状态方程为：

$$\begin{cases}\ddot{\tilde{\varphi}}_i=J_x^{-1}\left(J_y-J_z\right)\dot{\tilde{\theta}}_i\dot{\tilde{\psi}}_i+J_x^{-1}\cdot T_{i2}\\ \ddot{\tilde{\theta}}_i=J_y^{-1}\left(J_z-J_x\right)\dot{\tilde{\varphi}}_i\dot{\tilde{\psi}}_i+J_y^{-1}\cdot T_{i3}\\ \ddot{\tilde{\psi}}_i=J_z^{-1}\left(J_x-J_y\right)\dot{\tilde{\theta}}_i\dot{\tilde{\varphi}}_i+J_z^{-1}\cdot T_{i4}\end{cases}\tag{27}$$

其中 T_{i2}, T_{i3}, T_{i4} 是无人机实际输入。

注释 3. 式(27)中 3 个姿态对应的状态方程结构类似，耦合部分可通过控制器解耦消除。因此，此节只给出翻滚状态 $\tilde{\theta}_i$ 控制器的设计过程，其余姿态控制器类似。群系统中无人机的姿态控制无需利用邻居节点的状态信息，所以设计姿态控制器时，会略去姿态变量中的无人机编号角标。

对系统(27)中姿态 $\tilde{\theta}$，设计切换滑模面：

$$s_{\tilde{\theta}}=\dot{\tilde{\theta}}+s_{au}$$

$$s_{au}=\begin{cases}l_1\tilde{\theta}+l_2\mathrm{sig}\left(\tilde{\theta}\right)^2, & \bar{s}\neq0 \text{ and } \left|\tilde{\theta}\right|\leqslant\sigma\\ c_1\mathrm{sig}\left(\tilde{\theta}\right)^{\mu_1}+c_2\mathrm{sig}\left(\tilde{\theta}\right)^{\mu_2}, & \text{other}\end{cases}\tag{28}$$

式中：$\bar{s}=\dot{\tilde{\theta}}+c_1\mathrm{sig}\left(\tilde{\theta}\right)^{\mu_1}+c_2\mathrm{sig}\left(\tilde{\theta}\right)^{\mu_2}$；控制器参数 $c_1>0$，$c_2>0$，$\mu_1\in(0.5, 1)$，$\mu_2>1$；σ 为接近于 0 的正数，用于切换滑模面；变量 l_1, l_2 为：

$$\begin{cases}l_1=0.5c_1\sigma^{\mu_1-1}+0.5c_2\sigma^{\mu_2-1}\\ l_2=0.5c_1\sigma^{\mu_1-2}+0.5c_2\sigma^{\mu_2-2}\end{cases}\tag{29}$$

将 $\left|\tilde{\theta}\right|=\sigma$ 带入 s_{au} 可以得到 s_{au} 和 $\dot{s}_{au}$ 在定义域上连续，并且 $\dot{s}_{au}$ 在 $\tilde{\theta}=0$ 处并无奇异性。

设计式(30)翻滚姿态的控制器：

$$T_{i3}=J_y\left(-\dot{s}_{au}-c_3\mathrm{sig}\left(s_{\tilde{\theta}}\right)^{\mu_3}-c_4\mathrm{sig}\left(s_{\tilde{\theta}}\right)^{\mu_4}-\zeta_{\tilde{\theta}}\right)\tag{30}$$

式中：控制器参数 $c_3>0$，$c_4>0$，$\mu_3\in(0.5, 1)$，$\mu_4>1$；$\zeta_{\tilde{\theta}}=\left(J_z-J_x\right)\dot{\tilde{\varphi}}\dot{\tilde{\psi}}$ 是解耦项。

定理 3 针对系统(27)中的翻滚姿态系统，设计滑模面(28)和控制器(30)，当滑模面中的 σ 足够小时，闭环系统固定时间稳定。

证明 首先证明系统能在固定时间内到达滑模面。选择李雅普诺夫函数 $V_s(t)=s_{\tilde{\theta}}^2$，对其求导：

$$\begin{aligned}\dot{V}_s(t)&=2s_{\tilde{\theta}}\dot{s}_{\tilde{\theta}}=2s_{\tilde{\theta}}\left(J_y^{-1}T_{i3}+\zeta_{\tilde{\theta}}+\dot{s}_{au}\right)=\\&-2c_3\left|s_{\tilde{\theta}}\right|^{\mu_3+1}-2c_4\left|s_{\tilde{\theta}}\right|^{\mu_4+1}=\\&-2c_3V_s^{(\mu_3+1)/2}-2c_4V_s^{(\mu_4+1)/2}\end{aligned}$$

根据引理 3，可得：

$$T_s=\frac{1}{c_3\left(1-\mu_3\right)}+\frac{1}{c_4\left(\mu_4-1\right)}\tag{31}$$

系统状态可以在固定时间 T_S 内到达滑模面上，且当 σ 足够小时，滑模面 $\bar{s}=0$，得到 $\dot{\tilde{\theta}}=-c_1\mathrm{sig}\left(\tilde{\theta}\right)^{\mu_1}-c_2\mathrm{sig}\left(\tilde{\theta}\right)^{\mu_2}$。

当系统状态到达滑模面后，选取李雅普诺夫函数 $V_a(t)=\tilde{\theta}^2$，对其求导：

$$\begin{aligned}\dot{V}_a(t)&=2\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}}=2\tilde{\theta}\left(-c_1\mathrm{sig}\left(\tilde{\theta}\right)^{\mu_1}-c_2\mathrm{sig}\left(\tilde{\theta}\right)^{\mu_2}\right)=\\&-2c_1\left|\tilde{\theta}\right|^{\mu_1+1}-2c_2\left|\tilde{\theta}\right|^{\mu_2+1}=\\&-2c_1V_a^{(\mu_1+1)/2}-2c_2V_a^{(\mu_2+1)/2}\end{aligned}$$

同理，根据引理 3 可得：

$$T_a=\frac{1}{c_1\left(1-\mu_1\right)}+\frac{1}{c_2\left(\mu_2-1\right)}\tag{32}$$

系统状态 $\tilde{\theta}=\dot{\tilde{\theta}}$ 能沿着滑模面在固定时间 T_a 内收敛到 0。

综合式(31), (32)，无人机姿态能够在固定时间 T_s+T_a 收敛到设定值。

https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal/vol33/iss10/15
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.20-0613

第 33 卷第 10 期 系统仿真学报 Vol. 33 No. 10
2021 年 10 月 Journal of System Simulation Oct. 2021

3 仿真分析

考虑具有 5 个无人机的多四旋翼无人机系统，其通讯拓扑连接关系如图 2 所示。

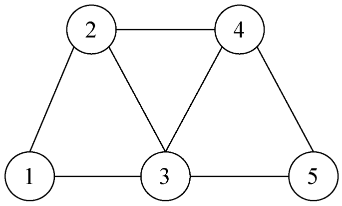

图 2 多四旋翼无人机无向拓扑连接图
Fig. 2 Undirected topology connection diagram of multi-quadrotor UAVs

根据上述所提及的相关图论知识，可以计算出其拉普拉斯矩阵：

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

经计算，$\lambda_2(\boldsymbol{L})$=1.58。表 1 给出了四旋翼无人机的物理参数和重力加速度等模型相关参数。表 2 是无人机位置和姿态控制器参数，$\gamma_1, \gamma_2, c_3, c_4$ 是设定的控制增益。通常姿态子系统控制器参数设置比较激进，位置环系统参数设置相对保守。

表 1 四旋翼无人机模型参数表
Tab. 1 Parameters of quadrotor UAV model

符号	物理意义	数值	单位
m	质量	1.3	kg
g	重力加速度	9.87	$\mathrm{m\cdot s^{-2}}$
J_x	绕 x 轴转动惯量	0.017 2	$\mathrm{kg\cdot m^2}$
J_y	绕 y 轴转动惯量	0.017 2	$\mathrm{kg\cdot m^2}$
J_z	绕 z 轴转动惯量	0.028 1	$\mathrm{kg\cdot m^2}$

表 2 四旋翼无人机控制器参数表
Tab. 2 Parameter values of controller

参数	取值	参数	取值	参数	取值
α_1	0.9	λ_1	1	μ_1	0.1
α_2	1.5	η_1	0.06	μ_2	2
β_1	1.8	c_1	15	μ_3	0.1
β_2	1.75	c_2	10	μ_4	2
γ_1	0.5	c_3	15	σ	0.001
γ_2	0.5	c_4	10		

对多四旋翼无人机系统进行仿真，位置子系统 X 维度初始位置参数为 $x_0=[6,-3,-6,3,0]$，初始速度参数设为 $\dot{x}_0=[2.5,-4,5.5,1,-3.5]$，$Y$ 维度初始位置参数为 $y_0=[4,-3,3,-4,2]$，初始速度参数设为 $\dot{y}_0=[2.5,-3,4,-4,-3]$，$Z$ 维度初始位置参数为 $z_0=[5,-3,-2,3.5,1.5]$，初始速度参数设为 $\dot{z}_0=[2.6,-2.9,2.8,2,-2.7]$，无人机间安全距离设置为 $\Delta^x=[1,2,3,4,5]$。同时由式(23)不难计算得出 $T_{\max}^P=41.2\ \mathrm{s}$，位置子系统的收敛时间满足：$T^P \leqslant T_{\max}^P=41.2\ \mathrm{s}$。

图 3、图 4 分别为多四旋翼无人机在 x 轴运动轨迹和运动速率变化情况。图 5 是无人机三维空间运动轨迹。从图 5 中可以看出，系统总体的收敛时间 $T\approx$ 4.3 s，显然当系统状态趋于一致时，实际的收敛时间小于 $T_{\max}^P$，并且此时多四旋翼无人机系统最终实现安全距离为 Δ^x 的编队控制。

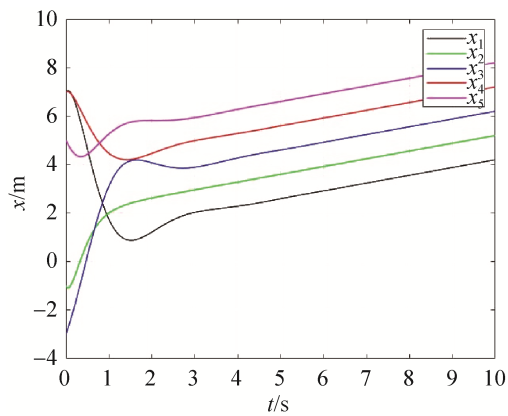

图 3 四旋翼无人机在 x 轴上运动轨迹
Fig. 3 Movement trajectory of quadrotor UAVs on x-axis

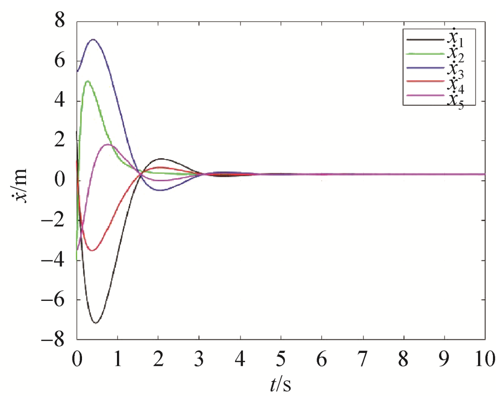

图 4 四旋翼无人机在 x 轴上运动速度
Fig. 4 Movement speed of quadrotor UAVs on x-axis

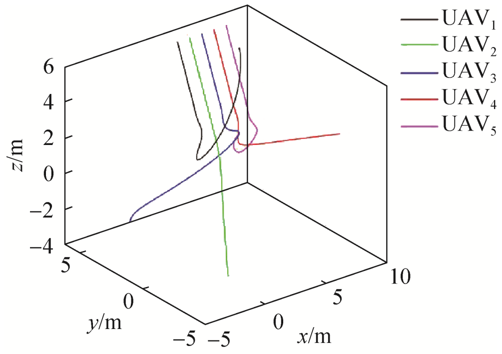

图 5 四旋翼无人机三维运动轨迹
Fig. 5 Three-dimensional trajectory of quadrotor UAVs

事件触发时间间隔序列图能够体现出事件触发的稠密程度和触发事件间隔。图 6 可以看出，编号为 3 的无人机的事件函数在前 4 s 内触发的比较频繁，后 6 s 触发间隔逐渐增加、频率逐渐放缓，这是因为施加控制后无人机速率在一开始会波动比较大，一段时间之后角度速率会趋于稳定，随着系统状态在有限时间内趋于一致，触发的频率也逐渐变得稳定。

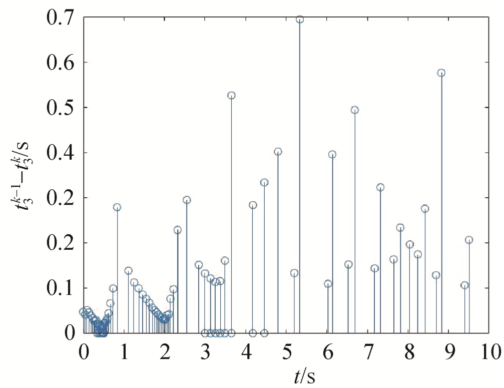

图 6 编号为 3 的无人机事件触发时间间隔序列图
Fig. 6 UAV 3 event-trigger time interval sequence diagram

图 7 为多无人机在事件触发控制算法下的时间间隔和在时间触发控制算法下的时间间隔散点图，当 $y=0,-2,-4,-6,-8$ 时，分别表示 5 架无人机在事件触发控制器(5)下的触发时间间隔，在事件触发控制算法中，由于无人机上都有传感器在连续测量自己的状态，所以当无人机的事件触发条件被满足时，控制器就会相应的更新其控制输入。并且还可以看出无人机群在完成编队控制时，所有的无人机事件触发频率趋于一致。当 $y=-10$ 时，表示在传统的时间触发算法下，无人机的触发时间间隔。可以很明显的看出，触发散点图非常密集即无人机的触发频率非常高。图 7 表明，相较于传统的时间触发算法，本文提及的事件触发控制算法能够降低控制器的更新频率以及减少系统的能量耗散。

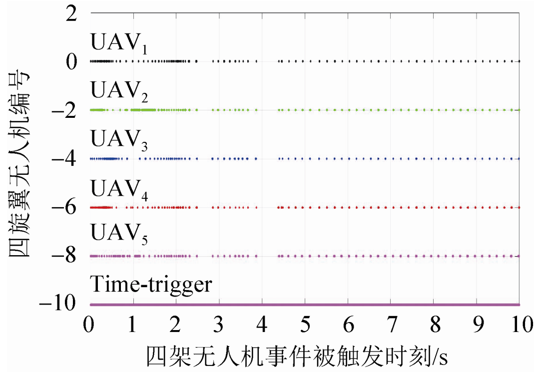

图 7 事件函数触发时刻散点图
Fig. 7 Scatter plot of event function trigger time

图 8 是姿态子系统的仿真图，主要体现姿态控制器的跟踪效果。以编号为 3 的无人机为代表，3 个姿态角初值分别为 $[\varphi_3,\theta_3,\psi_3]=[0.2,0.4,0.3]$。图 8 中的虚线代表通过位置子系统的模拟输入反解得到的姿态预设值，实线是实际无人机的姿态角轨迹。从图中可以看出，在固定时间滑模控制器的作用下，无人机的三个姿态角可以很快跟踪上预设的目标值。

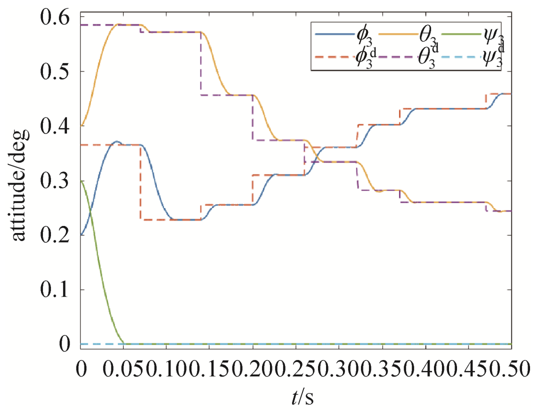

图 8 无人机姿态跟踪曲线图
Fig. 8 Attitude tracking curves of quadrotor UAV

https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal/vol33/iss10/15
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.20-0613

第 33 卷第 10 期　　系统仿真学报　　Vol. 33 No. 10
2021 年 10 月　　Journal of System Simulation　　Oct. 2021

4 结论

本文提出了一个基于事件触发的多四旋翼无人机固定时间编队控制算法，以多四旋翼无人机系统作为被控对象，采用内外环控制策略，分别针对位置及姿态子系统设计相应的事件触发控制器和固定时间滑模控制器。相较于传统的控制策略，研究基于事件驱动的算法，能够节约系统的通讯和计算资源，并且与固定时间编队控制相结合，能够快速的达到一致性。并利用了事件触发函数、固定时间稳定、基于一致性的编队控制理论证明了该算法收敛性和稳定性。

参考文献：

[1] 谌海云，陈华胄，刘强．基于改进人工势场法的多无人机三维编队路径规划[J]．系统仿真学报，2020, 32(3): 414-420.
Chen Haiyun, Chen Huazhou, Liu Qiang. Multi-UAV 3D Formation Path Planning Based on Improved Artificial Potential Field[J]. Journal of System Simulation, 2020, 32(3): 414-420.

[2] 毕凯，李英成，丁晓波，等．轻小型无人机航摄技术现状及发展趋势[J]．测绘通报, 2015(3): 27-31, 48.
Bi Kai, Li Yincheng, Ding Xiaobo, et al. Aerial Photogrammetric Technology of Light Small UAV: Status and Trend of Development[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2015(3): 27-31, 48.

[3] 杨曦中，艾剑良．自主空战中无人机规避导弹机动策略研究[J]．系统仿真学报, 2018, 30(5): 1957-1966.
Yang Xizhong, Ai Jianliang. Evasive Maneuvers Against Missiles for Unmanned Combat Aerial Vehicle in Autonomous Air Combat[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(5): 1957-1966.

[4] 李少斌，陈炎财，杨忠，等．具有通信延迟的多无人机编队飞行控制[J]．信息与控制, 2012, 41(2): 142-146.
Li Shaobin, Cheng Yancai, Yang Zhong, et al. Formation Fight Control of Multi-UAVs with Communication Delay[J]. Information and Control, 2012, 41(2): 142-146.

[5] Dong X W, Yu B C, Shi Z Y, et al. Time-varying Formation Control for Unmanned Aerial Vehicles: Theories and Applications[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology (S1063-6536), 2014, 23(1): 340-348.

[6] Cao Y C, Ren W. Distributed Formation Control for Fractional-order Systems: Dynamic Interaction and Absolute/Relative Damping[J]. Systems & Control Letters (S0167-6911), 2015, 59(3): 233-240.

[7] Zhang X H, Gao J L, Zhang W F, et al. Distributed Formation Control for Multiple Quadrotor Based on Multi-agent Theory and Disturbance Observer[J]. Mathematical Problems in Engineering (S1024-123X), 2019(4): 7234969.1-7234969.11.

[8] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time Stability of Continuous Autonomous Systems [J]. SIAM Journal on Control and Optimization (S0363-0129), 2000, 38(3): 751-766.

[9] 蒋国平，周映江．基于收敛速率的多智能体系统一致性研究综述[J]．南京邮电大学学报(自然科学版), 2017, 37(3): 15-25.
Jiang Guoping, Zhou Yingjiang. Research on Consensus of Multi-agent Systems Based on Convergence Rate[J]. Journal of Nanjing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2017, 37(3): 15-25.

[10] Zhao L W, Hua C C. Finite-time Consensus Tracking of Second-order Multi-agent Systems via Nonsingular TSM[J]. Nonlinear Dynamics (S0924-090X), 2014, 75(1/2): 311-318.

[11] Yu S He, Long X J. Finite-time Consensus for Second-order Multi-agent Systems with Disturbances by Integral Sliding Mode[J]. Automatica (S0005-1098), 2015, 54: 158-165.

[12] Zhou Y J, Yu X H, Sun C Y, et al. Higher Order Finite-time Consensus Protocol for Heterogeneous Multi-agent Systems[J]. International Journal of Control (S0020-7179), 2015, 88(2): 285-294.

[13] Polyakov A. Nonlinear Feedback Design for Fixed-time Stabilization of Linear Control Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control (S0018-9286), 2012, 57(8): 2106-2110.

[14] Defoort M, Polyakov A, Demesure G, et al. Leader-follower Fixed-time Consensus for Multi-agent Systems with Unknown Non-linear Inherent Dynamics[J]. IET Control Theory & Applications (S1751-8644), 2015, 9(14): 2165-2170.

[15] Hong H F, Yu W W, Wen G H, et al. Distributed Robust Fixed-time Consensus for Nonlinear and Disturbed Multiagent Systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems (S2168-2216), 2017, 47(99): 1464-1473.

[16] 邹玉龙，姜晓，严培舜，等．下一代无人机群协同通

信网络[J]. 南京邮电大学学报(自然科学版), 2017, 37(3): 43-51.
Zhou Yulong, Jiang Xiao, Yan Peishun, et al. Next-generation Unmanned Aerial Vehicle (UAV) Cooperative Communications[J]. Journal of Nanjing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2017, 37(3): 43-51.

[17] Hu W F, Liu L, Feng G. Consensus of Linear Multi-agent Systems by Distributed Event-triggered Strategy[J]. IEEE Transactions on Cybernetics (S2168-2267), 2016, 46(1): 148-157.

[18] 李炜，阎坤，李亚洁. 事件触发 NNCS 鲁棒 H∞保性能容错与通讯协同设计[J]. 系统仿真学报，2016，28(5): 1140-1149.
Li Wei, Yan Kun, Li Yajie. Co-design Between Robust H_∞ Guaranteed Cost Fault-tolerant and Communication for NNCS Based on Event-triggered[J]. Journal of System Simulation, 2016, 28(5): 1140-1149.

[19] Dimarogonas D V, Frazzoli E, Johansson K H. Distributed Event-triggered Control for Multi-agent Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control (S0018-9286), 2012, 57(5): 1291-1297.

[20] Zhang Z Q, Zhang L, Hao F, et al. Distributed Event-triggered Consensus for Multi-agent Systems with Quantisation[J]. International Journal of Control (S0020-7179), 2015, 88(6): 1112-1122.

[21] 杨飞生，汪璟，潘泉. 基于事件触发机制的网络控制研究综述[J]. 控制与决策, 2018, 33(6): 969-977.
Yang Feisheng, Wang Jing, Pan Quan. A Survey of Networked Event-triggered Control[J]. Control and Decision, 2018, 33(6): 969-977.

[22] Ye D, Chen M M, Yang H J. Distributed Adaptive Event-triggered Fault-tolerant Consensus of Multiagent Systems with General Linear Dynamics[J]. IEEE Transactions on Cybernetics (S2168-2267), 2018, 49(3): 757-767.

[23] Zou Y Y, Niu Y G, Su X. Event-triggered Distributed Predictive Control for The Cooperation of Multi-agent Systems[J]. IET Control Theory & Applications (S1751-8644), 2017, 11(1): 10-16.

[24] Li X D, Dong X W, Li Q D, et al. Event-triggered Time-varying Formation Control for General Linear Multiagent Systems[J]. Journal of the Franklin Institute (S0016-0032), 2019, 356(17): 10179-10195.

[25] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control (S0018-9286), 2014, 49(9): 1520-1533.

[26] Li H Q, Chen G, Dong Z Y, et al. Consensus Analysis of Multiagent Systems with Second-order Nonlinear Dynamics and General Directed Topology: An Event-triggered Scheme[J]. Information Sciences (S0020-0255), 2016: 598-622.

[27] Zhang A, Yang P, Zhou D. Event-triggered Finite-time Consensus Control under Uncertain Disturbances with Fully Continuous Communication and Chattering Free[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control (S0142-3312), 2019, 42(8): 014233121986651.

[28] Zuo Z Y. Nonsingular Fixed-time Consensus Tracking for Second-order Multi-agent Networks[J]. Automatica (S0005-1098), 2015, 54: 305-309.