

3-18-2021

Guaranteed Cost Preview and Repetitive Control for Uncertain Linear Discrete Time-Delay Systems

Yonghong Lan

School of information engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China;

Jinlin He

School of information engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Guaranteed Cost Preview and Repetitive Control for Uncertain Linear Discrete Time-Delay Systems

Abstract

Abstract: For a class of uncertain linear discrete time-delay systems, *a design method for guaranteed cost preview and repetitive controller is proposed*. By introducing a repetitive controller in the forward channel to improve the tracking accuracy of the system, L-order difference operators are used to construct an augmented error system that contains preview information but does not include time delay, and *the design problem of guaranteed cost preview and repetitive controller is converted into an output feedback adjustment problem*. Using the Lyapunov stability theory and the linear matrix inequality method, the sufficient conditions for guaranteeing the asymptotic stability of the closed-loop system are obtained. A numerical simulation is presented to illustrate the validity of the proposed method.

Keywords

discrete time-delay system, preview control, repetitive control, guaranteed cost, linear matrix inequality

Recommended Citation

Lan Yonghong, He Jinlin. Guaranteed Cost Preview and Repetitive Control for Uncertain Linear Discrete Time-Delay Systems[J]. Journal of System Simulation, 2021, 33(3): 529-538.

不确定线性离散时滞系统的保性能预见重复控制

兰永红, 贺锦霖

(湘潭大学 信息工程学院, 湖南 湘潭 411105)

摘要: 针对一类不确定线性离散时滞系统, 提出一种保性能预见重复控制器的设计方法。通过在前向通道中引入重复控制器来提高系统的跟踪精度, 利用 L 阶差分算子构造包含预见信息但不含时滞的增广误差系统, 将保性能预见重复控制器的设计问题转化为输出反馈调节问题。运用 Lyapunov 稳定性理论和线性矩阵不等式方法, 得到保证闭环系统渐近稳定的充分条件。用数值仿真来说明目标值预见补偿对不确定离散时滞系统的控制效果。

关键词: 离散时滞系统; 预见控制; 重复控制; 保性能; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273.5; TP391

文献标志码: A

文章编号: 1004-731X (2021) 03-0529-10

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.19-0617

Guaranteed Cost Preview and Repetitive Control for Uncertain Linear Discrete Time-Delay Systems

Lan Yonghong, He Jinlin

(School of information engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

Abstract: For a class of uncertain linear discrete time-delay systems, a design method for guaranteed cost preview and repetitive controller is proposed. By introducing a repetitive controller in the forward channel to improve the tracking accuracy of the system, L -order difference operators are used to construct an augmented error system that contains preview information but does not include time delay, and the design problem of guaranteed cost preview and repetitive controller is converted into an output feedback adjustment problem. Using the Lyapunov stability theory and the linear matrix inequality method, the sufficient conditions for guaranteeing the asymptotic stability of the closed-loop system are obtained. A numerical simulation is presented to illustrate the validity of the proposed method.

Keywords: discrete time-delay system; preview control; repetitive control; guaranteed cost; linear matrix inequality

引言

在工业生产过程中使用的计算机控制系统普遍存在时滞现象, 时滞会使得系统产生明显的超调, 延长调节时间, 从而影响系统的稳定性。但对于控制精度要求高的系统, 为了达到预期的控制效果, 又需要考虑到时滞的影响。因此研究时滞系统的控制问题成为控制领域研究的热点^[1]。文献[2]

研究了不确定线性离散时滞系统的鲁棒容错控制问题, 分别采用无记忆状态反馈和时滞状态反馈控制器, 给出了闭环系统对执行器失效故障具有鲁棒容错能力的充分条件。针对既有输入时滞又有状态时滞的线性系统, 文献[3]提出了嵌套预估法能够有效地补偿时滞对系统的影响。文献[4]在控制器中增加了输入时滞的积分补偿, 使得闭环系统渐近稳定。

收稿日期: 2019-11-26

修回日期: 2020-01-23

基金项目: 国家自然科学基金(61573298), 湖南省自然科学基金(2020JJ6037)

第一作者: 兰永红(1976-), 男, 博士, 教授, 研究方向为重复学习控制理论与应用。E-mail: yhlan@xtu.edu.cn

伺服系统已成为当前航空航天、武器装备、智能制造、数控机床以及机器人等高性能领域的主流趋势,其技术也成为工业自动化和智能制造的核心技术之一。在伺服系统的实际应用中,存在着未知不确定性和外部干扰,要求系统的外部输出仍能无静差的跟踪参考信号,而预见控制就是解决这类控制问题的有效方法^[5]。预见控制能够充分利用未来信息减少干扰造成的系统扰动,从而提高系统的控制精度^[6]。因此有关预见控制的问题受到了学术界的广泛关注。文献[7-9]中论述了预见控制在工业生产过程的仿真中的应用,如机器人的路径规划设计,高铁在自动驾驶模式下的速度自动跟踪控制,汽车悬架系统的设计等。文献[10]针对一类具有凸多面体形式表示的不确定线性离散时滞系统,设计一个带有预见信号的反馈控制器来改善系统的性能。针对线性离散时间系统,文献[11]构造一个包含了预见信息的增广系统,将跟踪控制问题转化为线性二次调节问题,通过求解 Riccati 方程,获得控制器增益。通过离散提升技术^[12]将离散时滞系统转化为无时滞的系统,在此基础上设计最优预见控制器。对于一类不确定的离散时间系统,文献[13]提出了一种基于线性矩阵不等式(LMI)的预见控制器的设计方法,并分析了其稳定性的条件。

在工业生产过程中存在着大量的周期性工作,如脉冲宽度调制逆变器的波形校正^[14]和电机的速度控制^[15],需要对周期性信号进行跟踪或抑制,而重复控制就是解决这类问题的有效策略,其基本思想是在控制系统中引入正反馈时滞环节,利用上一周期的误差信号,实现对参考信号无稳态误差的跟踪^[16]。通过设计不同的结构和算法来解决重复控制在实际应用中出现的问题。针对永磁同步电机在负载突变时产生的抖振现象,文献[17]提出新型的重复滑膜控制策略,具有较强的抗负载性和系统稳定性。文献[18]所设计的学习重复控制器通过在线整定其内部频率来有效抑制未知扰动。文献[19]对于不确定线性离散系统,建立一种基于二维模型的重复控制的设计方法,利用 Lyapunov 函数建立 2 个

稳定性条件,改善了系统的跟踪性能。

尽管离散系统的预见控制和重复控制的研究已取得很大的进展,但是将两者结合起来,对不确定离散时滞系统的预见重复控制研究的相关论点并不多。如文献[20]指出,预见重复控制能够提高系统的跟踪性能,受以上文献的启发,为提高跟踪精度,本文针对不确定离散时滞系统设计一类具有预见前馈补偿功能的保性能重复控制器,通过构造包含可预见的目标值信号的增广误差系统,将保性能预见重复控制器的设计问题转化为增广误差系统的输出反馈调节问题。最后利用 Lyapunov 函数方法和 LMI 技巧得到系统稳定性条件和控制器的参数求解方法。

1 问题描述及基本假设

离散重复控制系统的基本框图如图 1 所示,其中 $G(z)$ 是被控对象, L 既是目标输入信号 $r(k)$ 的周期也是时滞环节的延时时间, $v(k)$ 为重复控制器的输出。

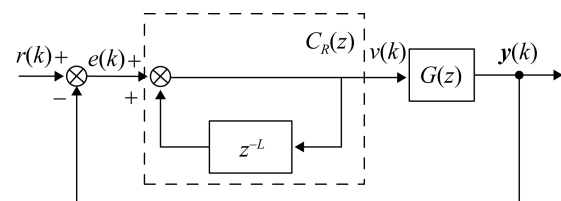


图 1 基本重复控制系统

Fig. 1 Basic repetitive control system

定义系统的跟踪误差为

$$e(k) = r(k) - y(k) \quad (1)$$

重复控制器 $C_R(z)$ 的时域形式为

$$v(k) = \begin{cases} e(k), & 0 \leq k < L \\ v(k-L) + e(k), & k \geq L \end{cases} \quad (2)$$

考虑式(3)具有状态时滞的线性离散时间系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A(\theta)x(k) + A(f\theta)x(k-f) + B(\theta)u(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (3)$$

式中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^r$, $y(k) \in \mathbb{R}^m$ 分别为离散系统的状态向量、控制输入向量和输出向量; C 为 $m \times n$ 维的常数矩阵; $f \in \mathbb{R}^+$ 为系统的状态时滞,

$A(\theta), A(f\theta), B(\theta)$ 为具有适当维数的不确定矩阵, 代表了系统的不确定性。

对线性离散系统作出 2 个基本假设:

假设 1 设不确定矩阵具有如下形式:

$$[A(\theta) \quad A(f\theta) \quad B(\theta)] = \sum_{i=1}^l \theta_i [A_i \quad A_{fi} \quad B_i]$$

式中: A_i, A_{fi}, B_i ($i=1, 2, \dots, l$) 分别是 $n \times n, n \times n, n \times r$ 维的常数矩阵, $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l]^T$ 为不确定的常参数向量且满足

$$\theta \in \Theta := \left\{ \theta \in R^l \mid \theta_i \geq 0, (i=1, 2, \dots, l), \sum_{i=1}^l \theta_i = 1 \right\}$$

假设 2 设目标信号 $r(k)$ 周期为 L 且可预见步数为 M_r ($M_r < L$), 即在当前时刻 k , 目标信号的当前值 $r(k)$ 和 M_r 步未来值 $r(k+1), r(k+2), \dots, r(k+M_r)$ 为已知, M_r 步以后的值为 0, 即 $r(k+M_r+1)=0$ 。

注 1 假设 1 表明系统的不确定性不随时间变化, 只与参数向量 θ 有关。假设 2 是对目标信号预见性的假设, 可以看出系统的性能受未来有限步目标值信号的影响, 并且预见步数之外未来目标值信号的取值对系统的性能影响不大^[21]。

注 2 目标信号 $r(k)$ 的周期 L 不适用于可变周期, 要求周期 L 要大于状态时滞 f 和预见步长 M_r 。

如图 2 所示为基于预见补偿的重复控制系统结构图, $K_r(j)$ ($j=0, 1, \dots, M_r$) 是目标信号的预见补

偿增益, $K_e(j)$ ($j=0, 1, \dots, L-1$) 是重复控制器增益, $K_x(j)$ ($j=0, 1, \dots, f$) 是状态反馈控制增益, K_y 是输出反馈增益。

本文的目的是为了设计如图 2 所示的预见重复控制器, 其形式为

$$u(k) = \sum_{j=0}^{L-1} K_e(j) v(k-j) + K_y y(k) + \sum_{j=0}^f K_x(j) x(k-j) + \sum_{j=0}^{M_r} K_r(j) r(k+j) \quad (4)$$

注 3 预见重复控制器由 4 个部分组成: 重复控制, 输出反馈, 状态反馈和基于可预见的未来目标值信号的前馈补偿。

对于系统变量 $\xi(k)$ ($\xi \in \{x, y, u, r\}$), 定义如下 L 阶差分算子。

即

$$\begin{cases} \Delta x(k) = x(k) - x(k-L), \\ \Delta y(k) = y(k) - y(k-L), \\ \Delta u(k) = u(k) - u(k-L), \\ \Delta r(k) = r(k) - r(k-L). \end{cases} \quad (5)$$

针对不确定离散系统(3), 引入性能指标

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [e^T(k) Q_e e(k) + \Delta u^T(k-f) H \Delta u(k-f)] \quad (6)$$

式中: Q_e 和 H 为给定的正定矩阵且

$$\Delta u(k-f) = u(k-f) - u(k-f-L) \quad (7)$$

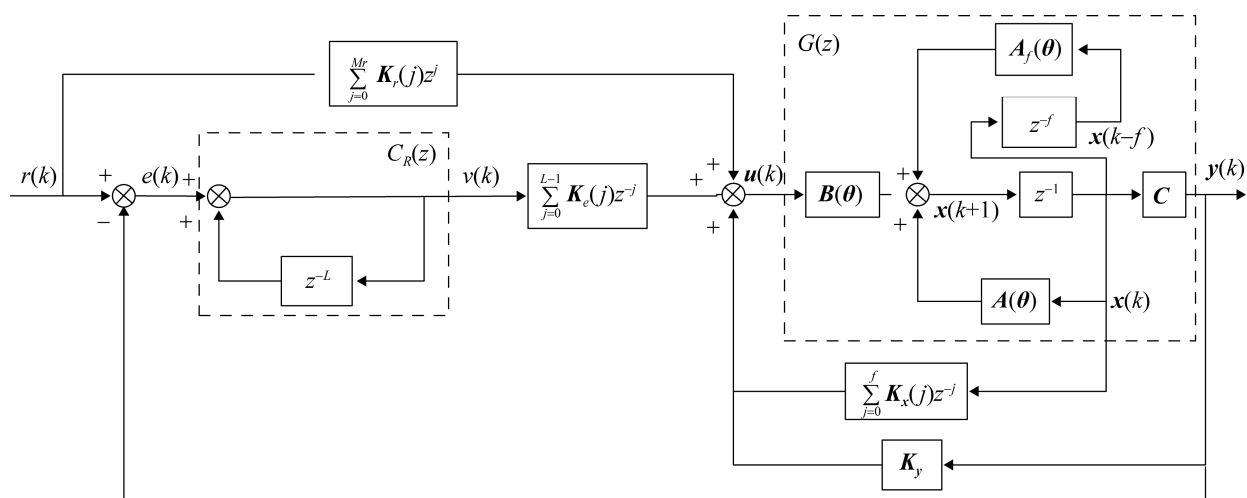


图 2 预见重复控制系统结构框图

Fig. 2 Structure diagram of preview repetitive control system

本文的目的是设计形如式(4)的预见重复控制器, 在控制器中引入可以预见的未来目标值信号, 使得闭环系统满足如下性能:

- (1) 闭环系统是鲁棒稳定的;
- (2) 系统存在不确定性的影响下, 控制器的输出仍能无静差的跟踪参考信号, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} [r(k) - y(k)] = 0 \quad (8)$$

2 预见重复控制器的设计

首先分别对系统式(3)的状态方程两端和误差方程(1)取 L 阶差分得

$$\begin{cases} \Delta x(k+1) = A(\theta)\Delta x(k) + A(f\theta)\Delta x(k-f) + B(\theta)\Delta u(k), \\ e(k+1) = e(k+1-L) + \Delta r(k+1) - CA(\theta)\Delta x(k) - CA(f\theta)\Delta x(k-f) - CB(\theta)\Delta u(k). \end{cases} \quad (9)$$

引入状态向量

$$\bar{x}(k) = [e^T(k) \ e^T(k-1) \ \cdots \ e^T(k-L+1) \ \Delta x^T(k) \ \Delta x^T(k-1) \ \cdots \ \Delta x^T(k-f)]^T \quad (10)$$

综合式(9), (10)得到

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}(\theta)\bar{x}(k) + \bar{B}(\theta)\Delta u(k) + G_r \Delta r(k+1) \quad (11)$$

式中:

$$\bar{A}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & I & -CA(\theta) & 0 & \cdots & 0 & -CA(f\theta) \\ I & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & A(\theta) & 0 & \cdots & 0 & A(f\theta) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^L \theta_i \bar{A}_i$$

$$\bar{B}(\theta) = \begin{bmatrix} -CB(\theta) \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ B(\theta) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^L \theta_i \bar{B}_i, \quad G_r = \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于系统(11), 观测方程为

$$e(k) = \bar{C}\bar{x}(k) \quad (12)$$

式中: $\bar{C} = [I \ \cdots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]$ 。

通过采用离散提升技术将可预见的目标值信号引入到离散系统式(11)中, 令

$$X_r(k) = \begin{bmatrix} \Delta r(k) \\ \Delta r(k+1) \\ \vdots \\ \Delta r(k+M_r) \end{bmatrix}, \quad A_r = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}。$$

由假设 2 可知, 预见方程满足

$$X_r(k+1) = A_r X_r(k) \quad (13)$$

定义新的状态向量

$$\hat{x}(k) = \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ X_r(k) \end{bmatrix} \quad (14)$$

结合式(11)和式(13)得到

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}(\theta)\hat{x}(k) + \hat{B}(\theta)\Delta u(k) \quad (15)$$

式中:

$$\hat{A}(\theta) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^L \theta_i \bar{A}_i & G_{xr} \\ 0 & A_r \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^L \theta_i \begin{bmatrix} \bar{A}_i & G_{xr} \\ 0 & A_r \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^L \theta_i \hat{A}_i,$$

$$\hat{B}(\theta) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^L \theta_i \bar{B}_i \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^L \theta_i \hat{B}_i, \quad G_{xr} = [0 \ G_r \ 0 \ \cdots \ 0]。$$

对于增广系统式(15), 观测方程取为

$$Z(k) = C_z \hat{x}(k) \quad (16)$$

$$\text{其中, } C_z = \begin{bmatrix} I_L & & \\ & C & \\ & & I_{M_r+1} \end{bmatrix}。$$

由式(15)~(16)可得含有预见信息的增广误差系统

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A}(\theta)\hat{x}(k) + \hat{B}(\theta)\Delta u(k) \\ Z(k) = C_z \hat{x}(k) \end{cases} \quad (17)$$

注 4 $Z(k)$ 含有跟踪误差 $e(k)$ 和含有可预见信息的向量 $X_r(k)$, 因此所设计的输出反馈控制器将会带有误差积分项和预见前馈补偿项, 从而能够消除静态误差和改善系统的跟踪性能。

利用系统(15)中的状态向量和输入向量表示性能指标函数, 得到

$$\hat{J} = \sum_{k=0}^{\infty} [\hat{x}^T(k) Q_{\hat{x}} \hat{x}(k) + \Delta u^T(k) H \Delta u(k)] \quad (18)$$

其中, $Q_{\hat{x}} \in R^{[Lq+n+(M_r+1)q][Lq+n+(M_r+1)q]}$ 且

$$Q_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} Q_e & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

根据式(2), (4), 有

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = & \sum_{j=0}^{L-1} K_e(j) e(k-j) + K_y \Delta y + \\ & \sum_{j=0}^f K_x(j) \Delta x(k-j) + \\ & \sum_{j=0}^{M_r} K_r(j) \Delta r(k+j) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{令 } K_e(j) = & \sum_{i=1}^l \beta_i K_{ei}(j), \quad K_y = \sum_{i=1}^l \beta_i K_{yi}, \\ K_x(j) = & \sum_{i=1}^l \beta_i K_{xi}(j), \quad K_r(j) = \sum_{i=1}^l \beta_i K_{ri}(j) \end{aligned} \quad (20)$$

式中: $\beta_i (i=1, 2, \dots, l)$ 为调节变量且满足 $\beta_i \geq 0$,

$\sum_{i=1}^l \beta_i = 1$, 则

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = & \sum_{i=1}^l \beta_i [K_e \quad K_x] \bar{x}(k) + \\ & \sum_{i=1}^l \beta_i K_{yi} \Delta y(k) + \sum_{i=1}^l \beta_i K_{ri} X_r(k) = \\ & (\sum_{i=1}^l \beta_i K_i) Z(k) \end{aligned} \quad (21)$$

式中,

$$\begin{aligned} K_i = & [K_{ei}(0), K_{ei}(1), \dots, K_{ei}(L-1), K_{yi}, \\ & K_{xi}(0), K_{xi}(1), \dots, K_{xi}(f), \\ & K_{ri}(0), K_{ri}(1), \dots, K_{ri}(M_r)] \end{aligned} \quad (22)$$

记 $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l]^T$, $K(\beta) = \sum_{i=1}^l \beta_i K_i$, 有

$$\Delta u(k) = K(\beta) Z(k) \quad (23)$$

于是可将离散系统式(3)在性能指标式(6)下的预见重复控制问题转化为增广系统式(17)在性能指标式(18)下的输出反馈调节问题。

注 5 预见重复控制器式(4)中包含了重复控制

器 $v(k)$, 若按文献[10]中采用的常规离散系统的稳定化控制方法将难以获得重复控制器的增益。因此本文通过 L 阶差分算子和离散提升方法获得增广误差系统式(17), 若增广误差系统式(17)存在输出反馈控制器式(23), 由式(21), (23)即可求得预见重复控制器式(4)的参数。

3 预见重复控制器稳定性的分析

下面的定理给出了增广误差系统式(17)的输出反馈控制器的存在条件和设计方法。

引理 1^[22] 矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}$, 其中 $S_{11} \in R^{r^2}$ 。

以下 3 个条件等价:

- (1) $S < 0$;
- (2) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- (3) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$ 。

引理 2^[23] 对于矩阵 $L \in R^{s^2}$, $H \in R^{s^2}$ 且 $H > 0$, 有 $-L^T H^{-1} L \leq -L - L^T + H$ 。

引理 3^[24] 对于矩阵 T, S, R, N 以及标量 β , 如果 $T + S^T R + R S < 0$, 则以下条件成立

$$\begin{bmatrix} T & (\beta R^T + N S)^T \\ \beta R^T + N S & -\beta N - \beta N^T \end{bmatrix} < 0$$

引理 4 对于增广误差系统式(17)和性能指标式(18), 若存在正定对称矩阵 $P(\theta)$ 和可逆矩阵 $F(\beta) = \sum_{j=1}^l \beta_j F_j$, 使得对于所有的非零 $\hat{x}(k)$ 和所有

允许的不确定性, 有

$$\begin{bmatrix} \Phi & * & * \\ \hat{A}(\theta) F(\beta) + \hat{B}(\theta) G(\beta) & -P(\theta)^{-1} & * \\ H^{\frac{1}{2}} G(\beta) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

成立, 则增广系统式(17)是渐近稳定的, 且性能指标式(18)满足 $\hat{J} \leq \hat{x}_0^T P \hat{x}_0$ 。其中,

$\Phi = -F(\beta) - F(\beta)^T + P(\theta)^{-1} + F(\beta)^T Q_{\hat{x}} F(\beta)$, $Q_{\hat{x}}$ 和 H 为性能指标(18)中的加权矩阵。

证明: 将式(23)代入到式(15)中得到闭环系统

$$\hat{x}(k+1) = [\hat{A}(\theta) + \hat{B}(\theta) K(\beta) C_z] \hat{x}(k) \quad (25)$$

选取 Lyapunov 函数

$$V(\hat{x}(k)) = \hat{x}^T(k)P(\theta)\hat{x}(k) \quad (26)$$

式中, $P(\theta) > 0$, 沿着闭环系统(25)的任意轨迹对 $V(\hat{x}(k))$ 取差分得到

$$\begin{aligned} V(\hat{x}(k+1)) - V(\hat{x}(k)) = \\ \hat{x}^T(k+1)P(\theta)\hat{x}(k+1) - \hat{x}^T(k)P(\theta)\hat{x}(k) = \\ \hat{x}^T(k)[\hat{A}(\theta) + \hat{B}(\theta)K(\beta)C_Z]^T P(\theta)[\hat{A}(\theta) + \\ \hat{B}(\theta)K(\beta)C_Z] - \hat{x}^T(k)P(\theta)\hat{x}(k) \end{aligned} \quad (27)$$

若不等式

$$\begin{aligned} [\hat{A}(\theta) + \hat{B}(\theta)K(\beta)C_Z]^T P(\theta)[\hat{A}(\theta) + \\ \hat{B}(\theta)K(\beta)C_Z] - P(\theta) + Q_x + \\ C_Z^T K(\beta)^T H K(\beta)C_Z < 0 \end{aligned} \quad (28)$$

成立, 则式(27)可以写成

$$\begin{aligned} V(\hat{x}(k+1)) - V(\hat{x}(k)) < \hat{x}^T(k)[P(\theta) - Q_x - \\ C_Z^T K(\beta)^T H K(\beta)C_Z]\hat{x}(k) - \hat{x}^T(k)P(\theta)\hat{x}(k) = \\ -\hat{x}^T(k)[Q_x + C_Z^T K(\beta)^T H K(\beta)C_Z]\hat{x}(k) < 0 \end{aligned} \quad (29)$$

由 Lyapunov 稳定性理论知, 闭环系统式(25)是鲁棒渐近稳定的。

此外可从式(29)中得到

$$\begin{aligned} \hat{x}^T(k)[Q_x + C_Z^T K(\beta)^T H K(\beta)C_Z]\hat{x}(k) < \\ -\Delta V(\hat{x}(k)) \end{aligned} \quad (30)$$

在式(29)两边从 $k=1$ 到 $k=\infty$ 求和, 得

$$\hat{J} = \sum_{k=1}^{\infty} [\hat{x}(k)^T Q_x \hat{x}(k) + \Delta u(k)^T R \Delta u(k)] \leq \hat{x}_0^T P \hat{x}_0 \quad (31)$$

进一步利用引理 1 可将式(28)写成

$$\begin{bmatrix} -P(\theta) + Q_x & * & * \\ \hat{A}(\theta) + \hat{B}(\theta)K(\beta)C_Z & -P(\theta)^{-1} & * \\ H^{\frac{1}{2}}K(\beta)C_Z & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

对式(32)左边的矩阵左乘以这个可逆矩阵 $\text{diag}\{F(\beta)^T, I, I\}$, 同时右乘以这个矩阵的转置 $\text{diag}\{F(\beta), I, I\}$, 可以得到

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & * & * \\ (\hat{A}(\theta) + \hat{B}(\theta)K(\beta)C_Z)F(\beta) & -P(\theta)^{-1} & * \\ H^{\frac{1}{2}}K(\beta)C_Z F(\beta) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

其中, $\Gamma_1 = -F(\beta)^T P(\theta)F(\beta) + F(\beta)^T Q_x F(\beta)$ 。

由引理 2 知

$$\begin{aligned} -F(\beta)^T P(\theta)F(\beta) \leq \\ -F(\beta) - F(\beta)^T + P(\theta)^{-1} \end{aligned} \quad (34)$$

令 $\Phi_1 = -F(\beta) - F(\beta)^T + P(\theta)^{-1} + F(\beta)^T Q_x F(\beta)$, $K(\beta)C_Z F(\beta) = G(\beta)$ 即可得到式(24)的左边矩阵。证毕。

引理 5 如果存在正定对称参数矩阵 $P(\theta)$, 矩阵 $Q, L(\beta)$ 和可逆矩阵 $W, U, F(\beta)$ 和标量 α 使得不等式

$$A(\theta, \beta) = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & * & * \\ \Xi_{21} & -P(\theta)^{-1} & * \\ C_Z F(\beta) - UQ & \Xi_{32} & \Xi_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

成立, 则引理 4 中的结论成立。其中,

$$\Xi_{11} = -F(\beta) - F(\beta)^T + P(\theta)^{-1} + F(\beta)^T Q_x F(\beta),$$

$$\Xi_{21} = \hat{A}(\theta)F(\beta) + \hat{B}(\theta)L(\beta)Q,$$

$$\Xi_{32} = \alpha W^T L(\beta)^T \hat{B}(\theta)^T,$$

$$\Xi_{33} = -\alpha UW - \alpha W^T U^T.$$

证明: 式(35)可以写为

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_{11} & * \\ \Xi_{21} & -P(\theta)^{-1} \end{bmatrix} & * \\ \Psi_{31} & \Xi_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (36)$$

其中, $\Psi_{31} = \alpha W^T L(\beta)^T \hat{B}(\theta)^T [0 \quad I] +$

$$UWW^{-1}U^{-1}(C_Z F(\beta) - UQ)[I \quad 0]。$$

$$\text{取 } T = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & * \\ \Xi_{21} & -P(\theta)^{-1} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \hat{B}(\theta)L(\beta)W$$

$$S = W^{-1}U^{-1}(C_Z F(\beta) - UQ)[I \quad 0], \quad N = UM。$$

由引理 3 和式(36)可以保证

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Xi_{11} & * \\ \Xi_{21} & -P(\theta)^{-1} \end{bmatrix} + \\ & \text{sym} \left[\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \hat{B}(\theta)L(\beta)WW^{-1}U^{-1}(C_Z F(\beta) - UQ)[I \quad 0] \right] = \\ & \begin{bmatrix} \Xi_{11} & * \\ \hat{A}(\theta)F(\beta) & -P(\theta)^{-1} \end{bmatrix} + \\ & \text{sym} \left[\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \hat{B}(\theta)L(\beta)U^{-1}(C_Z F(\beta) + UQ - UQ)[I \quad 0] \right] < 0 \end{aligned}$$

令 $K(\beta) = L(\beta)U^{-1}$, 则

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & * \\ \hat{A}(\theta)F(\beta) & -P(\theta)^{-1} \end{bmatrix}^+ \text{sym} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \hat{B}(\theta)KC_ZF(\beta) \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & * \\ \hat{A}(\theta)F(\beta) + \hat{B}(\theta)KC_ZF(\beta) & -P(\theta)^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (38)$$

由引理 4 可知引理 5 成立。证毕。

需要注意的是, 引理 5 中的判别条件包含不确定参数 θ , 式(35)并不是一个凸问题。引理 6 将把式(35)转化为不含不确定参数的 LMI。

引理 6 对于给定标量 α 和矩阵 Q, W , 若存在适当维数的矩阵 $P_i > 0 (i=1, 2, \dots, l)$, $L_j, F_j > 0 (j=1, 2, \dots, l)$ 使得不等式

$$A_{ij} < 0 (i, j \in 1, 2, \dots, l) \quad (39)$$

成立, 则 $\Delta u(k) = L_j U^{-1} Z(k)$ 是系统式(17)的最优保性能控制器, 且相应的性能指标上界为

$$\hat{J} \leq \sum_{i=1}^l \hat{x}_0^T P_i^{-1} \hat{x}_0. \text{ 其中,}$$

$$A_{ij} =$$

$$\begin{bmatrix} -F_j - F_j^T + P_i^{-1} & * & * & * & * \\ \hat{A}_i F_j + \hat{B}_i L_j Q & -P_i^{-1} & * & * & * \\ C_i F_j - UQ & \alpha W^T L_j^T \hat{B}_i^T & -\alpha U W - \alpha W^T U^T & * & * \\ Q^{\frac{1}{2}} F_j & 0 & 0 & -I & * \\ H^{\frac{1}{2}} L_j Q & 0 & \alpha H^{\frac{1}{2}} L_j W & 0 & -I \end{bmatrix}$$

证明: 令 $P(\theta) = \sum_{i=1}^l \theta_i P_i$, 并且考虑到 $K(\beta), F(\beta)$ 的定义可以得到

$$A(\theta, \beta) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \theta_i \beta_j A_{ij} \quad (40)$$

式(39)能保证 $A(\theta, \beta) < 0$, 即保证了引理 5 的判别条件成立。通过引理 1 可以得到引理 6 成立, 证毕。

特别地, 当 $\theta=1, \beta=1$ 时, 有 $P=P_i, F=F_j, L=L_j$, 由此可以得到推论 1。

推论 1 对于给定标量 α 和矩阵 Q, W , 若存在矩阵 $P > 0, U, L, F$, 使得不等式

$$\begin{bmatrix} -F - F^T + P^{-1} & * & * & * & * \\ \hat{A}F + \hat{B}_i LQ & -P^{-1} & * & * & * \\ C_i F - UQ & \alpha W^T L^T \hat{B}_i^T & -\alpha U W - \alpha W^T U^T & * & * \\ Q^{\frac{1}{2}} F & 0 & 0 & -I & * \\ H^{\frac{1}{2}} LQ & 0 & \alpha H^{\frac{1}{2}} LW & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (41)$$

成立, 则增广误差系统式(17)在保性能预见重复控制器 $\Delta u(k) = KZ(k) = LU^{-1}Z(k)$ 下是渐近稳定的, 且相应的闭环系统的保性能 $\hat{J} \leq \hat{x}_0^T P^{-1} \hat{x}_0$ 。

注 6 若假设 2 成立, 对于给定标量 α 和矩阵 Q, W , 如果推论 1 中由线性矩阵式(41)确定的可行解矩阵 L 和 U 存在, 则式(23)是增广误差系统式(17)在性能指标式(18)下的输出反馈控制器。由于线性离散时滞系统式(3)和增广误差系统式(17)是等价的, 所以等价于式(4)是线性离散时滞系统式(3)在性能指标式(6)下的预见重复控制器。

定理 1 对于给定标量 α 和矩阵 Q, W , 若存在适当维数的矩阵 $P > 0, U, L, F$ 使得线性矩阵式(41)成立, 则线性离散时滞系统式(3)在性能指标函数式(6)下的保性能预见重复控制器为

$$u(k) = \sum_{j=0}^{L-1} K_e(j)v(k-j) + K_y y(k) + \sum_{j=0}^f K_x(j)x(k-j) + \sum_{j=0}^{Mr} K_r(j)r(k+j),$$

其中, $K = [K_e(0), K_e(1), \dots, K_e(L-1), K_y, K_x(0),$

$$K_x(1), \dots, K_x(f), K_r(0), K_r(1), \dots, K_r(M_r)] =$$

$$LU^{-1} \quad (42)$$

4 仿真实验

设离散时滞系统式(3)具有如下参数

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 0.60 & 0.10 \\ 0.45 & 0.80 \end{bmatrix} \theta_1 + \begin{bmatrix} 0.95 & 0 \\ 0.10 & 0.96 \end{bmatrix} \theta_2,$$

$$A(f\theta) = \begin{bmatrix} 0.56 & 0.20 \\ 0.45 & 0.75 \end{bmatrix} \theta_1 + \begin{bmatrix} 0.80 & 0 \\ 0.10 & 0.25 \end{bmatrix} \theta_2,$$

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.14 \end{bmatrix} \theta_1 + \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.34 \end{bmatrix} \theta_2, \quad C = [0.90 \quad 0.50]$$

取不确定参数为 $\theta_1=0.20, \theta_2=0.80$, 取系统的

状态时滞 $f=5$ ，并且设置 $\mathbf{x}(k)$ 的初始值为 $\mathbf{x}(0)=[0 \ 0]^T$ 。假定系统的参考信号为

$$r(k) = \sin\left(\frac{2\pi}{10}k\right) + 0.25\sin\left(\frac{4\pi}{10}k\right) + 0.5\sin\left(\frac{6\pi}{10}k\right)$$

经过多次测试当 $Q_e=10$ ， $H=0.01$ 时系统能够有一个很好的控制效果，选取参数 $W=0.5C_ZC_Z^T$ ， $Q=2C_Z$ ， $\alpha=0.20$ ， $\beta_1=0.80$ ， $\beta_2=0.20$ 。假设目标信号的预见步数为 $M_r=6$ ，通过求解推论 1 中的 LMI 式(41)得到矩阵变量 L ， U ，由此得到反馈增益矩阵 $K=LU^{-1}$ 。

$$\begin{aligned} K_e &= [0.024 \ 6 \quad -0.006 \ 5 \quad -0.001 \ 3 \quad -0.000 \ 5, \\ &\quad -0.000 \ 4 \quad -0.000 \ 7 \quad -0.001 \ 2 \quad 0.000 \ 1 \\ &\quad 0.037 \ 4 \quad 2.318 \ 3], K_y = [-2.248 \ 4], \\ K_x &= [-0.003 \ 4 \quad 2.318 \ 3 \quad 0.037 \ 6 \quad -0.000 \ 1 \\ &\quad -0.001 \ 5 \quad -0.001 \ 1], \\ K_r &= [-0.000 \ 8 \quad -0.001 \ 0 \quad -0.100 \ 6 \quad -0.000 \ 4 \\ &\quad 0.000 \ 6 \quad 0.000 \ 4 \quad 0.000 \ 2]. \end{aligned}$$

将本文所提出的方法与文献[25]提出的不含预见信息的重复控制方法进行对比来验证预见重复控制方法的有效性。由图 3，4 可知，当采用重复控制的方法时，系统要经过 3 个周期之后才能对目标信号进行准确的跟踪且系统误差的最大误差峰值为 0.17 左右；而基于预见补偿的重复控制方法，系统的最大误差峰值为 0.05 左右，经过 2 个周期后，系统的输出便趋于 0，随后达到稳定状态。因此在重复控制系统中引入可以预见的目标信号，能够提高系统的跟踪精度，从而获得更好的控制效果。正如文献[20]所指出的，预见重复控制能够改善系统的跟踪性能。

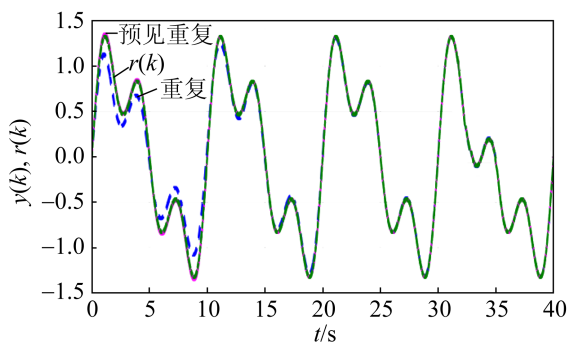


图3 系统的输出响应
Fig. 3 System output response

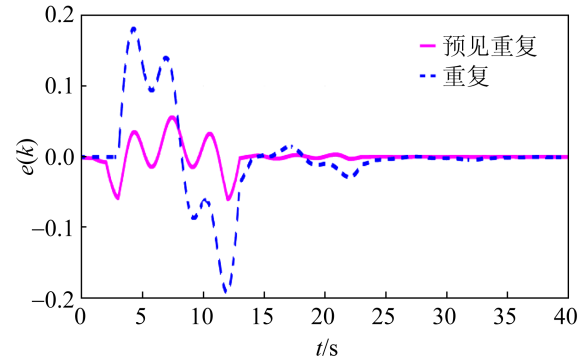


图4 系统的跟踪误差
Fig. 4 System tracking error

为了说明预见步数对系统输出的影响，图 5，6 分别表示采取的预见步数为 $M_r=3$ ， $M_r=5$ ， $M_r=7$ 的预见重复控制系统的参考信号、闭环系统的输出响应和跟踪误差。从图 5 可以看出虽然选取的预见步数不同，但是系统的输出能够准确地跟踪目标信号，并且采用较大的预见步数能够明显的改善跟踪效果。图 6 显示跟踪误差随着目标值预见步数的增加逐渐减小，最终收敛于 0。

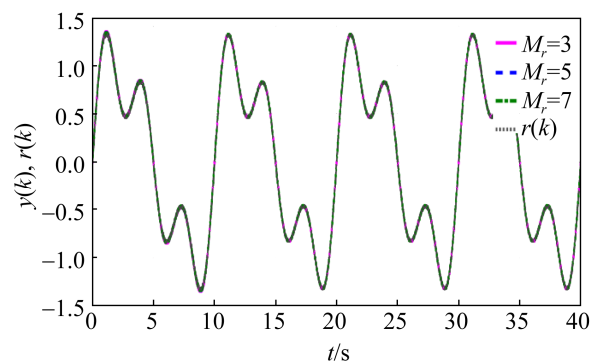


图5 系统的输出响应
Fig. 5 System output response

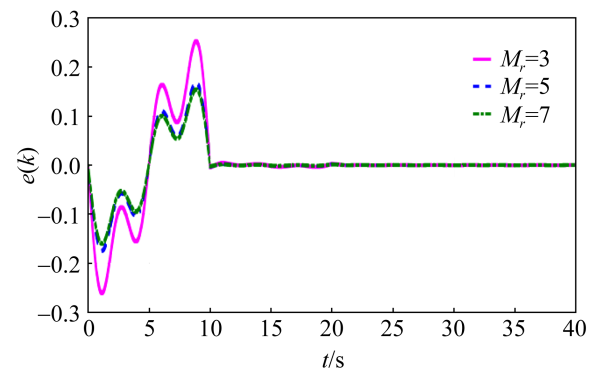


图6 系统的跟踪误差
Fig. 6 System tracking error

但是需要注意的是,并不是预见步数选取的越大对系统的控制性能越好。从图 7 中的系统跟踪误差仿真曲线可以看出,当取到一定的预见步数以后,跟踪效果不会随着预见步数的增加有明显的改善,甚至还会增大系统的误差,这是因为距离当前时刻越远的参考信号对控制器的影响越小,正如文献[5]中所提到的,可预见的目标信号仅在一定步数之内对系统的控制性能产生明显影响。因此采取有效的预见信息能够明显的改善系统的控制性能。

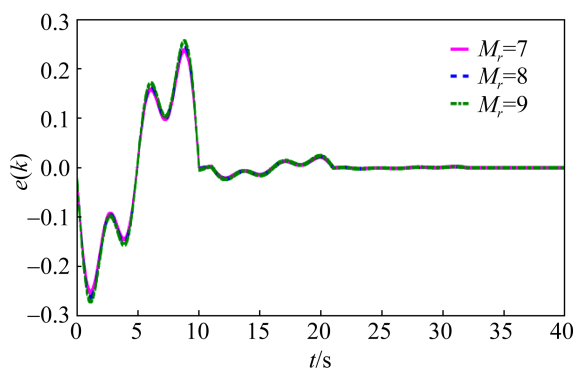


图 7 系统的跟踪误差

Fig. 7 System tracking error

5 结论

针对一类多项形式不确定离散时滞系统,设计了一种带有预见前馈补偿功能的重复控制器。通过引入状态向量将状态时滞消除,将预见信息引入到增广误差系统,从而预见重复控制器的设计问题就转化为系统的输出反馈调节问题。通过 Lyapunov 函数和 LMI 技巧,得到系统的稳定性条件。仿真验证结论的有效性。

参考文献:

- [1] Liu Z X, Lu S. Stabilization Analysis for Discrete-Time Systems with Time Delay[J]. Applied Mathematics and Computation (S0096-3003), 2010, 216(7): 2024-2035.
- [2] 孙俊娜. 不确定线性时滞系统的鲁棒容错控制[D]. 沈阳: 东北大学, 2011.
Sun Junna. Robust Fault-tolerant Control for Uncertain Linear Time-delay Systems[D]. Shenyang: Northeastern University, 2011.
- [3] Zhou B. Input Delay Compensation of Linear Systems with both State and Input Delays by Nested Prediction[J]. Automatica (S0005-1098), 2014, 50(5): 1434-1443.
- [4] Liao Y L, Liao F C. Design of Preview Controller for Linear Continuous-time Systems with Input Delay[J]. International Journal of Control, Automation, and Systems (S1598-6446), 2018, 16(3): 1080-1090.
- [5] 廖福成, 江上正, 土谷武士, 等. 一般型数字最优预见伺服系统的设计[J]. 应用数学和力学, 1996, 17(5): 405-417.
Liao Fucheng, Egami Tadashi, Tsuchiga Takeshi, et al. On General Type of Digital Optimal Preview Servo System[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1996, 17(5): 405-417.
- [6] Zhen Z Y. Research Development in Preview Control Theory and Applications[J]. Acta Astronautica (S0094-5765), 2016, 42(2): 172-188.
- [7] Wu P, Wu W. Walking Pattern Generation of Dual-arm Mobile Robot Using Preview Controller[J]. Research Journal of Applied Science, Engineering and Technology (S1388-0764), 2012, 4(20): 4098-4104.
- [8] 李相儒, 米根锁. 基于最优预见控制的高速列车速度控制器研究[J]. 测控技术, 2019, 38(3): 144-148.
Li Xiangru, Mi Gensuo. Study on Speed Controller of High Speed Train Based on Optimal Preview Control[J]. Measurement & Control Technology, 2019, 38(3): 144-148.
- [9] Hui P, Yan W, Xu Z, et al. Robust State-feedback Control Design for Active Suspension System with Time-varying Input Delay and Wheelbase Preview Information[J]. Journal of the Franklin Institute (S0016-0032), 2019, 24(8): 145-155.
- [10] 廖福成, 苏晓洁, 廖永龙. 不确定离散时滞系统的 H_∞ 保性能预见控制[J]. 工程科学学报, 2016, 38(7): 1008-1016.
Liao Fucheng, Su Xiaojie, Liao Yonglong. Preview Control of H_∞ Guarantee Performance for Uncertain Discrete Time-Delay Systems[J]. Journal of Engineering Science, 2016, 38(7): 1008-1016.
- [11] Wang C R, Wu H N. Off-Policy Reinforcement Learning for Optimal Preview Tracking Control of Linear Discrete-Time systems with Unknown Dynamics[C]// 2018 Chinese Automation Congress (CAC). IEEE, 2018, 65(8): 1402-1407.
- [12] Johannes N S, Fabian C. Preview H_∞ Control of a Hybrid Suspension System[J]. IFAC Papers On Line (S0123-4265), 2019, 52(5): 456-468.
- [13] Liao F, Li L. Robust Preview Control for Uncertain

- Discrete-time Systems based on LMI[J]. Optimum Control Appl Meth (S0143-2087), 2017, 44(5): 22-32.
- [14] 游志青, 胡育文. 采用重复控制技术的逆变器仿真研究[J]. 机械制造与自动化, 2002, 15(3): 37-40.
- You Zhiqing, Hu Yuwen. Research on Inverter Simulation Using Repeated Control Technology[J]. Machinery Manufacturing & Automation, 2002, 15(3): 37-40.
- [15] Rodriguez H, Pons J L, Ceres R A. ZPET-Repetitive Speed Controller for Ultrasonic Motors[J]. Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2016, 4(3): 3654-3659.
- [16] Federico C, Alessandro M. A Stability Analysis Based on Dissipativity of Linear and Nonlinear Repetitive Control[J]. Engineering with Computers (S0177-0667), 2019, 52(2): 325-339.
- [17] 季传坤, 钱俊兵. 基于重复滑膜控制 PMSM 的矢量控制系统[J]. 电子科技, 2019, 32(1): 52-57.
- Ji Chuankun, Qian Junbing. Vector Control System Based on Repetitive Synovial Control PMSM[J]. Electronic Science and Technology, 2019, 32(1): 52-57.
- [18] Wang X H, Pan Z F, Thi T G H. New Repetitive Current Controller for PWM Rectifier[J]. Journal of Electrical Engineering (S1300-0632), 2018, 51(4): 45-56.
- [19] Yuan S G, Zhou B, Ye Q, et al. Discrete-time Repetitive Control Systems Design Method based on Two-dimensional Model[J]. Natural Science (S1875-5100), 2012, 38(1): 60-65.
- [20] 唐巍, 张春来. 最优预见重复控制及其稳定条件[J]. 舰载武器, 1999, 25(1): 38-48.
- Tang Wei, Zhang Chunlai. Optimal Foreseeable Repeated Control and Its Stability Conditions[J]. Shipborne Weapons, 1999, 25(1): 38-48.
- [21] Yoshiro H. New LMI-based Conditions for Preview Feedforward Synthesis[J]. Control Engineering Practice (S0967-0661), 2019, 21(5): 90-95.
- [22] Flores J V, Pereira L F A, Bonan G, et al. A Systematic Approach for Robust Repetitive Controller Design[J]. Control Engineering Practice (S0967-0661), 2016, 54(2): 214-222.
- [23] Chang X H, Zhang L, Park J H. Robust Static Output Feedback H_∞ Control for Uncertain Fuzzy Systems[J]. Fuzzy Sets and Systems (S0165-0114), 2015, 45(2): 87-104.
- [24] Nasiri A, Nguang S K, Swain A, et al. Robust Output Feedback Controller Design of Discrete-time Takagi-Sugeno Fuzzy Systems: a Non-monotonic Lyapunov Approach[J]. Applied Mathematical Modelling (S0307-904X), 2016, 10(5): 545-553.
- [25] 付成宏, 吴敏, 何勇, 等. 基于二维模型的保性能离散重复控制系统设计[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 12(8): 1685-1690.
- Fu Chenghong, Wu Min, He Yong, et al. Design of Guaranteed Performance Discrete Repetitive Control System Based on Two-Dimensional Model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2012, 12(8): 1685-1690.