

10-14-2020

Global Optimization Method Based on Consensus Particle Swarm Optimization

Zhanwen Lu

1. School of Electrical Engineering, University of Ji'nan, Ji'nan 250022, China; ;

Xingong Cheng

1. School of Electrical Engineering, University of Ji'nan, Ji'nan 250022, China; ;2. Center of Intelligent System and Optimization Technology, University of Ji'nan-Global Optimal Big Data, Ji'nan 250022, China;

Yongfeng Zhang

1. School of Electrical Engineering, University of Ji'nan, Ji'nan 250022, China; ;2. Center of Intelligent System and Optimization Technology, University of Ji'nan-Global Optimal Big Data, Ji'nan 250022, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Global Optimization Method Based on Consensus Particle Swarm Optimization

Abstract

Abstract: According to the characteristics of particle swarm optimization (PSO) and efficient global optimization algorithm (EGO), a global black box optimization algorithm based on consensus particle swarm optimization and local surrogate model (CPSO-LSM) is proposed. *The algorithm fixes the period of the PSO algorithm to group the particles and stops after the particles reach a consensus. The high-quality sub-regions around each group of particles are used as the modeling area of the surrogate model, and the high-quality optimal solution or global optimal solution is obtained by comparing the optimal values of each region. It can not only avoid the complex calculation of PSO, improve the speed and precision of establishing agent model, but also avoid falling into local optimum.* By comparing the simulation results of other algorithms in standard test functions, CPSO-LSM has better convergence speed and solution accuracy.

Keywords

particle swarm optimization, efficient global optimization algorithm, consensus-based PSO, surrogate model

Recommended Citation

Lu Zhanwen, Cheng Xingong, Zhang Yongfeng. Global Optimization Method Based on Consensus Particle Swarm Optimization[J]. Journal of System Simulation, 2020, 32(10): 1936-1942.

基于共识粒子群的全局优化求解方法

陆湛文¹, 程新功^{1,2}, 张永峰^{1,2,*}

(1. 济南大学自动化与电气工程学院, 山东 济南 250022; 2. 济南大学-铨优智能系统与优化技术研究中心, 山东 济南 250022)

摘要: 针对粒子群优化(PSO, particle swarm optimization)和高效全局优化(EGO, efficient global optimization)两种算法的特点, 提出一种共识粒子群和局部代理模型协同的全局黑箱优化算法(CPSO-LSM, consensus particle swarm optimization and local surrogate model)。该算法固定 PSO 算法周期对粒子进行分群并在粒子达成共识后停止, 将每群粒子周围的优质子区域输出作为代理模型的建模区域, 通过比较各区域最优值获得高质量最优解甚至全局最优解。不仅避免了 PSO 冗长的计算过程, 提高了建立代理模型的速度和精度还可以避免陷入局部最优。通过对比其他算法在标准测试函数的仿真结果, CPSO-LSM 具有较好的收敛速度和求解精度。

关键词: 粒子群算法; 高效全局优化算法; 共识粒子群; 代理模型

中图分类号: TP301.6 文献标识码: A 文章编号: 1004-731X (2020) 10-1936-07

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.20-FZ0371

Global Optimization Method Based on Consensus Particle Swarm Optimization

Lu Zhanwen¹, Cheng Xingong^{1,2}, Zhang Yongfeng^{1,2*}

(1. School of Electrical Engineering, University of Ji'nan, Ji'nan 250022, China;

2. Center of Intelligent System and Optimization Technology, University of Ji'nan-Global Optimal Big Data, Ji'nan 250022, China)

Abstract: According to the characteristics of particle swarm optimization (PSO) and efficient global optimization algorithm (EGO), a global black box optimization algorithm based on consensus particle swarm optimization and local surrogate model (CPSO-LSM) is proposed. *The algorithm fixes the period of the PSO algorithm to group the particles and stops after the particles reach a consensus. The high-quality sub-regions around each group of particles are used as the modeling area of the surrogate model, and the high-quality optimal solution or global optimal solution is obtained by comparing the optimal values of each region. It can not only avoid the complex calculation of PSO, improve the speed and precision of establishing agent model, but also avoid falling into local optimum.* By comparing the simulation results of other algorithms in standard test functions, CPSO-LSM has better convergence speed and solution accuracy.

Keywords: particle swarm optimization; efficient global optimization algorithm; consensus-based PSO; surrogate model

引言

在工程中存在很多结构不明确、内部规律无法



收稿日期: 2020-04-30 修回日期: 2020-06-17;
基金项目: 山东省自然科学基金(ZR2019QEE019), 山东省高等学校青创科技支持计划(2019KJN029);
作者简介: 陆湛文(1996-), 男, 江苏宿迁, 硕士生, 研究方向全局优化理论与算法; 程新功(1973-), 男, 山东济南, 博士, 教授, 研究方向全局优化理论与算法及其在电力系统中的应用。

得知的优化问题, 即黑箱优化问题。人们通常使用进化算法来解决这类问题。进化算法通过模仿自然界中的种群行为, 让粒子进行信息交互, 并通过重复迭代使粒子群向最优解方向靠拢, 最终得到最优解。粒子群优化(PSO, particle swarm optimization)算法是一种常用的进化算法, 当目标问题较为简单时, PSO 算法的每一次迭代用时较短, 可以很快收

敛并得到最优解。但在实际工程中遇到的问题通常十分复杂, 计算成本昂贵, 每一轮目标值的计算都要消耗大量时间和成本, 此时 PSO 算法表现出收敛速度慢、容易陷入局部最优的缺陷。学者们为了改善 PSO 算法的这些缺点提出了很多改进办法, 主要分为 3 类: (1) 调整 PSO 算法的参数; (2) 设计不同拓扑结构来改变粒子学习模式; (3) 将 PSO 算法与其他算法结合^[1]。

本文通过研究发现 PSO 算法在解决复杂问题时前期的全局搜索能力较强, 粒子能快速聚集在局部最优值附近, 其收敛速度慢、容易陷入局部最优的缺陷主要存在于后期。而代理模型具有计算简单的特点, 在保证精度的前提下可以大幅度减少优化问题的计算量, 此时用代理模型替换仿真模型即可避免 PSO 算法在后期的缺陷。Kriging 模型是一种常用的代理模型, 相比其他代理模型 Kriging 模型不仅可以给出预估点的估计值, 还可以给出相应的预估标准差, 可以方便的看出预估精度。基于 Kriging 模型的 EGO (efficient global optimization) 算法由 D.R.Jones 在 1998 年提出, 它用 Kriging 模型代替仿真模型, 大大减少了计算时间, 非常适合复杂优化问题的计算^[2]。用基于 Kriging 模型的 EGO 算法代替 PSO 算法后期的大量迭代, 可以降低计算成本同时提升计算精度。

为进一步提升 PSO 算法的优化能力, 使之在面对昂贵的计算问题时仍能保持较高的精度和较快的计算速度。本文针对 PSO 算法和 Kriging 模型的特点提出了一种共识粒子群和局部代理模型协同的全局黑箱优化算法 CPSO-LSM (consensus particle swarm optimization and local surrogate model)。该算法通过确定固定的周期对粒子进行分群, 当所有粒子达成共识后即停止 PSO 算法并输出每群粒子周围的优质子区域, 避免了 PSO 算法冗长的计算过程; 在所得优质子区域建立代理模型并用 EGO 算法求解各子区域的最优解, 优质子区域缩小了代理模型的建模范围, 提高了建立代理模型的速度和精度; 由于 PSO 算法具有优秀的全局

搜索特性, 最后通过对比即可获得高质量最优解。

1 基于 Kriging 模型的优化算法

1.1 kriging 模型

Kriging 模型由南非地质学家 D.G.Krige 提出, Cressie 等对其理论进行了完善^[3]。Kriging 模型由回归模型和随机过程 2 部分相加而成, 形式为:

$$y(x) = f^T(x)\beta + z(x) = \mu(x) + z(x) \quad (1)$$

式中: $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)]^T$ 为回归基函数; $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p]^T$ 为回归系数, 代表着回归基函数的权重。 $z(x)$ 是一个随机变量, 具有以下特性:

$$E(z(x)) = 0 \quad (2)$$

$$Var[z(x)] = \sigma^2 \quad (3)$$

$$E[z(x_i)z(x_j)] = \sigma^2 R(x_i, x_j) \quad (4)$$

式中: x_i 和 x_j 为两任意输入量; $R(x_i, x_j)$ 为相关函数, 本文中取高斯函数为相关函数:

$$R(x_i, x_j) = \prod_{k=1}^n \exp(-\theta_k |x_i^{(k)} - x_j^{(k)}|^2) = \exp(-\sum_{k=1}^n \theta_k |x_i^{(k)} - x_j^{(k)}|^2) \quad (5)$$

式中: $x_i^{(k)}$ 为向量 x_i 的第 k 个分量; $x_j^{(k)}$ 为向量 x_j 的第 k 个分量; n 为输入向量的维数; θ_k 为相关参数, 表示函数对 K 维输入发生变化的敏感程度, $y(x)$ 随着 θ_k 的增大对 $x^{(k)}$ 的变化就越敏感。

现在假设有 n 个样本点 $[X_1, X_2, \dots, X_n]$, 对应的响应值为 $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$, 则可得最优无偏估计值为:

$$\hat{y}(x) = \hat{\mu} + r_n(x)^T R_n^{-1} (Y - 1\hat{\mu}) \quad (6)$$

$$\hat{\mu} = \frac{1R_n^{-1}Y}{1R_n^{-1}} \quad (7)$$

式中: $r_n(x)$ 为一个 n 维向量, 其中每一个元素代表预测点与样本点之间的相关函数值; R_n 为一个 n 阶矩阵, 代表所有样本点两两之间的相关函数值; $\hat{\mu}$ 为 μ 的广义最小二乘估计值, 未知参数 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$ 和 σ^2 的值通过求解最大似然估计值获得。

另外, Kriging 模型在估测未知点处值的同时, 还能提供该点处的预测误差为:

$$s^2(x) = \sigma^2 \left[1 - r_n(x)^T R_n^{-1} r_n(x) + \frac{(1 - 1R_n^{-1}r_n(x))^2}{1R_n^{-1}1} \right] \quad (8)$$

1.2 高效全局优化算法(EGO)

在面对黑箱优化问题时,提出了基于 Kriging 模型的优化算法,该算法流程如图 1 所示。

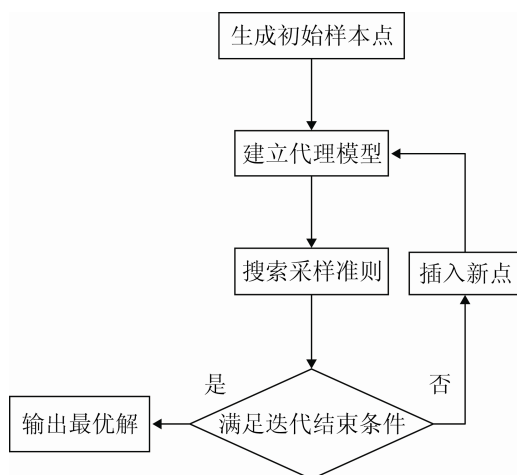


图 1 高效全局优化算法流程

Fig. 1 Efficient global optimization algorithm flow

合适的数量且分布均匀的初始样本点对模型的精度有着很大的提高,常用的采样方法包括拉丁超立方实验设计、全因子实验设计、均匀实验设计等。其中拉丁超立方采样具有良好的广泛性和均匀性,本文采用该方法进行采样。利用采样结果建立的 Kriging 模型在样本稀疏的地方预测结果不准确,因此需要添加新的样本点进行校准。采样准则决定了在哪里添加新的样本点,EGO 算法使用期望提高准则(Expected improvement, EI)来权衡全局搜索和局部搜索。

设当前函数最优值为 y_{\min} , 预估点响应值为 $\hat{y}(x)$, 则预估点 x 处的改善函数为 $I(x)$:

$$I(x) = \max(y_{\min} - \hat{y}(x), 0) \quad (9)$$

预估点 x 处的改善期望为:

$$EI(x) = s(x)[u\psi(u) + \phi(u)] \quad (10)$$

$$u = [y_{\min} - \hat{y}(x)]/s(x) \quad (11)$$

式中: $\psi(u)$ 和 $\phi(u)$ 分别为标准正态分布的密度函数和概率分布函数; $s(x)$ 为 Kriging 模型在预估点处的预测标准误差。通过求解 EI 的最大值,可以

找到对模型精准度提升最大的点,也是最有可能成为最优解的点。通过对比 EI 值与迭代结束条件,不满足条件则将找到的点加入数据库更新模型继续迭代,满足迭代条件后即可输出最优解。

2 共识粒子群和局部代理模型协同的全局黑箱优化算法(CPSO-LSM)

2.1 共识粒子群算法(CPSO)

PSO 算法是由 J. Kennedy 和 R. C. Eberhart 提出的一种进化算法^[4]。该算法模仿鸟群的活动规律,使群体中的粒子共享信息,通过粒子间的合作竞争来求解优化问题。PSO 算法初始化是一群随机的粒子,然后通过多次迭代更新粒子的速度和位置。在每一轮迭代中,粒子通过评估自身当前最优位置 $pbest$ 和整个粒子群的最优位置 $gbest$, 分别用公式(12)和(13)更新粒子位置和速度:

$$v_i^t = w \cdot v_i^{t-1} + c_1 \cdot rand() \cdot (pbest_i^{t-1} - x_i^{t-1}) + c_2 \cdot rand() \cdot (gbest^{t-1} - x_i^{t-1}) \quad (12)$$

$$x_i^t = x_i^{t-1} + v_i^{t-1} \quad (13)$$

式中: w 为惯性因子; v_i 为粒子速度; x_i 为粒子当前位置; $rand()$ 为介于 $[0,1]$ 之间的随机数; c_1, c_2 为学习因子,通常取 $c_1=c_2=2$; i 和 t 为粒子编号和迭代次数。公式(12)的 3 个部分分别称为记忆项、自身认知项和群体认知项,代表粒子的速度受上次速度的大小方向、自身经验和群体经验的影响。

传统的 PSO 算法需要通过多次迭代得到最优解,且在每一次迭代中都需要求解所有粒子的响应值,当遇到计算昂贵的复杂工程问题时将耗费大量时间。为了避开传统 PSO 算法的这个缺陷,本文提出一种 CPSO 算法。不同于传统 PSO 算法直接得到最优解,CPSO 算法旨在利用 PSO 算法的全局搜索能力在搜索的过程中定位有前途的优质子区域。如图 2 所示,传统 PSO 算法中的每个粒子可以相互交换信息,通过这些信息粒子被引导至可能包含全局最优解的区域。粒子群中每个粒子都包含关于全局最优解位置的不同信息,因此粒子经过有限次迭代可能聚集在一个或几个不同的区域中,把

每个区域中的粒子看做一组, 称为共识粒子群^[5]。

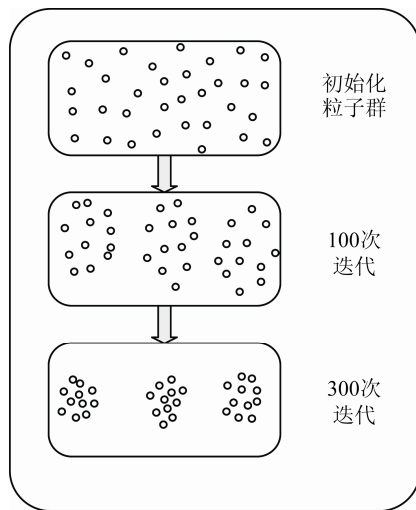


图 2 共识粒子群
Fig. 2 Consensus-based PSO

在 CPSO 算法中, 本文使用无监督的分类方法将每个固定间隔的所有粒子聚类成几组, 本文取间隔大小为 20 次迭代。满足以下条件即称共识粒子群达到“稳定状态”, 同时也作为 CPSO 的停止条件:

(1) 每一个粒子群的粒子个数在 60 次迭代过程中不变; (2) 每一个粒子群的成员在 60 次迭代过程中不变。

2.2 利用共识粒子群确定建模区域

建立 Kriging 模型的区域大小对取得样本点的个数、建立模型耗费的时间和计算成本都有影响, 因此需要尽可能缩小建模区域来加快建模速度并提升模型精度。本节介绍了一种利用共识粒子群位置确定 Kriging 模型建模区域的方法。

在 PSO 算法中, 初始粒子每经过一次迭代都会向最优解处靠近, 经过数次迭代后粒子逐渐收敛在一起, 此时本文称粒子群达成了共识。此时可能存在一个或多个粒子群, 本文将每个粒子群看作一个单独问题进行求解。利用每个共识粒子群中粒子位置可以确定一个合适的建模区域, 该区域的公式为:

$$\begin{aligned} region_max_{dj} &= \min\{\max_{dj} + \\ &\alpha(\max_{dj} - \min_{dj}), dj_max\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} region_min_{dj} &= \max\{\min_{dj} - \\ &\alpha(\max_{dj} - \min_{dj}), dj_min\} \end{aligned} \quad (15)$$

式中: j 为空间的第 j 维; \max_{dj} 和 \min_{dj} 为粒子群中粒子在第 j 维的最大值和最小值; dj_max 和 dj_min 为目标函数在第 j 维上的最大值和最小值; α 通常取[0,1]中的一个数, 使所取区域包含所有粒子并有盈余。

2.3 CPSO-LSM 算法

由于每一轮迭代都需要算出各个粒子的响应值, PSO 算法在解决计算昂贵的复杂工程问题时计算量庞大且会耗费大量时间。为了避免 PSO 算法的这一缺陷, 本文提出 CPSO 算法, 即通过少量迭代使粒子聚集达成共识, 在达到“稳定状态”时停止 PSO 算法, 输出优质粒子群的位置。利用此时粒子群的粒子位置即可确定 Kriging 模型的建模区域。该方法缩小了 Kriging 模型的建模区域, 在同样插值数下能有效提高 Kriging 模型的精度、减少计算量和建模时间。在建模区域内采用具有较好均匀性和广泛性的拉丁超立方设计^[6]进行采样, 并利用采样点建立 Kriging 模型。最后采用基于 Kriging 模型的 EGO 算法即可得到各子区域的最优解, 通过对比各区域最优解大小即可获得全局最优解。该算法流程如图 3 所示, 完整步骤如下:

step 1: 初始化 CPSO 算法的粒子群位置。

step 2: 经过有限次迭代使粒子聚拢, 当满足“稳定状态”条件时停止迭代, 形成一个或多个共识粒子群。

step 3: 利用 2.2 中提及的方法确定 Kriging 模型的建模区域 D_1, D_2, \dots, D_N 。

step 4: 在各区域用拉丁超立方采样获取初始样本点。

step 5: 利用获得的初始点建立 Kriging 代理模型。

step 6: 利用 EGO 算法得到各子区域内的全局最优解。

step 7: 比较得到各区域内的最优解, 得到全局最优解。

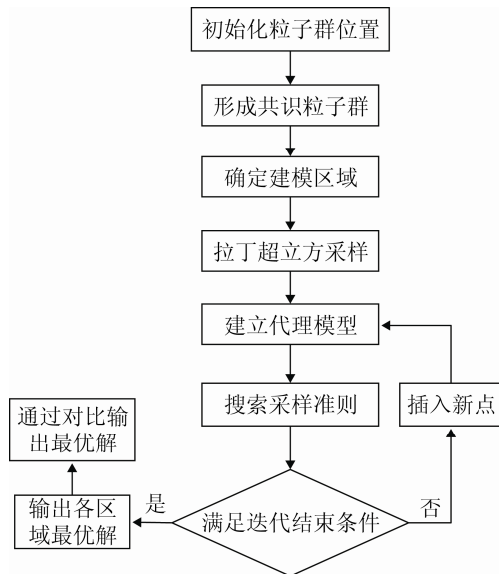


图 3 CPSO-LSM 算法流程图

Fig. 3 CPSO-LSM flowchart

3 数值算例与分析

为了测试 CPSO-LSM 算法的性能, 本文用 DPSO^[7]、MPSO^[8]和 HPSO^[9-10]和 CPSO-LSM 算法进行对比试验, 选取了 4 个标准测试函数, 分别是

Sphere 函数、Rastrigin 函数、Rosenbrock 函数和 Griewank 函数^[11]。其中 Sphere 函数、Rosenbrock 函数是单峰函数, 用于测验算法的收敛速度。Rastrigin 函数、Griewank 函数是多峰函数, 可以检验算法的全局性。表 1 给出了这些函数的理论极值、函数形式和搜索范围。

在实验中, 测试函数的维数均为 30 维, 设定算法的粒子群数 $S=30$, 设定学习因子 $c_1=c_2=2$, 最大迭代次数为 10 000, CPSO-LSM 算法的固定步长为 20, 盈余量常数 $\alpha=0.25$ 。每个测试算例运行 50 次, 将所得结果的平均值和标准差进行对比, 结果见表 2, 表中每个函数的最优解用加粗标出。本次所有实验均在一台 core i5 1.6G CPU/2GB 内存的计算机上进行。从表 2 可以看出 CPSO-LSM 算法在面以上几种测试函数时的均值和标准差都优于其他三种算法, 这表明 CPSO-LSM 算法具有很强的优化能力同时稳定性更强, 体现了 CPSO-LSM 算法的优越性。

表 1 标准测试函数

Tab. 1 Standard test function

测试函数	理论极值	函数形式	搜索范围	维数
Sphere	0	$f(x) = \sum_{i=1}^D x_i^2$	[-100,100]	30
Rastrigin	0	$f(x) = \sum_{i=1}^D (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10)$	[-5.12,5.12]	30
Rosenbrock	0	$f(x) = \sum_{i=1}^{D-1} (100(x_i^2 - x_{i+1})^2 + (x_i - 1)^2)$	[-30,30]	30
Griewank	0	$f(x) = \sum_{i=1}^D \frac{x_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^D \cos(\frac{x_i}{\sqrt{i}}) + 1$	[-600,600]	30

表 2 测试结果对比

Tab. 2 Comparison of test results

测试函数		DPSO	MPSO	HPSO	CPSO-LSM
Sphere	平均值	2.000 0e+002	4.000 0e+002	1.746 4e-005	2.678 6e-063
	标准差	1.414 2e+003	1.979 4e+003	3.139 9e-005	1.879 8e-061
Rastrigin	平均值	5.921 8e+001	5.431 8e+000	2.228 2e-002	1.798 7e-002
	标准差	2.870 7e+001	2.166 8e+001	2.644 4e-002	2.586 8e-002
Rosenbrock	平均值	4.252 6e+002	3.110 5e+004	1.159 5e+002	3.289 6e+001
	标准差	9.816 1e+002	1.101 3e+002	4.272 5e+004	2.945 7e+001
Griewank	平均值	1.829 0e+000	5.431 8e+000	2.228 2e-002	2.212 6e-002
	标准差	1.277 2e+001	2.166 8e+001	2.644 4e-002	2.341 2e-002

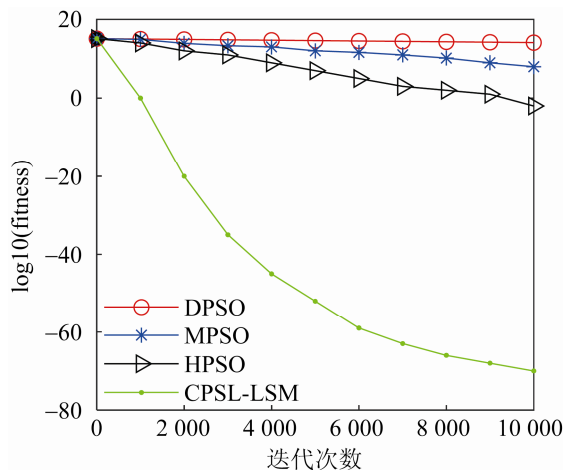


图 4 Sphere 函数收敛情况对比

Fig. 4 Comparison of sphere function convergence

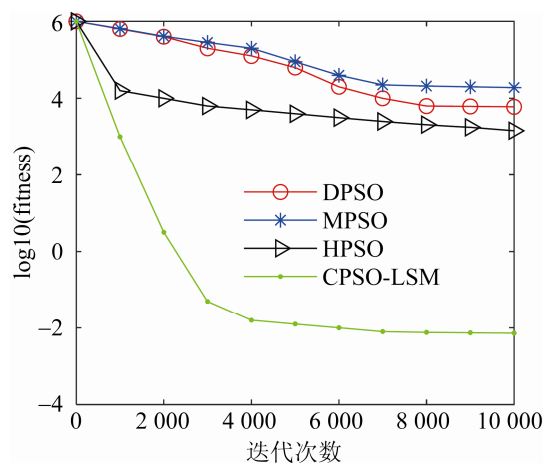


图 5 Rastrigin 函数收敛情况对比

Fig. 5 Comparison of Rastrigin function convergence

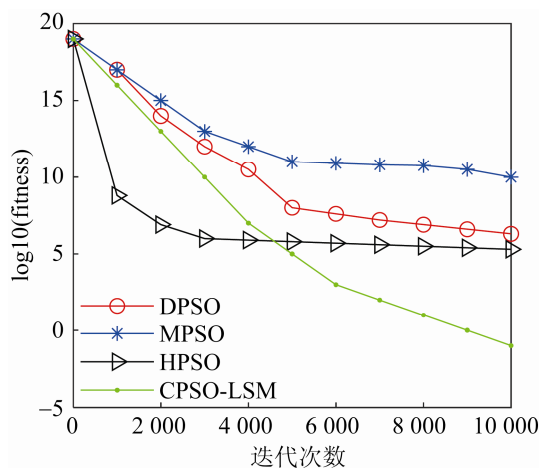


图 6 Rosenbrock 函数收敛情况对比

Fig. 6 Comparison of Rosenbrock function convergence

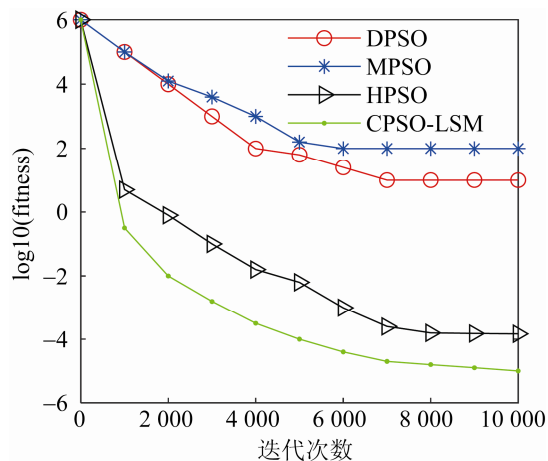


图 7 Griewank 函数收敛情况对比

Fig. 7 Comparison of Griewank function convergence

4 结论

本文针对 PSO 算法和 EGO 算法的特点, 通过改进 PSO 算法提出了一种新的 CPSO-LSM 算法。该算法给粒子群设定了固定的停止周期, 当粒子完成成群到达稳定状态时停止粒子群算法并输出每群粒子周围的优质子区域, 然后建立优质子区域范围内的代理模型, 在此基础上计算各区域最优值并获得高质量最优解甚至全局最优解。该方法的共识机制避免了 PSO 冗长的计算过程, 同时优质子区域提高了代理模型的速度和精度, PSO 优秀的全局搜索特性也保证了子区域内最终解的质量。通过仿真实验结果表明, 本文提出的 CPSO-LSM 算法相

比其它的 PSO 算法有更快的速度和较好的综合性能, 在解决复杂黑箱优化问题时具有一定的实用性和优越性。

参考文献:

- [1] 夏学文, 王博建, 金畅, 等. 一种自适应多种群的 PSO 算法[J]. 系统仿真学报, 2016, 28(12): 2887-2895, 2902. Xia Xuewen, Wang Bojian, Jin Chang, et al. Self-adaptive Multi-swarm Particle Swarm Optimization Algorithm[J]. Journal of System Simulation, 2016, 28(12): 2887-2895, 2902.
- [2] Jones D R, Schonlau M, Welch W J. Efficient global optimization of expensive Black-box function[J]. Journal of Global Optimization (S0925-5001), 1998, 13: 455-492.
- [3] Cressie N. The Origins of Kriging[J]. Mathematical

- Geology (S0882-8121), 1990: 239-252.
- [4] Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization[C]// IEEE International Conference on Neural Networks. Piscataway USA: IEEE Press, 1995: 1942-1948.
- [5] Zhang Y F, Chiang H D. A Novel Consensus-Based Particle Swarm Optimization-Assisted Trust-Tech Methodology for Large-Scale Global Optimization[J]. IEEE Transactions on Cybernetics (S2168-2267), 2017, 47(9): 2717-2729.
- [6] Mckay M D, Beckman R J, Conover W J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code Technometrics[J]. Technometrics (S0040-1706), 1979, 21(2): 239-245.
- [7] Xie X F, Zhang W J, Yang Z L. A dissipative particle swarm optimization[C]// IEEE International Conference on Evolutionary Computation, Honolulu, USA. USA: IEEE, 2002: 1456-1461.
- [8] Zhang W J, Xie X F. DEPSO: Hybrid particle swarm with differential evolution operator[C]// IEEE International Conference on System. Man and Cybernetics, Washington D C, USA. USA: IEEE, 2003: 3816-3821.
- [9] Ratnaweera A, Halgamuge S K. Self-organizing hierarchical particle swarm optimizer with time-varying acceleration coefficients[J]. IEEE Transaction on Evolutionary Computation (S1089-778X), 2004, 8(3): 240-255.
- [10] 黄松, 田娜, 纪志成. 基于自适应变异概率粒子群优化算法的研究[J]. 系统仿真学报, 2016, 28(4): 874-879. Huang Song, Tian Na, Ji Zhicheng. Study of Modified Particle Swarm Optimization Algorithm Based on Adaptive Mutation Probability[J]. Journal of System Simulation, 2016, 28(4): 874-879.
- [11] Vesterstrom J, Thomsen R. A Comparative Study of Differential Evolution, Particle Swarm Optimization, and Evolutionary Algorithms on Numerical Benchmark Problems[C]// 2004 Congress on Evolutionary Computation. USA: IEEE, 2004: 1980-1987.