

6-9-2021

## Explicit Model Predictive Control for Intelligent Vehicle Lateral Trajectory Tracking

Leng Yao

*School of Mechatronics and Vehicle Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China;*

Shuen Zhao

*School of Mechatronics and Vehicle Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

# Explicit Model Predictive Control for Intelligent Vehicle Lateral Trajectory Tracking

## Abstract

**Abstract:** To ensure the accuracy, driving stability and online real-time of intelligent vehicle tracking control, an explicit model predictive tracking control method is designed. *The cost functions and constraints for tracking accuracy and driving stability in the prediction time domain are proposed. The tracking control problem is transformed into the optimization of the active steering angle with dynamic disturbances.* To improve the real-time performance, *the traditional model predictive control system is transformed into an equivalent explicit polyhedral piece-wise affine (PPWA) system, and the active steering angle of front wheel is gained by the explicit law on parameter partition.* Carsim and Simulink simulation results show that the mean lateral position error is 0.1956m and the mean heading angle error is 0.276° with this method, meanwhile the maximum lateral load-conversion is improved by a rate of 5.92% and the maximum tire utilization adhesion coefficient is improved by a rate of 9.81%, and the average single-step running speed is improved by a rate of 53.97%.

## Keywords

intelligent vehicle, trajectory tracking control, lateral stability, Explicit Model Predict Control (EMPC)

## Recommended Citation

Leng Yao, Zhao Shuen. Explicit Model Predictive Control for Intelligent Vehicle Lateral Trajectory Tracking[J]. Journal of System Simulation, 2021, 33(5): 1177-1187.

# 智能车辆横向轨迹跟踪的显式模型预测控制方法

冷姚, 赵树恩

(重庆交通大学 机电与车辆工程学院, 重庆 400074)

**摘要:** 为保证智能车辆跟踪控制的精确性、行驶稳定性和在线实时性, 设计了一种显式模型预测跟踪控制方法。建立了预测时域内的跟踪精准性和行驶稳定性指标函数及约束, 将跟踪控制问题转化为动态干扰下的主动转向最优化问题; 为提高实时性, 将传统模型预测控制系统转化为与之等价的显式多面体分段仿射系统, 运用参数分区上的显式控制律求得最优转角控制量。Carsim 和 Simulink 联合仿真结果表明, 该控制方法下, 位置误差均值为 0.195 6 m, 航向角误差均值为 0.276°, 同时最大横向载荷转移改善 5.92%, 最大轮胎利用附着系数改善 9.81%, 且平均单步运行速度提升 53.97%。

**关键词:** 智能车辆; 轨迹跟踪控制; 横向稳定性; 显式模型预测控制

中图分类号: U461.99; TP391

文献标志码: A

文章编号: 1004-731X (2021) 05-1177-11

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.19-0684

## Explicit Model Predictive Control for Intelligent Vehicle Lateral Trajectory Tracking

Leng Yao, Zhao Shuen

(School of Mechatronics and Vehicle Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

**Abstract:** To ensure the accuracy, driving stability and online real-time of intelligent vehicle tracking control, an explicit model predictive tracking control method is designed. *The cost functions and constraints for tracking accuracy and driving stability in the prediction time domain are proposed. The tracking control problem is transformed into the optimization of the active steering angle with dynamic disturbances.* To improve the real-time performance, *the traditional model predictive control system is transformed into an equivalent explicit polyhedral piece-wise affine (PPWA) system, and the active steering angle of front wheel is gained by the explicit law on parameter partition.* Carsim and Simulink simulation results show that the mean lateral position error is 0.1956m and the mean heading angle error is 0.276° with this method, meanwhile the maximum lateral load-conversion is improved by a rate of 5.92% and the maximum tire utilization adhesion coefficient is improved by a rate of 9.81%, and the average single-step running speed is improved by a rate of 53.97%.

**Keywords:** intelligent vehicle; trajectory tracking control; lateral stability; Explicit Model Predict Control (EMPC)

## 引言

自动驾驶是提高车辆行驶安全性、减少交通事故的有效途径, 而车辆运动控制是自动驾驶系统实现轨迹精确跟踪及保证车辆行驶稳定性的关键。车辆运动控制分为纵向运动控制和横向运动控制, 纵

向控制是通过驱动或制动系统的主动控制实现车辆速度和纵向距离跟踪; 横向控制是指通过决策算法与底盘主动控制实现车辆沿期望的路径精准跟踪行驶, 保证车辆的横向位移偏差和航向偏差最小, 且使车辆具有良好的行驶稳定性、安全性和舒适性<sup>[1-3]</sup>。

收稿日期: 2019-12-30 修回日期: 2020-03-22

基金项目: 国家重点研发计划(2016YFB0100905); 重庆市自然科学基金(cstc2018jcyjAX0422); 重庆市研究生科研创新项目(CYS19223)

第一作者: 冷姚(1995-), 男, 硕士生, 研究方向为智能车辆运动控制。E-mail: lengyao0025@163.com

大多数研究中,通常把横向轨迹跟踪控制问题转化为动态干扰即期望路径曲率变化下的最优控制问题,研究内容主要包括:跟踪控制操纵变量的选择、性能优化目标分析和轨迹跟踪控制算法设计。轨迹跟踪控制的操纵变量主要有主动前轮转向<sup>[4]</sup>、独立四轮转向<sup>[5]</sup>、车轮转角和各轮转矩联合控制<sup>[6]</sup>。对于优化目标,大部分文献把跟踪精确性作为首要指标<sup>[7-9]</sup>,文献<sup>[10]</sup>还考虑了车辆跟踪过程的行驶稳定性,通过主动横摆力矩控制实现了稳定性优化。文献<sup>[11-12]</sup>还考虑了经济性,建立了表征跟踪经济性的目标函数。对于轨迹跟踪控制算法,按控制原理可分为基于预瞄的跟踪控制和基于模型预测(Model Predict Control, MPC)的跟踪控制,其中MPC是一种基于简单模型进行的滚动时窗优化控制方法,鲁棒性和抗干扰性好,被广泛应用于智能车辆运动控制中。文献<sup>[11]</sup>基于模型预测控制理论设计了车辆轨迹跟踪控制器,考虑了车辆及道路环境的多变量约束条件,进行了仿真验证。文献<sup>[12]</sup>设计了可变步长可变预测时域的模型预测轨迹跟踪控制器,可以有效避免因模型误差导致的控制效果变差的情况。文献<sup>[13]</sup>在轨迹跟踪模型预测反馈控制的基础上,根据期望路径先验的情况增加了前馈控制,改善了控制效果。上述研究中,尽管MPC在处理多变量多约束问题上的优势明显,但由于在线反复优化求解的特点,控制实时性很难得到保证<sup>[14]</sup>。

本文针对低附着系数路面上行驶的智能车辆横向轨迹跟踪控制的行驶稳定性、轨迹跟踪精准性和在线控制的实时性等问题,结合行驶稳定性边界条件及量化指标,建立预测时域内的路径跟踪精准性和车辆行驶稳定性最优目标函数及约束条件,提出一种基于主动前轮转向的智能车辆横向运动显式模型预测控制(Explicit Model Predict Control, EMPC)方法,从而将车辆横向路径跟踪控制问题转化为动态干扰下的前轮主动转角最优控制问题,通过Carsim和Simulink联合仿真验证了该控制方法的有效性。

## 1 轨迹跟踪模型及行驶稳定性分析

### 1.1 车辆二自由度动力学模型

车辆横向轨迹跟踪控制主要考虑车辆的横向动力学性能,本文对车辆动力学模型作出如下假设:忽略轮胎的纵向力和空气阻力,假定车辆的纵向速度恒定。建立包括车身横向运动和横摆运动2个自由度,如图1所示。

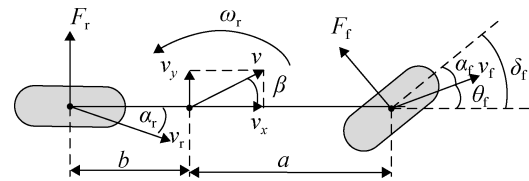


图1 车辆动力学模型

Fig. 1 Vehicle dynamics model

二自由度微分方程:

$$\begin{cases} m(\dot{v}_y + v_x \gamma) = 2F_{yf} + 2F_{yr} \cos \delta_f \\ I_z \dot{\omega}_r = 2F_{yf} \cos \delta_f a - 2F_{yr} b \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $m$  为整车质量;  $v_y$  为横向速度;  $v_x$  为纵向速度;  $\gamma$  为横摆角速度;  $F_{yf}$ ,  $F_{yr}$  分别为前后轮横向力;  $\delta_f$  为前轮转角;  $I_z$  为车身绕  $z$  轴的转动惯量;  $a$ ,  $b$  分别为车辆质心距离前后轴的距离。

轮胎的横向力采用“魔术公式”轮胎非线性动力学模型,高附着系数  $\mu_0$  下,轮胎横向力与轮胎侧偏角及垂向载荷之间的对应关系表示为:

$$F_{yi} = f_m(\alpha_i, F_{zi}) = D_{yi} \sin \{C_{yi} \arctan [B_{yi} \alpha_i - E_{yi} (B_{yi} \alpha_i - \arctan B_{yi} \alpha_i)]\} \quad (2)$$

式中:  $f_m$  表示  $\alpha_i$  和  $F_{zi}$  向  $F_{yi}$  的映射函数,即魔术轮胎公式;峰值参数  $D_{yi} = a_1 F_{zi}^2 + a_2 F_{zi}$ ,  $i=f, r$ ;  $F_{zf}$ ,  $F_{zr}$  分别为前后轮上的垂向载荷;形状参数  $C_{yi} = 1.3$ ;刚度参数  $B_{yi} = B_{yi} C_{yi} D_{yi} / C_{yi} D_{yi}$ , 其中  $B_{yi} C_{yi} D_{yi} = (a_3 F_{zi}^2 + a_4 F_{zi}) \cdot e^{-a_5 F_{zi}}$ ;曲率参数  $E_{yi} = a_6 F_{zi}^2 + a_7 F_{zi} + a_8$ ;  $a_1 \sim a_8$  为拟合系数。

考虑路面低附着系数的影响,在低附着系数  $\mu$  下,前后轮胎的横向力为:

$$\begin{cases} F_{yf} = \frac{\mu}{\mu_0} f_m \left( \frac{\mu_0}{\mu} \alpha_f, F_{zf} \right) \\ F_{yr} = \frac{\mu}{\mu_0} f_m \left( \frac{\mu_0}{\mu} \alpha_r, F_{zr} \right) \end{cases} \quad (3)$$



式中:  $\alpha_f, \alpha_r$  分别为前后轮胎的侧偏角, 其中

$$\begin{cases} F_{zf} = [b / (a + b)]mg / 2 \\ F_{zr} = [a / (a + b)]mg / 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \alpha_f = \delta_f - \arctan[(v_y + \gamma a) / v_x] \\ \alpha_r = -\arctan[(v_y - \gamma b) / v_x] \end{cases} \quad (5)$$

轮胎横向力的非线性特性曲线如图 2 所示, 相同垂向载荷下, 轮胎线性区域的横向力特性不受附着系数影响。

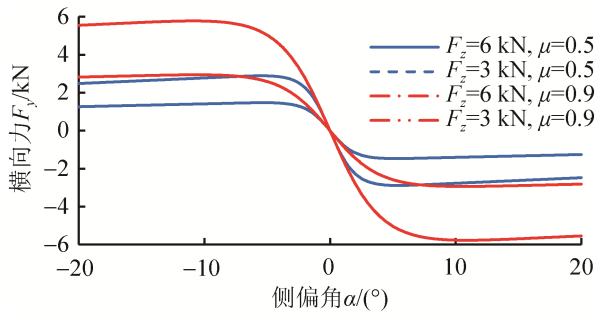


图 2 轮胎横向力  
Fig. 2 Tire lateral force

### 1.2 轨迹跟踪模型

建立轨迹跟踪误差模型, 描述车辆与期望路径之间的实时状态, 如图 3 所示, 轨迹跟踪误差包括横向位置误差  $e_y$  和航向角误差  $e_\psi$ 。

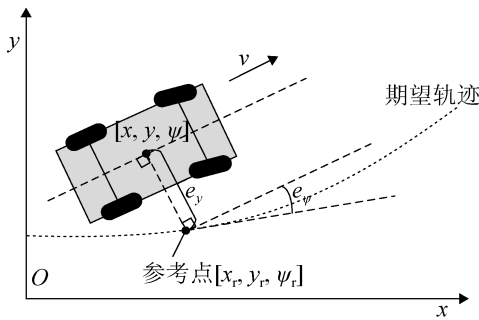


图 3 轨迹跟踪误差模型  
Fig. 3 Path tracking error model

车辆跟踪期望轨迹运动, 参考点处的曲率为  $k_c$ 。车辆纵向速度恒定, 将轨迹跟踪问题中实时路径曲率变化的干扰输入转化为当前参考轨迹点处的期望横摆角速度输入  $\gamma_d$ :

$$\gamma_d = \dot{\psi}_r = v_x k_c \quad (6)$$

期望横向加速度:

$$\ddot{y}_r = \dot{v}_{yd} = v_x \dot{\gamma}_d \quad (7)$$

横向加速度误差:

$$\ddot{e}_y = \ddot{y} + v_x (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_d) \quad (8)$$

航向角误差:

$$e_\psi = \psi - \psi_r \quad (9)$$

式中:  $\psi, \psi_r$  分别表示航向角和参考航向角。

将式(6)~(9)代入式(1)的车辆动力学模型, 轮胎力处于线性区域, 得到车辆轨迹跟踪误差微分方程:

$$m\ddot{e}_y = \frac{-2(C_{af} + C_{ar})}{v_x} \dot{e}_y + 2(C_{af} + C_{ar})e_\psi + \frac{2(bC_{ar} - aC_{af})}{v_x} \dot{e}_\psi + 2C_{af}\delta_f + \left[ \frac{2(bC_{ar} - aC_{af})}{v_x} - v_x \right] \gamma_d \quad (10)$$

$$I_z \ddot{e}_\psi = \frac{2(bC_{ar} - aC_{af})}{v_x} \dot{e}_y + 2(aC_{af} - bC_{ar})e_\psi - \frac{2(b^2C_{ar} + a^2C_{af})}{I_z v_x} \dot{e}_\psi + 2aC_{af}\delta_f - \frac{2(b^2C_{ar} + a^2C_{af})}{v_x} \gamma_d \quad (11)$$

式中:  $C_{af}, C_{ar}$  分别为前后轮胎的侧偏刚度。

以车辆前轮转角作为控制输入  $u_1 = \delta_f$ , 期望轨迹当前点处的期望横摆角速度作为干扰输入  $u_2 = \gamma_d$ , 跟踪误差及其变化率作为状态变量  $\mathbf{x} = (e_y, \dot{e}_y, e_\psi, \dot{e}_\psi)^T$ , 建立车辆轨迹跟踪误差模型的状态空间表达:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_C \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_C u_1(t) + \mathbf{G}_C u_2(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_C \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (12)$$

式中:

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2(C_{af} + C_{ar})}{mv_x} & \frac{2(C_{af} + C_{ar})}{m} & \frac{2(bC_{ar} - aC_{af})}{mv_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2(bC_{ar} - aC_{af})}{I_z v_x} & \frac{2(aC_{af} - bC_{ar})}{I_z} & -\frac{2(b^2C_{ar} + a^2C_{af})}{I_z v_x} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{af}}{m} \\ 0 \\ \frac{2aC_{af}}{I_z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2(bC_{af} - aC_{af}) - v_x}{mv_x} \\ 0 \\ -\frac{2(b^2C_{af} + a^2C_{af})}{I_z v_x} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_C = \text{diag}(1, 1, 1, 1)。$$

### 1.3 基于相平面法的车辆稳定性边界

车辆在低附着系数路面或以较高车速进行横向路径跟踪时极易发生车辆失稳现象。

根据 1.1 节中二自由度车辆动力学模型, 在附着系数  $\mu=0.5$  的条件下, 无前轮转向, 纵向速度恒定, 将质心侧偏角  $\beta$ 、质心侧偏角变化率  $d\beta$  和横向速度  $v_y$ 、横摆角速度  $\gamma$  分别作为车辆的状态变量。 $(v_y, \omega_r)^T$  作为初始条件, 在  $v_y \in (-10, 10)\text{m/s}$  和  $\gamma \in (-1, 1)\text{rad}$  区间内分别以一定的间隔选取多组初始条件, 在无控制状态下分别进行仿真试验, 记录每一组在 5 s 内车辆的横向状态参数  $\beta$ - $d\beta$ 、 $v_y$ - $\gamma$  的相轨迹变化, 对试验数据进行整理结果如图 4 所示。

图 4(a), (b) 分别为  $\delta=0\text{ rad}$ ,  $v_x=25\text{ m/s}$  时, 在 441 组不同初始状态向量  $(v_y, \gamma)^T$  下得到的  $\beta$ - $d\beta$  和  $v_y$ - $\gamma$  在 5 s 内的相轨迹变化图。图 4(a), (b) 中, 蓝色的轨迹区域均为最终能收敛到稳定状态  $(0, 0)^T$  的集合, 红色轨迹的区域为无法收敛至稳定状态的集合。

图 4 中, 对于  $\beta$ - $d\beta$ 、 $v_y$ - $\gamma$  的相轨迹区域, 分别用 4 条直线划分车辆的稳定性边界条件, 得到车辆行驶过程中的稳定区域  $W$  为

$$W = W_1 \cap W_2 \quad (13)$$

$$W_1 = \{(\beta, d\beta) \mid \bigcap_i (d\beta \leq k_{\beta i} \beta + l_{\beta i})\}$$

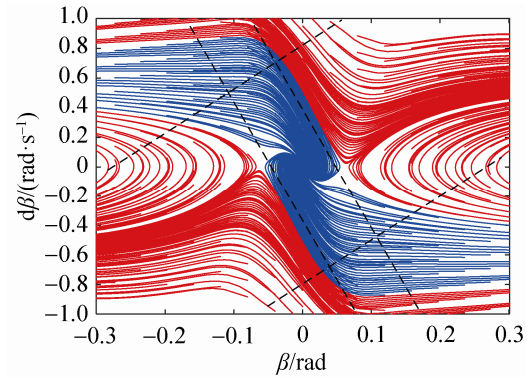
$$W_2 = \{(v_y, \gamma) \mid \bigcap_i (\gamma \leq k_{\gamma i} v_y + l_{\gamma i})\}$$

式中:  $W_1$ ,  $W_2$  分别为  $\beta$ - $d\beta$  相轨迹和  $v_y$ - $\gamma$  相轨迹中的稳定区域;  $k_i$ ,  $l_i$  为常数, 由图 4 中几何关系测量得出,  $i=1\sim 4$ 。

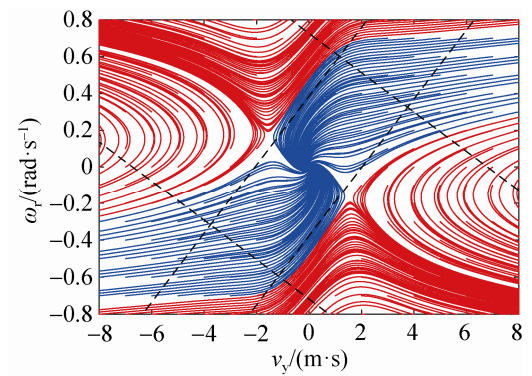
从图 4 中可以看出越靠近原点, 车辆越容易收敛至稳定状态, 用  $\beta$ ,  $d\beta$ ,  $v_y$ ,  $\gamma$  的值来对行驶稳定性进行量化, 建立稳定性量化指标  $F_s$

$$F_s = \frac{w_{s1}}{s_{s1}} \beta^2 + \frac{w_{s2}}{s_{s2}} d\beta^2 + \frac{w_{s3}}{s_{s3}} v_y^2 + \frac{w_{s4}}{s_{s4}} \gamma^2 \quad (14)$$

式中:  $s_{s1}\sim s_{s4}$  分别为对应变量的比例因子, 用以消除由于量级和单位不同造成的影响;  $w_{s1}\sim w_{s4}$  分别为对应变量的加权系数。



(a)  $\beta$ - $d\beta$



(b)  $v_y$ - $\gamma$

图 4 相平面图

Fig. 4 Phase plane

## 2 基于 EMPC 的横向轨迹跟踪控制器

### 2.1 轨迹跟踪 EMPC 控制架构

显式模型预测控制 (EMPC)<sup>[15-16]</sup> 是 Bemporad 等学者把多参数二次规划理论 (Multi-Parametric Quadratic Program, MPQP) 引入到线性时不变对象的求解中, 对有关参数向量空间凸划分, 离线求解得到每个参数分区上的线性状态反馈最优控制律, 并建立显式多面体分段仿射系统。在线实时控制时, 通过当前参数向量定位当前时刻所处的参数分区, 然后调用该分区上的显式线性控制律得到最优控制量。由于无需反复在线优化, 相比于传统 (隐

式) MPC, 在线效率明显提高。

图 5 所示为基于 EMPC 控制理论的轨迹跟踪控制框架, 实线箭头为离线求解过程, 虚线箭头为在线控制过程。 $\delta_f, \gamma_d$  分别为当前控制输入和干扰输入,  $e_y, \dot{e}_y, e_\psi, \dot{e}_\psi$  和  $e_{yr}, \dot{e}_{yr}, e_{\psi r}, \dot{e}_{\psi r}$  分别为跟踪误差状态量及其参考值。结合前文车辆行驶稳定性的分析, 建立预测时域内综合考虑跟踪性和行驶稳定性的目标函数及约束条件, 将路径跟踪的精准性和车辆稳定性控制问题转化为动态干扰下的主动转向最优控制问题, 并运用 MPQP 理论, 将基于在线反复优化的路径跟踪闭环模型预测控制系统转化为与之等价的显式多面体分段仿射系统, 通过当前时刻参数向量定位所处参数分区上的显式控制律即可求得前轮主动转角控制量, 从而实现智能车辆路径精准跟踪和行驶稳定性控制。

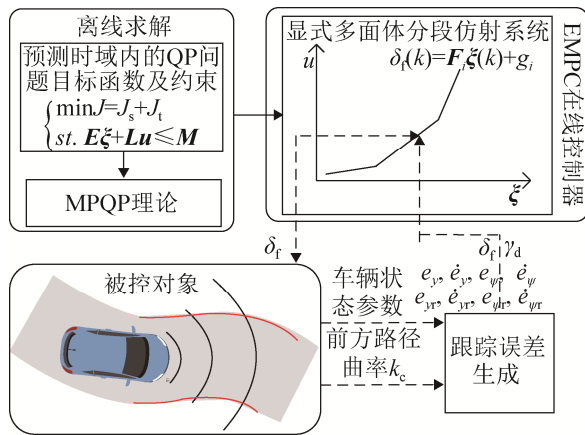


图 5 EMPC 控制框架  
Fig. 5 EMPC control framework

### 2.2 预测时域内车辆轨迹跟踪及稳定性最优控制

智能车辆在低附着路面下高速横向轨迹跟踪时, 既要保证车辆跟踪的精准性, 又要兼顾车辆的行驶稳定性。为得到预测时域内车辆横向轨迹跟踪最优主动转向控制序列, 基于式(12)建立跟踪误差预测模型, 以  $T$  为离散步长, 对式(12)进行离散化

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u_1(k) + \mathbf{G}u_2(k) \\ \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k+1) \end{cases} \quad (15)$$

式中:  $k$  为当前时刻;  $\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}cT}$ ,  $e$  为自然常数;  $\mathbf{B} = \int_0^T e^{\mathbf{A}c\tau} d\tau \cdot \mathbf{B}_C$ ;  $\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}c\tau} d\tau \cdot \mathbf{G}_C$ ;  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_C$ 。

定义预测时域为  $p$  步, 控制时域为  $q$  步 ( $q \leq p$ )。由预测控制理论推导出预测时域  $p$  步内的跟踪误差预测模型为

$$\mathbf{Y}_p(k+1|k) = \mathbf{S}_x \Delta \mathbf{x}(k) + \mathbf{I}_y(k) + \mathbf{S}_{u2} \Delta u_2(k) + \mathbf{S}_{u1} \Delta \mathbf{U}(k) \quad (16)$$

式中:  $\mathbf{Y}_p(k+1|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+p) \end{bmatrix}$ , 为  $p$  步预测输出,

$\mathbf{y}(k) = (e_y(k), \dot{e}_y(k), e_\psi(k), \dot{e}_\psi(k))^T$ ; 状态增量  $\Delta \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-1)$ ; 干扰输入增量  $\Delta u_2(k) = u_2(k) - u_2(k-1)$ , 即参考轨迹点处期望横摆角速度  $\gamma_d$  的变化; 控制时域  $q$  内的控制输入增量  $\Delta \mathbf{U}(k) = (\Delta u_1(k), \Delta u_1(k+1), \dots, \Delta u_1(k+q-1))^T$ , 其中控制输入增量  $\Delta u_1(k) = u_1(k) - u_1(k-1)$ , 即前轮转角  $\delta_f$  的变化; 其余矩阵的计算为

$$\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \sum_{i=1}^2 \mathbf{CA}^i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p \mathbf{CA}^i \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{p \times 1};$$

$$\mathbf{S}_{u2} = \begin{bmatrix} \mathbf{CG} \\ \sum_{i=1}^2 \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{G} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{G} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{S}_{u1} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{i=1}^2 \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{B} & \mathbf{CB} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^q \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{B} & \sum_{i=1}^{q-1} \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{B} & \dots & \dots & \mathbf{CB} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^p \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{B} & \sum_{i=1}^{p-1} \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{B} & \dots & \dots & \sum_{i=1}^{p-q+1} \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

## (1) 跟踪精准性

综合考虑车辆对轨迹的跟踪误差状态变量和控制量及其变化率的影响,建立预测时域内的跟踪性目标函数及约束为

$$J_t = \sum_{i=1}^p \left[ \frac{w_{t1}}{s_{t1}} e_y^2(k+i) + \frac{w_{t2}}{s_{t2}} \dot{e}_y^2(k+i) + \frac{w_{t3}}{s_{t3}} e_{\psi}^2(k+i) + \frac{w_{t4}}{s_{t4}} \dot{e}_{\psi}^2(k+i) + \frac{w_{t5}}{s_{t5}} \delta_f^2(k+i) + \frac{w_{t6}}{s_{t6}} \Delta\delta_f^2(k+i) \right] \quad (17)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} e_{y\min} \\ \dot{e}_{y\min} \\ e_{\psi\min} \\ \dot{e}_{\psi\min} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} e_y(k+i) \\ \dot{e}_y(k+i) \\ e_{\psi}(k+i) \\ \dot{e}_{\psi}(k+i) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} e_{y\max} \\ \dot{e}_{y\max} \\ e_{\psi\max} \\ \dot{e}_{\psi\max} \end{bmatrix}, & i=1,2,\dots,n_1 \\ \begin{bmatrix} \delta_{f\min} \\ \Delta\delta_{f\min} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \delta_f(k+j) \\ \Delta\delta_f(k+j) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \delta_{f\max} \\ \Delta\delta_{f\max} \end{bmatrix}, & j=1,2,\dots,n_2 \end{cases} \quad (18)$$

式中:  $s_{t1} \sim s_{t6}$  为对应变量的比例因子;  $w_{t1} \sim w_{t6}$  为对应变量的加权系数;  $n_1, n_2$  分别为预测时域内状态变量和控制输入量受约束的时域长度,  $n_1, n_2$  取值越小,优化求解的速度越快,为了保证约束效果同时提高运算速度,  $n_1, n_2$  的取值应满足:  $q < n_1 \leq p, 1 \leq n_2 \leq q$ 。

## (2) 行驶稳定性

通过前文的稳定性分析得到了车辆行驶稳定性的边界条件和量化指标,联合式(16)建立预测时域内的稳定性目标函数及约束

$$J_s = \sum_{i=1}^p F_s(k+i) = \sum_{i=1}^p \left[ \frac{w_{s1}}{s_{s1}} \beta^2(k+i) + \frac{w_{s2}}{s_{s2}} \Delta\beta^2(k+i) + \frac{w_{s3}}{s_{s3}} v_y^2(k+i) + \frac{w_{s4}}{s_{s4}} \gamma^2(k+i) \right] \quad (19)$$

$$\begin{cases} [\beta(k+i), \Delta\beta(k+i)] \in W_1 \\ [v_y(k+i), \omega_r(k+i)] \in W_2 \end{cases} \quad i=1,2,\dots,n_1 \quad (20)$$

式中:

$$v_y(k) = v_{yd}(k) + \dot{e}_y(k) = v_x^2 k_c(k) + (0, 1, 0, 0) \mathbf{y}(k);$$

$$\gamma(k) = \gamma_d(k) + \dot{e}_{\psi}(k) = v_x k_c(k) + (0, 0, 0, 1) \mathbf{y}(k);$$

$$\beta(k) = v_y(k) / v_x = \{v_x^2 k_c(k) + (0, 1, 0, 0) \mathbf{y}(k)\} / v_x,$$

其中:  $\mathbf{y}(k)$  为预测模型  $k$  时刻的输出向量,由式(16)求解。

由式(17)~(20),可将兼顾车辆行驶稳定性和跟踪精确性的轨迹跟踪控制问题转化为每个预测时域内动态干扰( $\gamma_d$ )下求最优控制( $\delta_f$ )的问题,即

$$\begin{cases} \min J = \min(J_t + J_s) = \\ \min \left\{ \sum_{i=k+1}^p \|\mathbf{P}\mathbf{y}(k+i)\|_2 + \sum_{i=k}^q [\|\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}(k+i)\|_2 + \|\mathbf{Q}_2 \Delta \mathbf{u}(k+i)\|_2 + \mathbf{u}^T(k+i) \mathbf{R} \mathbf{y}(k+i+1)] \right\} \\ \text{s.t.} \\ \mathbf{E}\mathbf{y}(k+i) + \mathbf{L}\mathbf{u}(k+i-1) \leq \mathbf{M} \end{cases} \quad (21)$$

式中:  $\mathbf{u}(k) = (\delta_f(k), \gamma_d(k))$ ; 矩阵  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{R}, \mathbf{E}, \mathbf{L}, \mathbf{M}$  可由式(17)~(20)整理获得。

## 2.3 轨迹跟踪控制多面体分段仿射系统

式(16)和式(21)共同组成了车辆轨迹跟踪的在线反复优化控制问题,  $\Delta \mathbf{U}(k)$  作为优化问题的待优化量,对于不同的  $\Delta \mathbf{U}(k)$ ,利用式(16)的预测模型可以求解出预测时域内的对应的状态量,再利用这些状态量对式(21)求解,得到最优的  $\Delta \mathbf{U}^*(k)$ ,并把  $\Delta \mathbf{U}^*(k)$  中的第 1 项作为当前控制输入的增量,应用到在线控制中  $\delta_f(k) = u_1(k) = u_1(k-1) + (1, 0, \dots, 0) \Delta \mathbf{U}^*(k)$ ,到下一时刻再重复上述的求解,如此循环往复即可完成轨迹跟踪横向运动控制。

上述求解过程可理解为解一个隐式非线性函数  $u_1(k) = f[\xi(k)]$ ,其中  $\xi(k)$  为  $k$  时刻控制过程中的有关参数向量,  $\xi = (e_y, \dot{e}_y, e_{\psi}, \dot{e}_{\psi}, \delta_f, \gamma_{rd}, e_{\psi r}, \dot{e}_{\psi r}, e_{\psi r}, \dot{e}_{\psi r})^T$ ,  $f$  为参数向量  $\xi(k)$  到控制量  $u_1(k)$  的非线性映射。由于在线求解这样的隐式非线性函数的实时性较差,为此将上述隐式 MPC 控制问题转化为 EMPC 控制问题。

由式(18), (20)可得到参数向量空间  $\xi$  的上下界  $\xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{\max}$ 。利用多参数二次规划<sup>[15]</sup>将  $\xi$  进行凸划分,得到 10 维参数空间的 656 个凸参数分区,图 6 所示为参数空间  $\xi$  的凸参数分区二维截面图。图 6(a)为在位置误差和航向角误差  $e_y, -e_{\psi}$  2 个维度

中假定其余维度参数值均为 0 的截面图; 图 6(b)~(c) 分别为在  $e_y-\dot{e}_y, e_\psi-\dot{e}_\psi$  的截面图。图 6 中, 参数分区关于原点对称, 且越靠近原点分区越多, 满足控制要求。

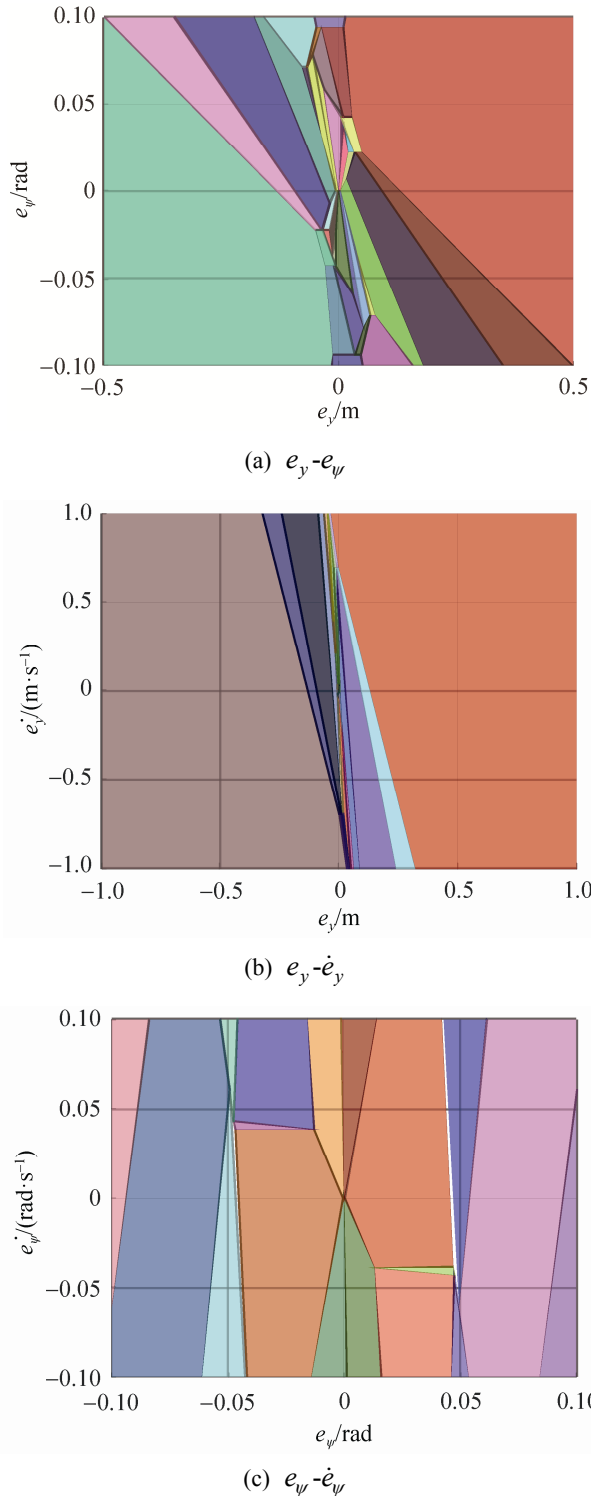


图 6 参数空间分区截面图  
Fig. 6 Sectional view of parameter space

图 6 中, 每一个参数分区均由独立的约束不等式组成, 且每个参数区域包含一个显式线性最优控制律

$$\begin{cases} H_i \zeta(k) \leq K_i \\ \delta_f(k) = F_i \zeta(k) + g_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 656 \quad (22)$$

式中:  $H_i$  为  $M_i$  行 10 列的矩阵, 表示为  $(H_i)_{M_i \times 10}$ , 其中,  $M_i$  为构成  $i$  分区的不等式个数;  $K_i$  为  $(K_i)_{M_i \times 1}$ ,  $F_i$  为  $(F_i)_{1 \times 10}$ ;  $g_i$  为常数, 均可由式(21)通过多参数二次规划求解得到, 具体求解过程参照文献[15-16]。

由此, 式(22)即为离线求解得到的一个兼顾轨迹跟踪精准性和车辆行驶稳定性的横向轨迹跟踪控制显式多面体分段仿射系统。在线控制时, 按照图 7 所示的在线控制流程, 根据当前时刻参数向量  $\zeta(k)$  定位所处的参数分区及其显式控制律即可得到当前时刻的前轮转角最优控制量, 进而实现车辆横向轨迹跟踪最优控制。

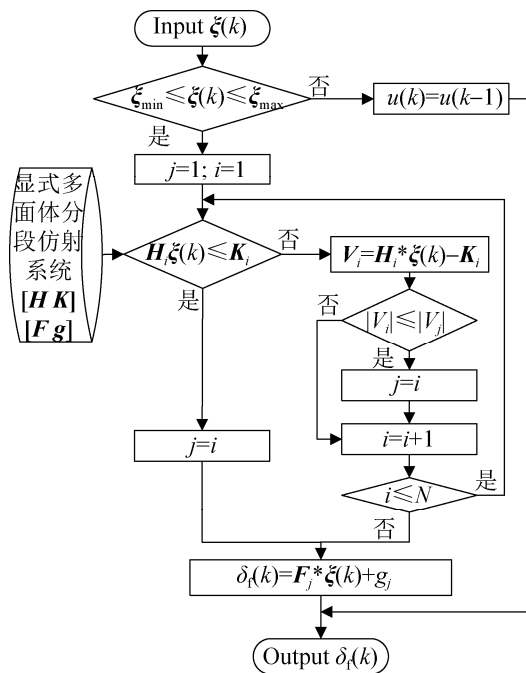


图 7 EMPC 在线控制流程  
Fig. 7 EMPC online control process

图 7 中,  $H = \{H_1, \dots, H_N\}$  为不同维度的矩阵组成的元胞数组,  $N=656$ ;  $K = \{K_1, K_2, \dots, K_N\}$  为不同维度的向量组成的元胞数组;  $F = (F_1, F_2, \dots, F_N)_{N \times 10}$ ;  $g = (g_1, g_2, \dots, g_N)_{N \times 1}$ ;  $H_i \zeta(k) \leq K_i$  表示  $\zeta(k)$  属于分区  $i$ ;



$|V_i|$ 表示  $k$  时刻的状态  $\mathbf{x}(k)$  对分区  $i$  的违背值。

### 3 仿真分析

利用 Carsim 车辆动力学仿真软件, 建立如图 8 所示的椭圆形道路, 路面附着系数 0.5 (潮湿路面), 选用 C 级车作为被控对象, 车辆主要参数见表 1。在车辆的前端设有传感器用以获取道路中心线(期望轨迹)曲率  $k_c$  的变化, 车辆纵向速度  $v_x=25$  m/s。在 Simulink 中搭建控制器, 对前轮转角进行主动控制, 使车辆沿车道中心线行驶一周, 与仅考虑轨迹跟踪精确性的 MPC 控制算法进行了对比。

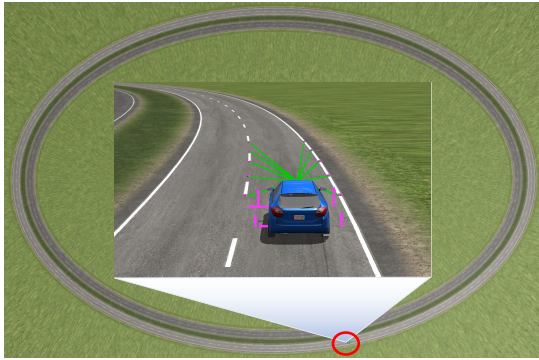


图 8 椭圆形道路  
Fig. 8 Oval road

表 1 车辆主要参数

Tab. 1 Vehicle main parameters

车辆参数	数值
车身质量 $m/\text{kg}$	簧载 1 270+簧下 71=1 341
质心到前轴距离 $a/\text{mm}$	1 015
质心到后轴距离 $b/\text{mm}$	1 850
质心高度 $h/\text{mm}$	510
轮距 $L/\text{mm}$	1 675
车身绕 $z$ 轴转动惯量 $I_z/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	1 536.7
前轮侧偏刚度 $C_{\alpha f}/(\text{N}\cdot\text{rad}^{-1})$	69 000
后轮侧偏刚度 $C_{\alpha r}/(\text{N}\cdot\text{rad}^{-1})$	42 000
重力加速度 $g/(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$	9.8

为定量对比分析 2 种控制器的跟踪精确性和行驶稳定性, 以整个跟踪过程中的横向位置误差  $e_y$ 、航向角误差  $e_\psi$  的均值作为跟踪性的定量评价指标, 文献[17]以载荷转移率  $LTR$  和轮胎附着利用系数  $\varphi$  的最大值( $LTR_{\max}$ ,  $\varphi_{\max}$ )及偏差和( $LTR_{\text{SAD}}$ ,  $\varphi_{\text{SAD}}$ )

作为稳定性量化指标,  $LTR$  代表侧翻稳定性因子,  $\varphi$  代表侧滑稳定性因子。其中,

$$\begin{cases} LTR = |F_{zlf} + F_{zlr} - F_{zrf} - F_{zrr}|/mg \\ LTR_{\text{SAD}} = \sum_{k=2}^n |LTR(k) - LTR(k-1)| \\ \varphi_{ij} = F_{ij}/\mu F_{zij}, \quad ij = lf, lr, rf, rr \\ \varphi_{\text{SAD}} = \sum_{lf,lr,rf,rr} \left[ \sum_{k=2}^n |\varphi_{ij}(k) - \varphi_{ij}(k-1)| \right] / 4 \end{cases} \quad (23)$$

式中:  $F_{zlf}$ ,  $F_{zlr}$ ,  $F_{zrf}$ ,  $F_{zrr}$  分别为各轮垂向载荷;  $n$  为仿真时域内的采样点个数;  $LTR(k)$  为  $k$  时刻的  $LTR$  值;  $F_{ij}$  为各轮在  $x$ ,  $y$  方向上受到地面反作用力的合力;  $\varphi_{\text{SAD}}$  为 4 个轮胎上的  $\varphi$  的偏差和的均值。

仿真结果如表 2, 3 及图 9, 10 所示。表 2 为在同一台电脑仿真环境下对 2 种控制器仿真耗时的对比, 由于 EMPC 控制器已经离线求解出显式控制律, 相比于 MPC 控制器大大节省了在线控制时间, 平均单步运行速度提升了 53.97%。

表 3 为 2 种控制器控制下的跟踪性和稳定性对比结果, 其中  $LTR_{\max}$ ,  $\varphi_{\max}$  可分别用来代表防侧翻稳定性和防侧滑稳定性, 取值范围均为(0~1), 1 代表已经发生侧翻或侧滑, 0 代表车辆处于理想稳定状态。 $LTR_{\text{SAD}}$ ,  $\varphi_{\text{SAD}}$  可分别用来代表防侧翻稳定性和防侧滑稳定性的波动情况, 值越大代表波动越剧烈, 越容易发生危险。

表 2 耗时对比

Tab. 2 Time-consuming comparison

控制器	车辆行驶	仿真	运算总 耗时/s	平均单步 耗时/ms
	时长/s	步长/s		
MPC	63.8	0.05	14.836 6	4.65
EMPC	63.8	0.05	9.648 2	3.02

表 3 跟踪精确性及行驶稳定性对比

Tab. 3 Comparison of tracking accuracy and driving stability

控制器	跟踪性		稳定性			
	$e_y/\text{m}$	$e_\psi/(\text{°})$	$LTR_{\max}$	$\varphi_{\max}$	$LTR_{\text{SAD}}$	$\varphi_{\text{SAD}}$
MPC	0.108 2	0.276 0	0.350 6	0.926 4	4.433 1	10.687 8
EMPC	0.195 6	0.276 0	0.330 6	0.835 5	2.061 5	5.311 5

从表 3 可以看出兼顾行驶稳定性的 EMPC 控

制器在保证跟踪精度的情况下, 最大横向载荷转移  $LTR_{\max}$  改善 5.92%, 最大轮胎利用附着系数  $\phi_{\max}$  改善 9.81%, 稳定性得到较大提升。

图 9(a)为 Carsim 中传感器实时获取的道路曲率变化情况, 图 9(b)为前轮转角控制量的对比, 相比于只考虑跟踪性的 MPC 控制, 兼顾跟踪性和稳定性的 EMPC 的前轮转角控制量更加平滑稳定, 波动更小。通过对图 9(c), (d)的数据统计, MPC 的横向位置误差均值 0.108 2 m, 航向角误差均值 0.276°; EMPC 横向位置误差均值 0.195 6 m, 航向角误差均值 0.276°。相比之下 EMPC 控制器的跟踪精度稍差, 但在曲率较小的部分横向位置误差也能保证在 0.2 m 以内、航向角误差保证在 0.01 rad 以内。从图 9(d), (f)可以看出, 兼顾稳定性的 EMPC 控制的误差变化率更加平缓, 意味着跟踪过程中有着更好的稳定性和舒适性。

图 10(a)为位置误差与航向角误差的相轨迹图。图 10(b), (c)分别为质心侧偏角及其变化率、横向速度与横摆角速度的相轨迹图。图 10(a)中可以看出, EMPC 牺牲了一定的跟踪精度, 但是跟踪误差的变化更加平滑; MPC 控制的误差相轨迹在  $e_y > 0.2$  的阶段变化比较明显, 是由于此时路径曲率较大, 期望轨迹更加难以跟踪, 只考虑跟踪性的 MPC 控制器前轮转角过激。图 10(b)中可以看出, 整个过程中兼顾稳定性的 EMPC 控制器质心侧偏角及其变化率都更小一些, 而只考虑跟踪性的 MPC 控制器在路径曲率较大时即图中左半部分前轮转角过激, 使得轨迹发散, 存在较大安全风险。同理, 图 10(c)表明兼顾稳定性的 EMPC 控制器相轨迹更加收敛, 并没有受到曲率变化的影响, 车辆跟踪行驶的稳定性和舒适性更好。

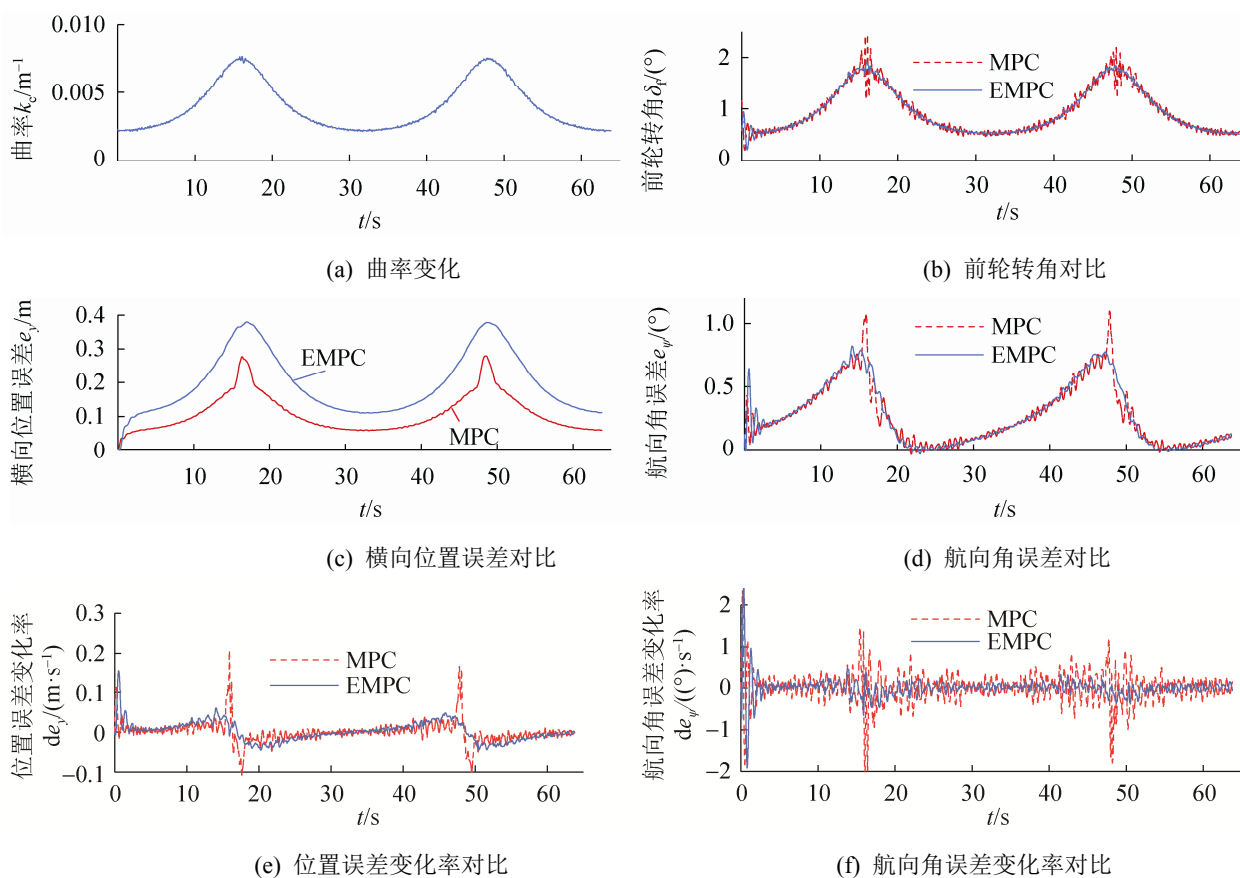
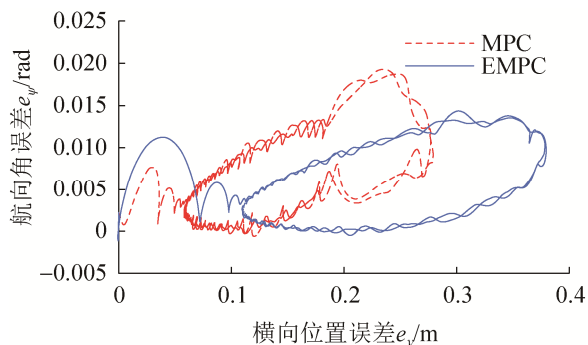
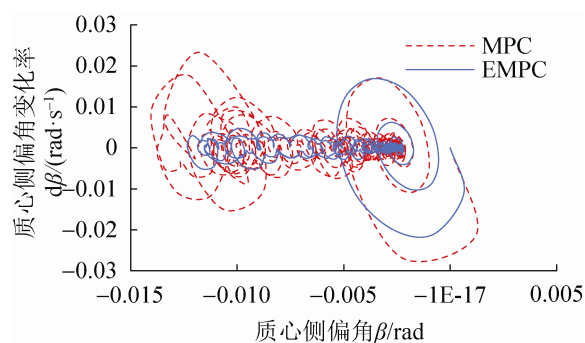


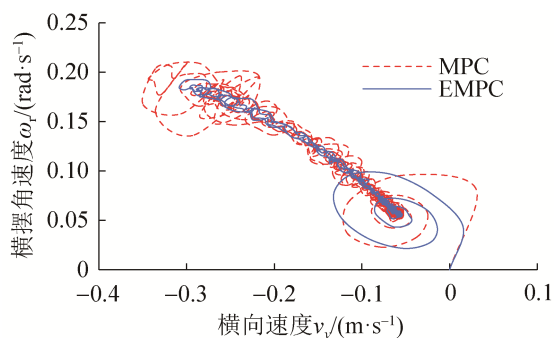
图 9 仿真结果对比  
Fig. 9 Simulation results



(a) 跟踪性像轨迹对比



(b) 稳定性像轨迹对比 1



(c) 稳定性像轨迹对比 2

图 10 相轨迹对比

Fig. 10 Phase trajectory comparison

## 4 结论

本文提出的兼顾轨迹跟踪精确性和行驶稳定性的横向轨迹跟踪显式模型预测控制方法,在低附着系数路面行驶时,车辆的横向位置误差均值为 0.195 6 m,航向角误差均值为 0.276°,相比于只考虑跟踪性的 MPC 控制器,在满足跟踪要求的前提下,最大横向载荷转移  $LTR_{\max}$  改善 5.92%,最大轮胎利用附着系数  $\varphi_{\max}$  改善 9.81%,保证了行驶稳定性,且平均单步运行速度提升 53.97%,有效改善

了在线控制的实时性。

## 参考文献:

- [1] 陈慧岩, 陈舒平, 龚建伟. 智能汽车横向控制方法研究综述[J]. 兵工学报, 2017, 38(6): 1203-1214.  
Chen Huiyan, Chen Shuping, Gong Jianwei. A Review on the Research of Lateral Control for Intelligent Vehicles[J]. Acta Armamentarii, 2017, 38(6): 1203-1214.
- [2] Paden B, Čáp M, Yong S Z, et al. A Survey of Motion Planning and Control Techniques for Self-driving Urban Vehicles[J]. IEEE Transactions on intelligent vehicles (S2379-8904), 2016, 1(1): 33-55.
- [3] Amer N H, Hairi Z. Modelling and Control Strategies in Path Tracking Control for Autonomous Ground Vehicles: A Review of State of the Art and Challenges[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems (S1573-0409), 2017, 86(2): 225-254.
- [4] 刁勤晴, 张雅妮, 朱凌云. 双预瞄点智能车大曲率路径的横纵向模糊控制[J]. 中国机械工程, 2019, 30(12): 1445-1452.  
Diao Qinqing, Zhang Yani, Zhu Lingyun. A Lateral and Longitude Fuzzy Control of Intelligent Vehicles with Double Preview Points for Large Curvature Road[J]. China Mechanical Engineering, 2019, 30(12): 1445-1452.
- [5] Zhang B, Chen G, Zong C. Path Tracking of Full Drive-by-Wire Electric Vehicle based on Model Prediction Control[C]// 2018 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). Changshu, Suzhou, China: IEEE, 2018: 868-873.
- [6] 程硕, 李亮, 陈百鸣, 等. 基于主动转向与主动制动的智能车路径跟踪[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2017, 45(增 1): 28-34.  
Cheng Shuo, Li Liang, Chen Baiming, et al. An Autonomous Vehicle Path Tracking Controller Via Active Steering and Differential Brake[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2017, 45(S1): 28-34.
- [7] 高洪波, 李升波, 谢国涛, 等. 智能汽车横向轨迹跟踪的离散时间模型预测控制[J]. 指挥与控制学报, 2018, 4(4): 297-305.  
Gao Hongbo, Li Shengbo, Xie Guotao, et al. Discrete-Time Model Predict Control for Lateral Trajectory Tracking of Intelligent Vehicles[J]. Journal of Command and Control, 2018, 4(4): 297-305.
- [8] Xu S, Peng H. Design, Analysis, and Experiments of Preview Path Tracking Control for Autonomous Vehicles[J]. IEEE Transactions on Intelligent



- Transportation Systems (S1558-0016), 2019, 21(1): 48-58.
- [9] Ji J, Khajepour A, Melek W W, et al. Path Planning and Tracking for Vehicle Collision Avoidance Based on Model Predictive Control With Multiconstraints[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology (S1939-9359), 2017, 66(2): 952-964.
- [10] 林棻, 倪兰青, 赵又群, 等. 考虑横向稳定性的智能车辆路径跟踪控制[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2018, 46(1): 84-90.  
Lin Fen, Ni Lanqing, Zhao Youqun, et al. Path Following Control of Intelligent Vehicles Considering Lateral Stability[J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science), 2018, 46(1): 84-90.
- [11] Yu R, Guo H, Sun Z, et al. MPC-based Regional Path Tracking Controller Design for Autonomous Ground Vehicles[C]// 2015 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. Hong Kong, China: IEEE, 2015: 2510-2515.
- [12] Guo H, Liu J, Cao D, et al. Dual-envelop-oriented Moving Horizon Path Tracking Control for Fully Automated Vehicles[J]. Mechatronics (S1873-4006), 2018, 50(4): 422-433.
- [13] Kayacan E, Ramon H, Saeys W. Robust Trajectory Tracking Error Model-based Predictive Control for Unmanned Ground Vehicles[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics (S1941-014X), 2015, 21(2): 806-814.
- [14] Mayne D Q. Model Predictive Control: Recent Developments and Future Promise[J]. Automatica (S1873-2836), 2014, 50(12): 2967-2986.
- [15] Bemporad A. A Multiparametric Quadratic Programming Algorithm with Polyhedral Computations Based on Nonnegative Least Squares[J]. IEEE Transactions on Automatic Control (S1558-2523), 2015, 60(11): 2892-2903.
- [16] 张聚. 显式模型预测控制理论与应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2015: 47-50.  
Zhang Ju. Theories and Applications of Explicit Model Predictive Control[M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2015: 47-50.
- [17] 贺宜, 褚端峰, 吴超仲, 等. 路面附着条件对车辆横向稳定性影响的量化分析[J]. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版), 2014, 38(4): 784-787.  
He Yi, Chu Duanfeng, Wu Chaozhong, et al. Quantitative Analysis of Influence on Vehicular Lateral Stability by Road Surface Condition[J]. Journal of Wuhan University of Technology (Transportation Science & Engineering), 2014, 38(4): 784-787.