

6-9-2021

Multi-objective Optimization of Multi-task Parallel Motorcycle Suspension System Parameters

Xiansheng Ran

School of Mechanical & Vehicle Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China;

Yang Jing

School of Mechanical & Vehicle Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China;

Luo Ling

School of Mechanical & Vehicle Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China;

Chen Kai

School of Mechanical & Vehicle Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Multi-objective Optimization of Multi-task Parallel Motorcycle Suspension System Parameters

Abstract

Abstract: Aiming at the comprehensive problem of wobble of front suspension system and weave of rear suspension system of large displacement motorcycle at medium and high speed, a multi-objective optimization scheme based on sensitivity analysis and approximate modeling is proposed. The motorcycle model is established and the dynamics simulation is carried out. The lateral acceleration of front wheel's centroid position, the yaw rate and roll rate of whole vehicle's centroid position, which characterize the wobble and weave are the targets. *The sensitivity analysis of suspension system parameters and the approximate modeling are carried out. Based on the analysis results, the multi-objective optimization analysis of suspension system parameters is accomplished, and the root locus method is used to verify the optimization results.* The results show that the stability of wobble and weave mode is significantly improved.

Keywords

suspension, sensitivity analysis, approximate modeling, multi-objective optimization, root locus

Recommended Citation

Ran Xiansheng, Yang Jing, Luo Ling, Chen Kai. Multi-objective Optimization of Multi-task Parallel Motorcycle Suspension System Parameters[J]. Journal of System Simulation, 2021, 33(5): 1216-1223.

多任务并行的摩托车悬架系统参数多目标优化

冉险生, 杨静, 罗领, 陈凯

(重庆交通大学 机电与车辆工程学院, 重庆 400074)

摘要: 针对大排量摩托车中高速行驶时前悬架系统摆振(wobble)和后悬架系统迂回摆动(weave)的综合问题, 提出一种基于灵敏度分析和近似建模的多目标优化方案。建立摩托车模型并完成动力学仿真, 以表征摆振和迂回摆动的前轮质心位置侧向加速度、整车质心位置横摆角速度和侧倾角速度为目标, 对悬架系统参数进行灵敏度分析和近似建模, 基于分析结果完成悬架系统参数的多目标优化, 并利用根轨迹法对优化结果进行验证。结果表明, 优化后摩托车的摆振和迂回摆动模态稳定性得到明显提升。

关键词: 悬架; 灵敏度分析; 近似建模; 多目标优化; 根轨迹

中图分类号: U483; TP391 文献标志码: A 文章编号: 1004-731X (2021) 05-1216-08

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.20-0041

Multi-objective Optimization of Multi-task Parallel Motorcycle Suspension System Parameters

Ran Xiansheng, Yang Jing, Luo Ling, Chen Kai

(School of Mechanical & Vehicle Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: Aiming at the comprehensive problem of wobble of front suspension system and weave of rear suspension system of large displacement motorcycle at medium and high speed, a multi-objective optimization scheme based on sensitivity analysis and approximate modeling is proposed. The motorcycle model is established and the dynamics simulation is carried out. The lateral acceleration of front wheel's centroid position, the yaw rate and roll rate of whole vehicle's centroid position, which characterize the wobble and weave are the targets. *The sensitivity analysis of suspension system parameters and the approximate modeling are carried out. Based on the analysis results, the multi-objective optimization analysis of suspension system parameters is accomplished, and the root locus method is used to verify the optimization results.* The results show that the stability of wobble and weave mode is significantly improved.

Keywords: suspension; sensitivity analysis; approximate modeling; multi-objective optimization; root locus

引言

摩托车中高速行驶时, 前悬架系统的摆振和后悬架系统的迂回摆动模态稳定性是评判其操纵稳定性的重要指标。Sharp^[1]对摩托车行驶时摆振和迂回摆动的研究, 奠定了近代摩托车动力学研究基

础。Evangelou 等^[2]研究了机械转向补偿器对摩托车前悬架系统摆振的影响。冉险生等^[3]提出一种基于灵敏度分析的优化方案, 以提升摩托车前悬架摆振模态的稳定性。Cossalter 等^[4]研究了轮胎充气压力对摩托车高速行驶时迂回摆动的影响, 并通过实车试验和根轨迹法对研究结果进行了验证。

收稿日期: 2020-01-14 修回日期: 2020-03-27

基金项目: 重庆市博士后科研项目(Xm2017116)

第一作者: 冉险生(1971-), 男, 博士, 副教授, 研究方向为车辆动力学。E-mail: cqrxs@qq.com

Singhania 等^[5]运用根轨迹法对摩托车低速行驶时迂回摆动模态稳定性的影响因素进行了分析, 并通过实车试验验证了该方法的正确性与可行性。徐中明等^[6]通过对悬架系统刚度和阻尼的重新匹配, 以提升摩托车加速、制动工况下的动力学性能。Ramirez 等^[7]利用根轨迹法对不同前悬架结构形式对摩托车动力学性能的影响进行了分析。

国内外学者分别对摩托车前悬架系统摆振和后悬架系统迂回摆动进行了大量研究, 但鲜有文章同时考虑两者对整车动力学性能的影响。研究表明, 摩托车前悬架系统摆振和后悬架系统迂回摆动是 2 个相互矛盾的问题, 因此进行高速摩托车动力学分析时需综合考虑前悬架系统摆振和后悬架系统迂回摆动的相互影响, 以解决大排量摩托车中高速行驶时的不稳定问题, 提升悬架系统整体的动力学性能。

本文以某国产大排量摩托车为研究对象, 通过动力学建模与仿真分析问题, 以表征摆振的前轮质心位置侧向加速度和表征迂回摆动的整车质心位置的横摆角速度和侧倾角速度为目标, 对悬架系统主要设计参数进行灵敏度分析。为提高仿真效率, 对动力学模型进行近似建模, 并根据近似模型完成悬架系统参数的多目标优化, 最后利用根轨迹

方法验证了优化方案的可行性和有效性。

1 摩托车动力学建模与仿真

1.1 模型建立

以某 500 mL 大排量摩托车为研究对象, 利用拉格朗日方法推导出摩托车模型的动力学方程^[8]:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} q_v \\ q_p \\ p_\lambda \\ p_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^{-1}(q_p)Q(q_v, q_p, p_\lambda, u) \\ A_p q_v \\ f_\lambda(q_v, q_p, p_\lambda) \\ f_t(q_v, q_p, p_t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: q_v 为速度向量; q_p 为位置向量; p_λ , p_t 分别为轮胎状态向量和轨迹状态向量; μ , Q 分别为质量矩阵和最小坐标下的广义力向量在车辆参考坐标系上的投影; A_p 为速度投影矩阵; u 为输入向量, 具体表达为:

$$u = (M_f, M_r, T_s, F)^T \quad (2)$$

式中: M_f , M_r 分别为前后轮的制动力矩; T_s 为转向力矩; F 为驱动力矩。

在动力学软件 BikeSim 中建模, 将整车系统分为车身、转向、前悬架和后悬架等子系统, 摩托车整车建模如图 1 所示。并根据 NASA 标准建立 70 kg 驾驶员模型, 上半身质量为总质量的 62%, 下半身质量为总质量的 38%。

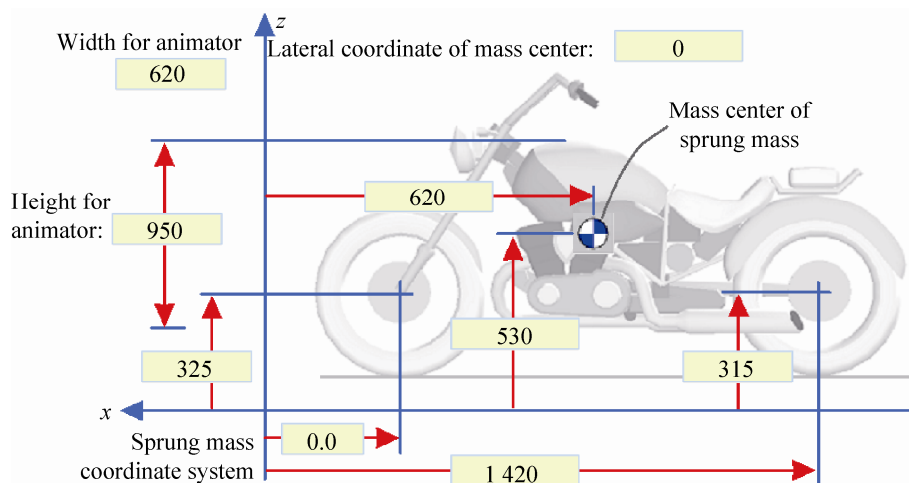


图 1 摩托车模型的建立
Fig. 1 Establishment of motorcycle model

1.2 仿真分析

本文旨在研究直线行驶工况下的摩托车在受到微小干扰时的运动稳定性。根据所建立的摩托车整车模型，仿真工况设置为：车辆由静止起步，全油门加速至极限车速，仿真时间设置为30 s，分别在第2 s和第22 s施加一个10 N·m的瞬态转向力矩输入，如图2所示。

运行仿真，得到表征前悬架摆振和后悬架迂回摆动现象的摩托车车速、前轮质心位置侧向加速度、整车质心位置侧倾角速度和横摆角速度的时域

变化曲线如图3所示。

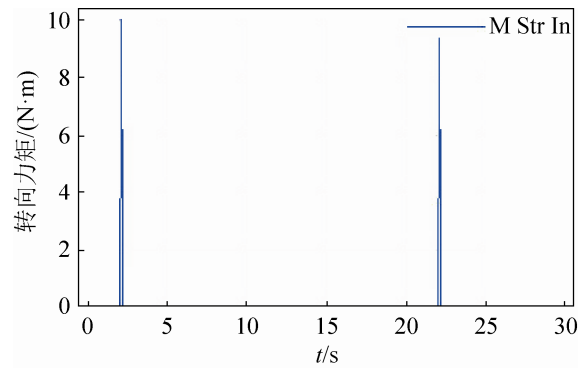
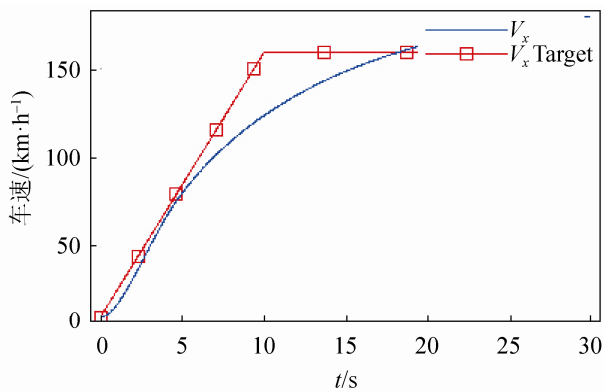
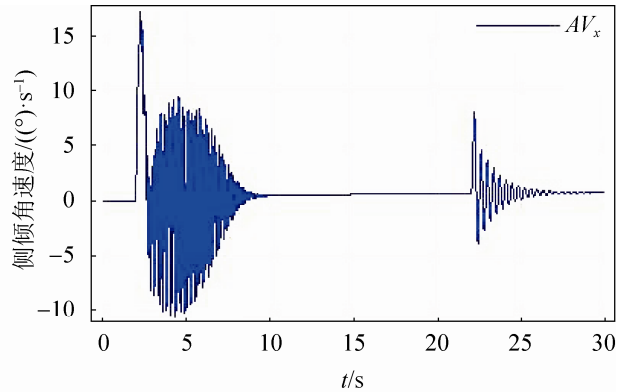


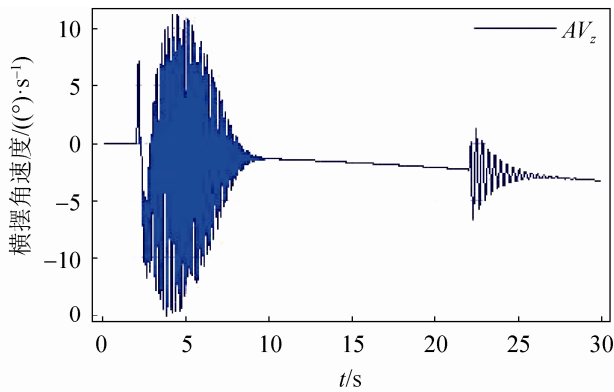
图2 转向力矩输入
Fig. 2 Steering moment input



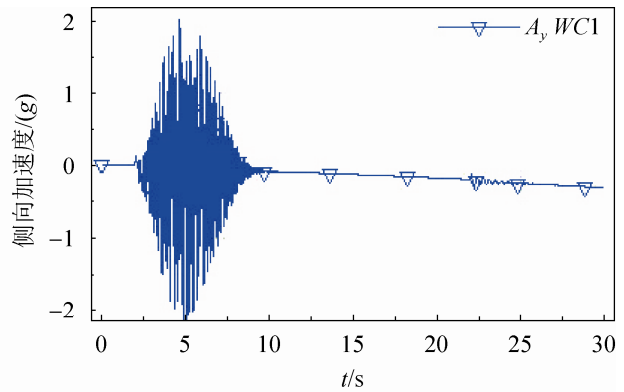
(a) 纵向车速



(b) 整车质心位置侧倾角速度



(c) 整车质心位置横摆角速度



(d) 前轮质心位置侧向加速度

图3 时域响应图

Fig. 3 Time-domain response diagram

由图3(a)所示可知，车辆由原地起步加速，约18 s达到车速160 km/h，随后保持极速约160 km/h行驶。图3(b)显示了整车质心位置侧倾角速度的时域变化曲线，在第2 s时由于瞬态转向力矩的输入，侧倾角速度出现小幅波动，随后由于系统的不稳定

性，角速度变化幅度剧烈，并且幅值增大，在第5 s后达到峰值约9.8 (°)/s，随后降低；在第22 s转向力矩输入后，侧倾角速度受到力矩干扰后有轻微变化，随后逐渐衰减。图3(c)中整车质心位置处的横摆角速度变化规律同侧倾角速度，在第5 s左右达

到峰值约 12 (°)/s, 随后降低; 在第 22 s 转向力矩输入后, 横摆角速度轻微变化后逐渐衰减。图 3(d) 中前轮质心位置侧向加速度在第 5 s 后达到峰值约 2 g (约 19.6 m/s²), 随后降低; 在第 22 s 转向力矩输入后, 侧向加速度无明显变化。仿真现象与摩托车前悬架摆振和后悬架迂回摆动现象基本吻合。

2 悬架参数灵敏度分析

以摩托车悬架系统主要参数为设计变量: 质心离前轮轴距离(LX_CG_MAIN)、质心高度(H_CG_MAIN)、前轮半径(H_WC1)、后轮半径(H_WC2)、簧上质量(MMAIN)、轴距(L_WB)、转向头质量(MSTR)、转向阻尼(BSTR)、前叉后倾角(A_STEER)、前悬架系统刚度(F_AXLE_X_COEFFICIENT)、前悬架系统阻尼(F_AXLE_VX_COEFFICIENT)、前叉质量(M_FORK)、前伸距(X_FORK)、车架扭转刚度(KTWST)、车架扭转阻尼(BTWST)、杠杆比

(CMP_STRUT_LEVER_COEFFIC)、摇臂轴点高度(H_SAP)、摇臂质量(MSA)、后悬架系统阻尼(FD_COEFFICIENT)。以表征摆振的前轮质心位置侧向加速度(A_{y_WC1})和表征迂回摆动的整车质心位置侧倾角速度(AV_x)和横摆角速度(AV_z)峰值为目标响应。

选择空间填充能力和非线性拟合性都较好的最优拉丁超立方设计(Optimization Latin Hypercube Design, OLHD)方法, 完成主要参数的灵敏度分析如图 4 所示, 灵敏度分析图显示了各设计变量对响应的影响程度百分比, 其中蓝色表示正相关, 红色表示负相关。

由图 4 所示主要参数的灵敏度分析可知, 对整个目标响应影响最大的前 7 个设计变量分别为: 前伸距、转向头质量、轴距、前悬架系统刚度、前叉后倾角、摇臂质量、车架扭转刚度。

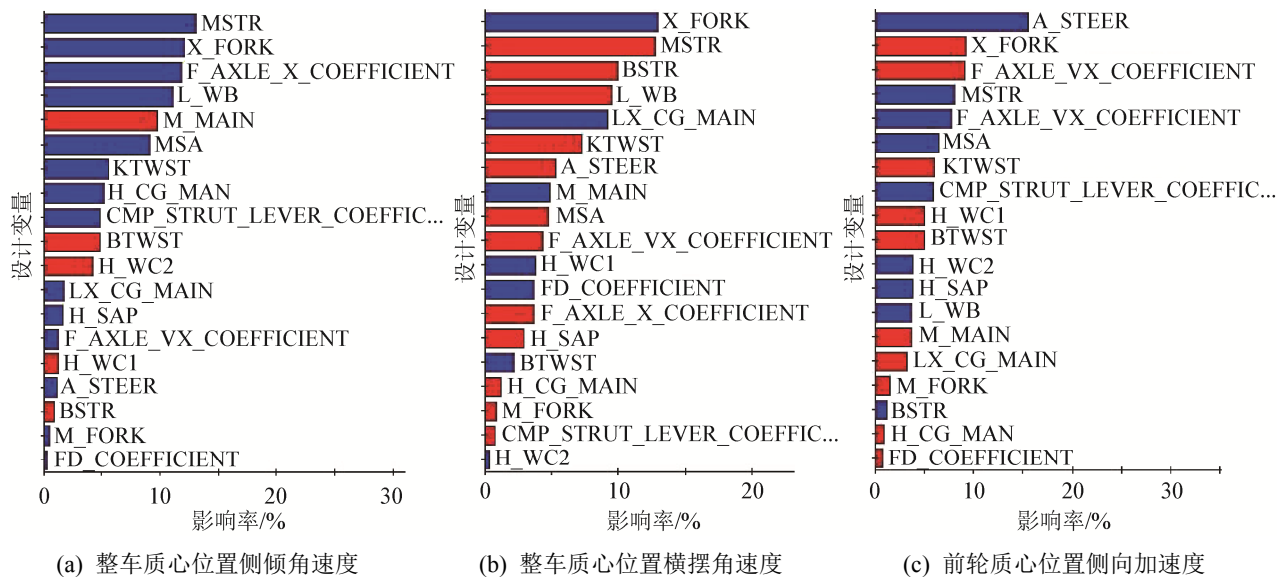


图 4 主要参数的灵敏度分析

Fig. 4 Sensitivity analysis of main parameters

3 近似建模

3.1 近似建模理论

实际的工程仿真问题往往仿真时间长, 设计空间未知, 且输入变量与响应输出值的关系不明确。近似建模方法通过一个近似数学模型来描述一系

列输入与输出值之间的关系, 在保证精度前提下, 通过少量样本数据建立起复杂仿真模型的近似模型, 减少仿真中不必要的分析过程, 从而提高优化效率。近似模型的数学表达式为^[9]:

$$y(x) = \hat{y}(x) + \varepsilon \quad (3)$$

式中: $y(x)$ 为实际响应值; $\hat{y}(x)$ 为近似响应值; ε 为

实际值与近似值的随机误差，通常情况下服从(0, σ^2)标准正态分布。

3.2 不同模型的误差对比分析

根据要求建立近似模型，采用常见的多项式响应面(Response Surface Methodology, RSM)模型、径向基函数(Radial-Basis Function, RBF)神经网络模型和 Kriging 模型 3 种近似建模方法进行近似建模，随机获得 100 个样本点，比较出对于本次仿真精度最高的建模方法。为量化模型误差的大小，常使用均方根值误差(Root Mean Square Error, RMSE)和复相关系数(R^2) 2 个指标对所建立近似模型的精度进行误差分析评价，以判定近似模型是否满足仿真要求。

(1) 均方根误差

均方根误差的值越小，说明近似模型的预测值越接近真实值，近似模型的精度也就越高。均方根表达式为：

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_t} (y_i - \hat{y}_i)^2 / N_t} \quad (4)$$

式中： N_t 为验证点的个数； y_i 为近似模型第 i 个验证点的真实值； \hat{y}_i 为其对应的预测值。

(2) 复相关系数

复相关系数取值介于 0~1 之间，其值越靠近 1，表明近似模型的精度越高。其表达式为：

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N_t} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{N_t} (y_i - \bar{y})^2} \quad (5)$$

式中： \bar{y} 为真实响应值的均值，即

$$\bar{y} = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} y_i \quad (6)$$

选取 50 个误差分析样本点对近似模型进行评估，不同的近似建模方法建立的近似模型误差值如表 1 所示。根据误差值可知，在本次仿真中，多项式响应面模型的各项误差评估指标最好，且均在误差允许范围内，说明多项式响应面模型在本次仿真具有较高的可信度。

选择多项式响应面模型为此问题的近似建模方法，图 5 为响应目标近似模型的拟合结果与样本点的接近程度，即实际值与预测值的误差，模型误差分布接近 45° 对角线，说明近似模型的精度较高。

表 1 误差值
Tab. 1 Error value

目标响应	多项式响应面(RSM)模型		径向基函数(RBF)神经网络模型		Kriging 模型	
	RMSE	R^2	RMSE	R^2	RMSE	R^2
AV_x	0.001	0.997	0.052	0.973	0.064	0.968
AV_z	0.022	0.989	0.068	0.952	0.057	0.974
A_y_WC1	0.003	0.996	0.037	0.987	0.067	0.959

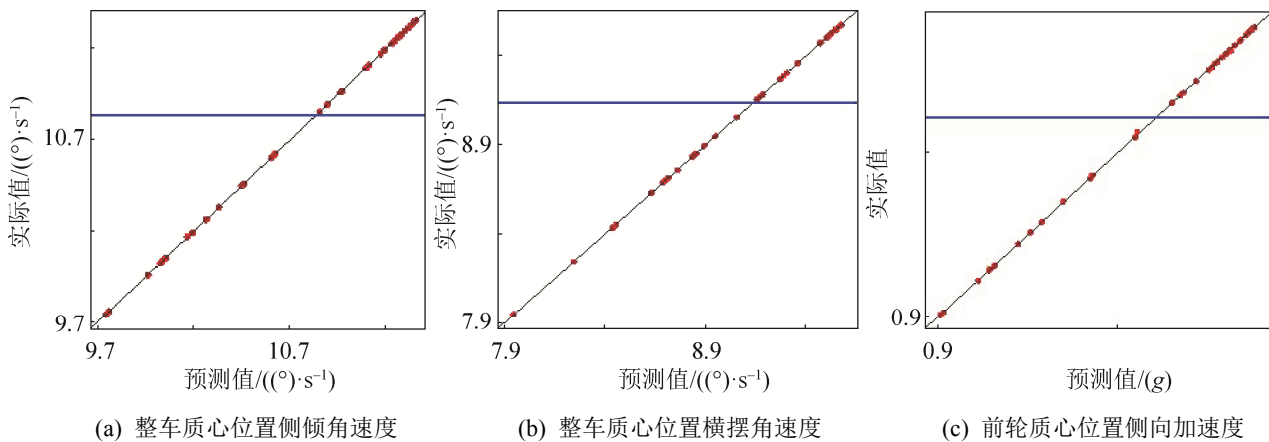


图 5 近似模型误差分析
Fig. 5 Approximate model error analysis

4 悬架系统参数多目标优化

4.1 优化问题的数学模型

以灵敏度分析和近似建模结果为指导, 优化变量为前伸距、转向头质量、轴距、前悬架系统刚度、前叉后倾角、摇臂质量、车架扭转刚度。各变量取值范围设定如下: 前伸距、转向头质量、前悬架系统刚度、摇臂质量和车架扭转刚度的分别设置为初

$$\begin{cases} \min absMax(AV_x) = f_1(A_STEER, X_FORK, MSTR, L_WB, F_AXLE_X_COEFFICIENT, KTWST, MSA) \\ absMax(AV_z) = f_2(A_STEER, X_FORK, MSTR, L_WB, F_AXLE_X_COEFFICIENT, KTWST, MSA) \\ absMax(A_y_WCl) = f_3(A_STEER, X_FORK, MSTR, L_WB, F_AXLE_X_COEFFICIENT, KTWST, MSA) \\ S.T. A_STEER \in S_1, X_FORK \in S_2, MSTR \in S_3, L_WB \in S_4, F_AXLE_X_COEFFICIENT \in S_5, KTWST \in S_6, \\ MSA \in S_7 \end{cases} \quad (7)$$

式中: $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$ 分别为各优化变量对应的取值范围。

带精英策略的快速非支配排序遗传算法 (Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm, NSGA-II) 因其全局搜索性能好、收缩速度快和计算效率高等优点, 是目前工程优化问题中应用最为广泛的优化算法之一, 故此次优化选择 NSGA-II 算法, 设定种群数量为 40, 遗传代数为 60, 交叉率为 0.9。

4.2 优化结果

经过 2 400 次迭代计算, 完成优化分析, 表 3

始值 $\pm 25\%$; 前叉后倾角限于车型定位因素不能大幅改变, 故取值范围为 $27 \pm 2^\circ$; 由于车型确定后轴距改变较为困难, 故取值范围为初始值 $\pm 30\text{mm}$ 。各设计变量的取值范围如表 2 所示。

优化目标为表征摆振和迂回摆动的前轮质心位置侧向加速度、整车质心位置横摆角速度和侧倾角速度峰值最小, 此多目标优化问题的数学模型为:

所示为优化后变量取值。图 6 所示为优化目标寻优历程图, 优化目标寻优历程图显示了各优化目标值的迭代寻优过程, 图中绿色点代表该优化问题的最优解。

表 4 所示为优化前后结果对比, 由表 4 可知, 优化后整车质心位置的侧倾角速度由优化前的 $9.8^\circ/\text{s}$ 变为优化后的 $0.3^\circ/\text{s}$, 整车质心位置的横摆角速度由优化前的 $12^\circ/\text{s}$ 变为 $0.6^\circ/\text{s}$, 前轮质心位置的侧向加速度由优化前的 $2g$ (19.6 m/s^2) 变为 $0.8g$ (7.8 m/s^2), 优化效果明显。

表 2 优化变量取值范围
Tab. 2 Optimal range of variables

变量	前伸距/ mm	转向头质量/ kg	轴距/ mm	摇臂质量/ kg	前叉后倾角/ ($^\circ$)	车架扭转刚度/ ($\text{N}\cdot\text{m}\cdot(\text{^\circ)^{-1})$	前悬架系统刚度/ ($\text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$)
上限	71	7.4	1 390	6.4	25	1 027	6.2
初始值	95	9.8	1 420	8.5	27	1 369	8.2
下限	119	12.3	1 450	10.6	29	1 711	10.3

表 3 优化后变量取值
Tab. 3 Optimized values of variables

变量	前伸距/ mm	转向头质量/ kg	轴距/ mm	摇臂质量/ kg	前叉后倾角/ ($^\circ$)	车架扭转刚度/ ($\text{N}\cdot\text{m}\cdot(\text{^\circ)^{-1})$	前悬架系统刚度/ ($\text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$)
取值	105	7.9	1 397	9.5	28	1 032	8.7

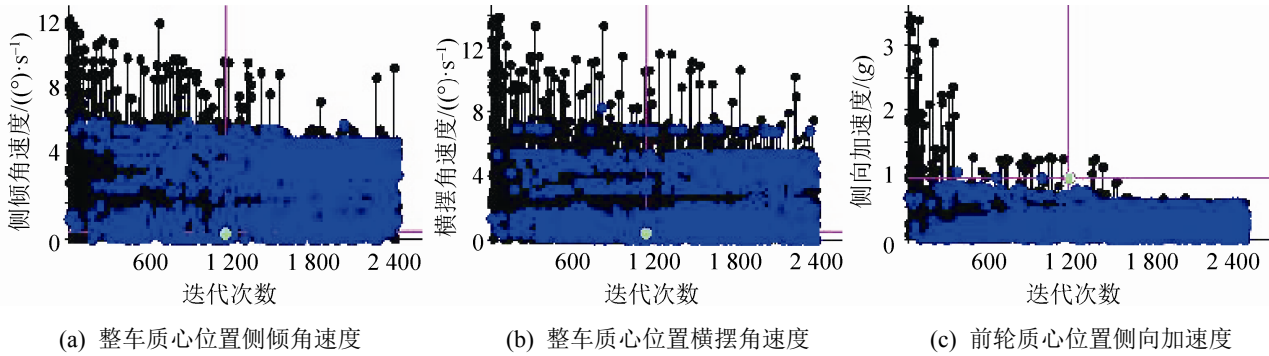


图6 优化目标寻优历程

Fig. 6 Optimization objective optimization process

表4 优化前后结果对比

对比项	$AV_x/((^\circ)\cdot s^{-1})$	$AV_z/((^\circ)\cdot s^{-1})$	A_{y-WC1}
初始值	9.8	12	2
优化值	0.3	0.6	0.8

5 根轨迹检验

根轨迹法作为一种利用反馈控制系统的开环传递函数研究闭环系统性能的图解法,在系统参数变化对系统性能影响分析方面具有简捷直观的优势^[10]。利用根轨迹进行系统稳定性分析的判定准则如下^[11]:在根轨迹复平面上,特征根实部值的正负是系统稳定与否的判定依据。若特征根实部为负,该参数条件下的根轨迹点位于复平面虚轴左侧,则该参数条件下的系统稳定;若特征根实部为正,那么系统的输出响应是发散的,即系统不稳定。基于此判定依据,根据优化前和优化后参数生成摩托车加速行驶时的根轨迹图,如图7所示。摩托车车速由10~160 km/h,连续的根轨迹中每一个轨迹点代表一个车速下的根轨迹点,“□”表示起始车速10 km/h,“◇”表示终止车速160 km/h,从起始车速开始每个根轨迹点间的车速以10 km/h递增。

由图7(a)优化前摩托车根轨迹可知,优化前的摩托车摆振模态约在20~70 km/h时出现不稳定现象,即发生前悬架摆振现象,迂回摆动模态在120 km/h后开始不稳定,与原始车型仿真出现的现象基本一致。由图7(b)优化后摩托车根轨迹可知,优化后的摩托车的摆振和迂回摆动模态在10~160 km/h车速区间的预设工况下系统均处于稳定

区域,说明该摩托车前悬架的摆振和后悬架迂回摆动现象均得到抑制,验证了基于灵敏度分析和近似建模的多目标优化方案的正确性。

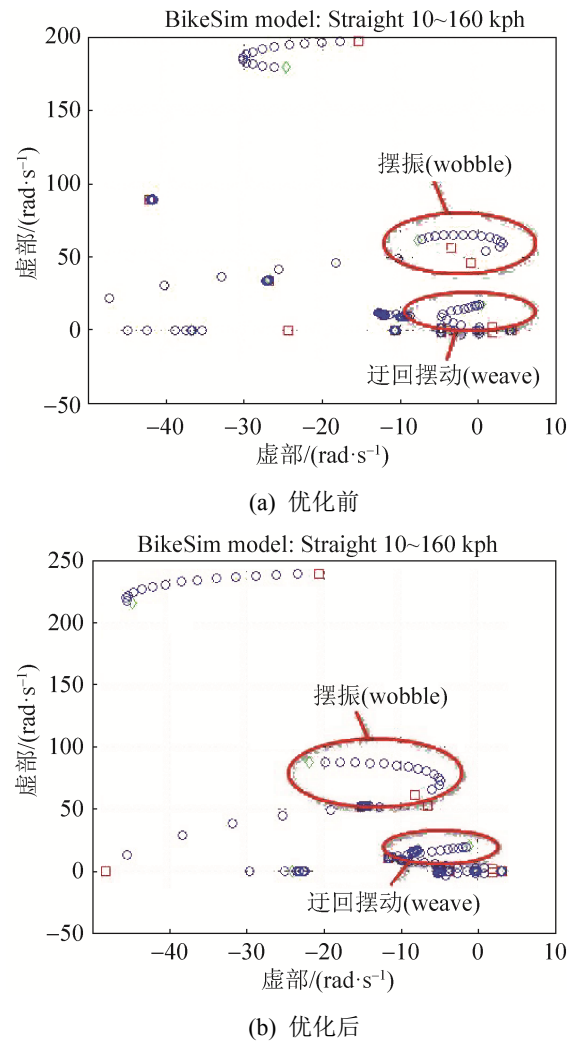


图7 优化前后根轨迹图

Fig. 7 Root locus before and after optimization

6 结论

利用 NSGA-II 遗传算法, 基于灵敏度分析和近似建模实现了某大排量摩托车悬架系统动力学性能的多目标优化。主要研究结论如下:

(1) 建立了摩托车整车系统模型, 并进行动力学仿真分析, 提出摩托车悬架系统摆振和迂回摆动问题。

(2) 对悬架系统参数进行灵敏度分析, 确定出影响较大的参数; 对比分析 3 种不同的近似建模方法, 选择精度最高的方法对仿真进行近似建模; 基于灵敏度分析和近似模型完成悬架参数多目标优化, 优化效果明显。

(3) 利用根轨迹法对优化前后摩托车的摆振和迂回摆动模态稳定性对比分析。结果表明, 优化后摩托车动力学性能明显优于优化前, 验证了基于灵敏度分析和近似建模的多目标优化方案的正确性。

参考文献:

- [1] Sharp R S. The Stability and Control of Motorcycles[J]. *Journal of Mechanical Engineering Science* (S0954-4062), 1971, 13(5): 316-329.
- [2] Evangelou S, Limebeer D, Sharp R S, et al. Mechanical Steering Compensators for High-performance Motorcycles[J]. *Journal of Applied Mechanics* (S1758-8251), 2007, 74(3): 332-346.
- [3] 冉险生, 杨静, 黄泽好. 考虑摆振的摩托车前悬架系统优化分析[J]. *现代制造工程*, 2019(11): 56-61.
Ran Xiansheng, Yang Jing, Huang Zehao. Optimization Analysis of Front Suspension System of Motorcycle Considering Pendulum[J]. *Modern Manufacturing Engineering*, 2019(11): 56-61.
- [4] Cossalter V, Favaron V, Giolo E, et al. The Effect of the Inflation Pressure of Tyres on Motorcycle Weave Stability: Experiments and Simulation[J]. *Vehicle System Dynamics* (S0042-3114), 2016, 54(10): 1474-1490.
- [5] Singhanian S, Kageyama I, Karanam V M. Study on Low-speed Stability of a Motorcycle[J]. *Applied Sciences* (S2076-3417), 2019, 9(11): 2278-2292.
- [6] 徐中明, 杨建国, 张志飞, 等. 基于多工况并行任务的摩托车悬架参数多目标优化[J]. *振动与冲击*, 2013, 32(4): 59-65.
Xu Zhongming, Yang Jianguo, Zhang Zhifei, et al. Multi-objective Optimization of Motorcycle Suspension Parameters Based on Multi-task Parallel Tasks[J]. *Vibration and Shock*, 2013, 32(4): 59-65.
- [7] Ramirez C M, Tomas-Rodriguez M, Evangelou S A. Dynamic Analysis of Double Wishbone Front Suspension Systems on Sport Motorcycles[J]. *Nonlinear Dynamics* (S1573-269X), 2017, 91(6): 1-22.
- [8] David M G. Symbolic-Numeric Tools for the Analysis of Motorcycle Dynamics. Development of a Virtual Rider for Motorcycles Based on Model Predictive Control[D]. Elche: Universidad Miguel Hernández, 2016.
- [9] 周红妮, 冯樱, 汪振晓, 等. 基于 Kriging 近似建模的某越野车悬架多目标优化[J]. *系统仿真学报*, 2017, 29(1): 49-56.
Zhou Hongni, Feng Ying, Wang Zhenxiao, et al. Multi-objective Optimization of an Off-road Vehicle Suspension Based on Kriging Approximate Modeling[J]. *Journal of System Simulation*, 2017, 29(1): 49-56.
- [10] 刘西侠, 袁磊, 刘维平. 基于图解法的三轴车辆操纵稳定性分析[J]. *振动与冲击*, 2016, 35(4): 98-103, 114.
Liu Xixia, Yuan Lei, Liu Weiping. Three-axle Vehicle Handling Stability Analysis Based on Graphic Method[J]. *Vibration and Shock*, 2016, 35(4): 98-103, 114.
- [11] Wellman B J, Hoagg J B. Quadratically Parameterized Root Locus Analysis[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control* (S0018-9286), 2014, 59(7): 1803-1817.