

6-25-2020

Identification Method for Fractional-Order Systems Based on Haar Wavelet Operational Matrix

Yuanlu Li

1. School of Automation, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China;;2. Jiangsu Collaborative Innovation Center on Atmospheric Environment and Equipment Technology, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China;

Li Teng

2. Jiangsu Collaborative Innovation Center on Atmospheric Environment and Equipment Technology, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China;

Baoying Liu

2. Jiangsu Collaborative Innovation Center on Atmospheric Environment and Equipment Technology, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Identification Method for Fractional-Order Systems Based on Haar Wavelet Operational Matrix

Abstract

Abstract: Studies have shown that the dynamical systems can be more accurately described by the fractional-order systems because its order can be any number. That's why the fractional-order systems are being paid more and more attention. However, how to create a fractional-order system is still in the exploratory stage. Considering the nonlocal features of the fractional differentiation, a method for the fractional-order system identification is proposed by taking the Haar wavelet operational matrix. The proposed method can reduce the dimension of the operational matrix by abandoning the high frequency coefficients of the input and output signals so that the buffer overflow problem of using the operational matrix to identify the systems can be solved.

Keywords

fractional-order system, Haar wavelet, operational matrix, system identification

Recommended Citation

Li Yuanlu, Li Teng, Liu Baoying. Identification Method for Fractional-Order Systems Based on Haar Wavelet Operational Matrix[J]. Journal of System Simulation, 2020, 32(6): 1032-1037.

基于 Haar 小波运算矩阵的分数阶系统辨识方法

李远禄^{1,2}, 李腾², 刘宝莹²

(1. 南京信息工程大学自动化学院, 江苏 南京 210044; 2. 江苏省大气环境与装备技术协同创新中心, 江苏 南京 210044)

摘要: 分数阶微积分因为其阶数可以是任意数, 因此能够更加准确的描述动态系统。虽然分数阶系统受到了越来越多的重视, 可是, 如何建立分数阶系统目前仍处于积极探究阶段。考虑到分数阶微分的非局部性, 利用小波运算矩阵为工具, 给出了一种分数阶系统的辨识方法。其好处在于能够利用小波的多分辨特性对激励信号和响应信号进行数据压缩, 从而降低运算矩阵的维数, 可解决因矩阵维数过大导致内存溢出的问题。

关键词: 分数阶系统; Haar 小波; 运算矩阵; 系统辨识

中图分类号: N945.13 文献标识码: A 文章编号: 1004-731X (2020) 06-1032-06

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.18-0703

Identification Method for Fractional-Order Systems Based on Haar Wavelet Operational Matrix

Li Yuanlu^{1,2}, Li Teng², Liu Baoying²

(1. School of Automation, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China; 2. Jiangsu Collaborative Innovation Center on Atmospheric Environment and Equipment Technology, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China)

Abstract: Studies have shown that the dynamical systems can be more accurately described by the fractional-order systems because its order can be any number. That's why the fractional-order systems are being paid more and more attention. However, how to create a fractional-order system is still in the exploratory stage. Considering the nonlocal features of the fractional differentiation, a method for the fractional-order system identification is proposed by taking the Haar wavelet operational matrix. *The proposed method can reduce the dimension of the operational matrix by abandoning the high frequency coefficients of the input and output signals so that the buffer overflow problem of using the operational matrix to identify the systems can be solved.*

Keywords: fractional-order system; Haar wavelet; operational matrix; system identification

引言

分数阶系统是在分数阶微积分理论的基础上发展过来的。分数阶微积分指微分、积分的阶次可以是任意数, 它扩展了人们所熟知的整数阶微积分

的描述能力。因为分数阶微积分以加权的形式考虑了函数的整体信息, 可以更准确的描述实际系统的动态响应^[1]。

然而, 分数阶微积分的物理意义仍不是十分清楚, 因此, 采用机理法建立分数阶模型有难度, 结果实验建模法就成了重要手段^[2]。通常, 根据系统的输入、输出响应数据, 采用系统辨识的方法来建立分数阶系统。目前, 主要有频域辨识方法^[3-8]和时域方法^[9-11]2 大类。



收稿日期: 2018-10-22 修回日期: 2019-03-03;
基金项目: 国家自然科学基金(61671010), 江苏省自然科学基金(BK20161535), 江苏省高校“青蓝工程”(B2018Q03);
作者简介: 李远禄(1973-), 男, 湖南永兴, 博士, 教授, 研究方向为分数阶系统、分数阶信号处理。

<http://www.china-simulation.com>

• 1032 •

由于分数阶系统中微分的阶次是分数, 不能直接应用整数阶方法对分数阶系统进行辨识, 因此采用有理函数的近似化、离散化是研究分数阶系统的主要方法之一。其中, 利用正交函数构造的运算矩阵是分析动态系统的一种重要方法, 如 Block pulse^[6, 12], Haar 小波^[3, 13-15], Chebyshev^[16]以及 hat 运算矩阵^[17]等, 这些运算矩阵已成功应用于系统分析、辨识、控制等方面。

考虑到分数阶微分的非局部性, 本文利用小波运算矩阵为工具, 给出了一种分数阶系统的辨识方法。其好处在于能够利用小波的多分辨特性对激励信号和响应信号进行数据压缩, 从而降低运算矩阵的维数, 解决了因矩阵维数过大导致内存溢出的问题。

1 分数阶积分基础

分数阶微积分是整数阶微积分的推广, 其阶数可以为任意数。在本文中主要用到 Riemann-Liouville 分数阶积分和 Caputo 分数阶微分的定义。区间 $[0, t]$ 上的 α 阶 Riemann-Liouville 积分定义为:

$$I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

式中: α 为积分阶数; $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数。区间 $[0, t]$ 上的 α 阶 Caputo 微分定义为:

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (2)$$

式中: n 为大于 1 的整数, $n-1 < \alpha < n$ 。Caputo 微分定义可直接使用系统的常规初始状态:

$$(J^{\alpha} D^{\alpha} f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0_+) \frac{t^k}{k!} \quad (3)$$

式中: n 为整数, $n-1 < \alpha < n$ 。

2 Haar 小波的分数阶微积分运算矩阵

2.1 Haar 小波

Hilbert 空间 $L_2[0, 1]$ 中的 Haar 小波基 $\{h_n(t)\}$ 定义为

$$h_n = h_1(2^j t - k) \quad (4)$$

$$\text{式中: } h_0(t) = 1, 0 \leq t < 1, h_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.5 \\ -1, & 0.5 \leq t < 1 \end{cases}, \\ n = 2^j + k, j \geq 0, 0 \leq k \leq 2^j, n, j, k \in \mathbb{Z}.$$

用 Haar 小波展开信号 $f(t) \in L^2[0, 1]$, 即有

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i h_i(t) \quad (5)$$

式中: 小波系数 $c_i, i=0, 1, 2, \dots$, 为

$$c_i = 2^j \int_0^1 f(t) h_i(t) dt \quad (6)$$

若 $f(t)$ 是分段函数或能够用分段函数近似, 那么式(5)可以用有限项来近似, 即

$$f(t) \approx \sum_{i=0}^{N-1} c_i h_i(t) = \mathbf{C}_N^T \mathbf{H}_N(t) = \hat{f}(t) \quad (7)$$

式中: $N=2^j$, 上标 T 表示转置; $\hat{f}(t)$ 为有限项截断, 其中 \mathbf{C}_N 和 $\mathbf{H}_N(t)$ 分别定义为

$$\mathbf{C}_N \triangleq [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T \quad (8)$$

$$\mathbf{H}_N(t) \triangleq [h_0(t), h_1(t), \dots, h_{N-1}(t)]^T \quad (9)$$

取配置点为

$$t_i = (2i-1)/2N, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (10)$$

则由 Haar 小波基所构成的 N 阶方阵 $\Phi_{N \times N}$ 为

$$\Phi_{N \times N} \triangleq [H_N(t_1), H_N(t_2), \dots, H_N(t_N)] \quad (11)$$

2.2 Haar 小波基的分数阶积分运算矩阵

根据文献[10], 块脉冲基函数的分数阶积分运算矩阵 \mathbf{F}^{α} 为

$$\mathbf{F}^{\alpha} = \left(\frac{1}{N} \right)^{\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{N-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_{N-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \xi_{N-3} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中: $\xi_k = (k+1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1} \quad (k=1, 2, \dots, N-1)$ 。

设小波基函数的分数阶积分仍能由小波基展开, 即

$$(I^{\alpha} \mathbf{H}_N)(t) \approx \mathbf{P}_{N \times N}^{\alpha} \mathbf{H}_N(t) \quad (13)$$

式中: N 阶方阵 $\mathbf{P}_{N \times N}^{\alpha}$, 即为小波基的 α 阶积分矩阵, 根据文献[11], 可知

$$P_{N \times N}^\alpha = \Phi_{N \times N} F^\alpha \Phi_{N \times N}^{-1} \quad (14)$$

矩阵 $P_{N \times N}^\alpha$ 称为 Haar 函数的分数阶积分运算矩阵。

3 分数阶线性系统辨识

考虑一般分数阶系统:

$$\sum_{j=1}^n a_j D^{\beta_j} y(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad (15)$$

满足初始状态: $y^{(k)}(0) = c_k$, $k = 0, 1, \dots, [\beta_1] - 1$, 式中, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$, D^α 表示 Caputo 分数阶导数, $\beta_j, a_j, j = 0, 1, \dots, n$ 是待辨识的参数。

通过变换可以将非零初始状态转化为零初始状态系统, 不失一般性, 这里只讨论零初始状态系统的系统辨识方法。

设 $f(t)$ 和 $D^{\beta_1} y(t)$ 能够用 Haar 小波展开, 即

$$f(t) \approx F^T H_N(t) \quad (16)$$

式中: $F = [f_0, f_1, \dots, f_N]^T$ 是已知系数。

设

$$D^{\beta_1} y(t) \approx Y^T H_N(t) \quad (17)$$

式中: $Y = [y_0, y_1, \dots, y_N]^T$ 是已知系数。由分数阶微

积分的性质, 有

$$D^{\beta_j} y(t) = I^{\beta_1 - \beta_j} [Y^T H_N(t)] = Y^T P_{N \times N}^{\beta_1 - \beta_j} H_N(t) \quad (18)$$

代式(16)~(18)到式(15), 并约掉 $H_N(t)$, 得

$$\sum_{j=1}^n a_j Y^T P_{N \times N}^{\beta_1 - \beta_j} + a_0 Y^T P_{N \times N}^{\beta_1} = F^T \quad (19)$$

或者

$$\sum_{j=1}^n a_j \left(P_{N \times N}^{\beta_1 - \beta_j} \right)^T Y + a_0 \left(P_{N \times N}^{\beta_1} \right)^T Y = F \quad (20)$$

在方程(20)中, 向量 Y 和 F 已知, 若将阶数 $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$ 和系数 $a_j, j = 0, 1, \dots, n$ 同时辨识, 这将导致一个非线性优化问题。若将阶数 $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$ 先固定, 则可变为如下线性优化问题:

$$AX = F \quad (21)$$

式中:

$$A = \left(\left(P_{N \times N}^{\beta_1} \right)^T Y \quad Y \quad \left(P_{N \times N}^{\beta_1 - \beta_2} \right)^T Y \quad \dots \quad \left(P_{N \times N}^{\beta_1 - \beta_n} \right)^T Y \right),$$

$$X = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^T。$$

为此, 本文先固定一组 $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$, 通常为整数阶系统的阶数, 然后, 利用最小二乘方法得到 $a_j, j = 0, 1, \dots, n$, 再在整数阶的基础上, 变动为分数阶, 通常可设定范围为 β_j 的 ± 0.5 , 然后用一个给定的阶数步长变动阶数, 重新辨识, 最后根据 $\|AX - F\|_2$ 最小来得到相应的阶数和系数 $j = 0, 1, \dots, n$ 。

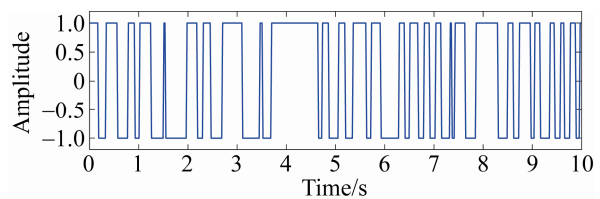
4 方法应用

首先, 用一个已知的分数阶系统来验证本文的方法, 然后对一个实际的系统进行辨识。

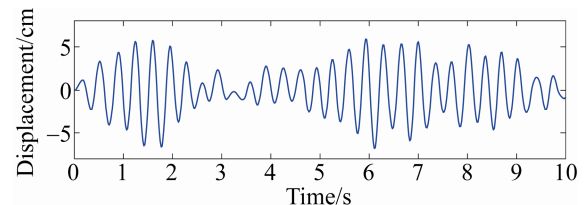
例 1 考虑分数阶系统:

$$G(s) = \frac{1}{0.005s^2 + 0.0024s^{1.1} + 1.625} \quad (22)$$

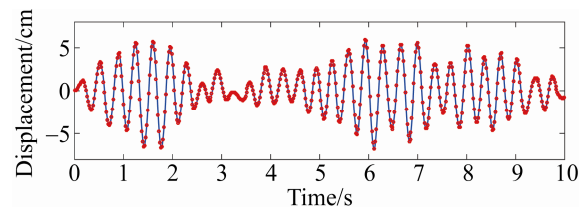
用图 1(a) 中信号作激励, 相应的响应为图 1(b)。



(a) 随机激励信号



(b) 系统响应



(c) 辨识所得系统的响应与实际系统的响应

图 1 激励信号、响应信号及辨识所得系统的响应
Fig. 1 Excitation, response, and response of identified system

选取待辨识的分数阶系统模型 $G_f(s)$ 为:

$$G_{fr}(s) = \frac{1}{a_0 s^\alpha + a_1 s^\beta + a_2} \quad (23)$$

规定 $\alpha > \beta$, 设定 β 的范围为 [0.5, 1.5], α 的范围为 [1.5, 2.5], 阶数步进长度为 0.01, 经辨识得

$$G(s) = \frac{1}{0.0050s^{2.0} + 0.0024s^{1.1} + 1.6250} \quad (24)$$

从辨识结果图 1 (c) 可以看到, 采用本文方法辨识出来的结果和原系统一致。

例 2 图 2 为一弹性扭转系统^[17], 第 1 块和第 2 块之间通过具有一定柔性的弹簧连接(弹簧的柔性和弹性要足以带动轴和质量体的运动)。第 1 块质量体的左端直接与直流电机(经过减速箱)连接, 电机转动则可以驱动第 2 块质量体转动, 在开环下给定输入信号为 75% PWM 信号, 通过计算得输入信号数值为 24 575, 通过采集第 2 个质量块的角速度信号, 单位为线/s, 构成输入、输出信号如图 3 所示。采样频率为 1 000 Hz, 采样时间 5 s。若直接用运算辨识, 矩阵的维数达到 2^{13} , 当用 Matlab 进行辨识时, 对于普通个人计算机导致缓存溢出而报错。倘若对激励和响应信号进行 3 层小波分解取其低频系数作为式(20)中的 Y 和 F , 则小波运算矩阵降为 2^{10} , 从而可以辨识了。

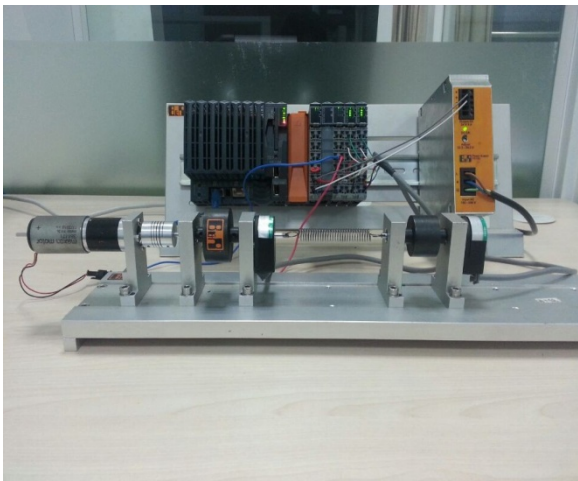
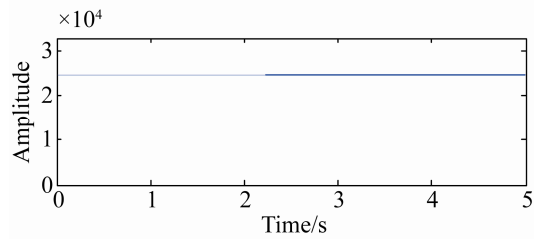
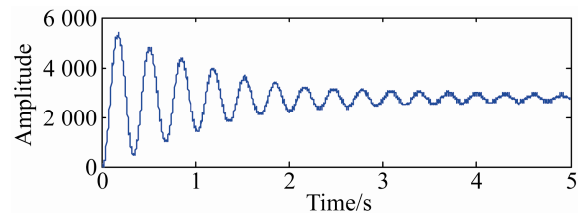


图 2 多质量弹性扭转系统
Fig. 2 Multi-mass elastic torsion system



(a) 输入信号



(b) 输出信号

图 3 系统的输入和输出信号

Fig. 3 System input and output signals

选取待辨识的分数阶系统模型 $G_{fr}(s)$ 为:

$$G_{fr}(s) = \frac{1}{a_0 s^\alpha + a_1 s^\beta + a_2} \quad (25)$$

规定 $\alpha > \beta$, 设定 β 的范围为 [0.5, 1.5], α 的范围为 [1.5, 2.5], 阶数步进长度为 0.01, 经辨识得

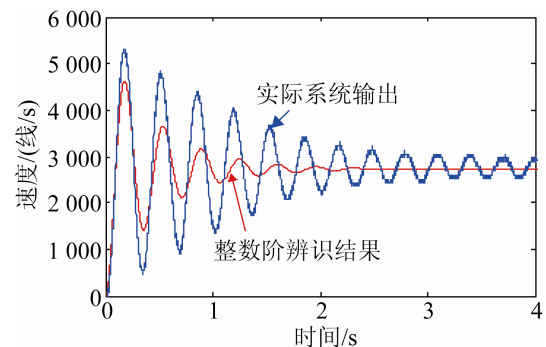
$$G_{fr} = \frac{1}{0.0189s^{2.1} + 0.1243s^{0.92} + 8.8791} \quad (26)$$

实际系统的输出与辨识所得分数阶系统的输出如图 4(b)所示。

若设定 $\alpha=2$, $\beta=1$, 则待辨识的系统为一整数阶系统, 经辨识得

$$G_z = \frac{1}{0.0250s^2 + 0.1217s + 8.8739} \quad (27)$$

从图 4 可看出, 分数阶系统辨识结果要优于整数阶系统辨识结果。



(a) 整数阶系统

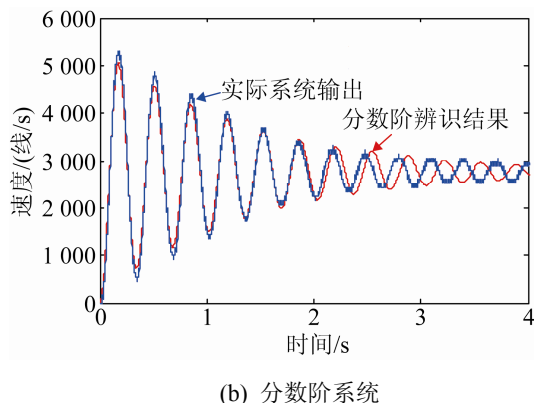


图4 实际系统的输出与辨识所得系统的输出
Fig. 4 Output of actual system and identified system

5 结论

利用 Haar 小波作为工具,给出了一种基于 Haar 小波运算矩阵的分数阶系统辨识方法。通过先固定微分阶数,将分数阶系统辨识问题转化为常规系统问题,这样可以直接利用最小二乘方法得到系统系数,然后在一定范围内变动微分阶数寻找最优参数,从而避免了分数阶系统辨识中阶数和系数同时优化的非线性问题;此外,利用小波分析的多分辨特性,通过对激励和响应信号的压缩可以降低运算矩阵的维数,可克服因运算矩阵维数过大导致的内存溢出问题。

参考文献:

- [1] Poinot T, Trigeassou J C. Identification of Fractional Systems Using an Output-Error Technique[J]. *Nonlinear Dynamics*(S0924-090X), 2004, 38(1/2): 133-154.
- [2] Malti R, Victor S, Oustaloup A. Advances in System Identification Using Fractional Models [J]. *Journal of Computational & Nonlinear Dynamics*(S1555-1423), 2008, 3(2): 764-786.
- [3] Li Y, Meng X, Zheng B, et al. Parameter identification of fractional order linear system based on Haar wavelet operational matrix[J]. *ISA Transactions*(S0019-0578), 2015, 59: 79.
- [4] 廖增, 彭程, 王永, 等. 分数阶系统时域子空间辨识[J]. *信息与控制*, 2011, 40(5): 658-663.
Liao Zeng, Peng Cheng, Wang Yong, et al. Time Domain Subspace Method for Fractional Order System Identification[J]. *Information and Control*, 2011, 40(5): 658-663.
- [5] 唐英干, 王伟伟. 基于 hat 函数运算矩阵的分数阶系统辨识[J]. *燕山大学学报*, 2015, 39(4): 322-328.
Tang Yinggan, Wang Weiwei. Parameter identification of fractional order systems using hat functions[J]. *Journal of Yanshan University*, 2015, 39(4): 322-328.
- [6] 王振滨, 曹广益, 朱新坚. 基于状态空间模型分解的分数阶系统辨识算法[J]. *系统工程与电子技术*, 2004, 26(12): 1848-1851.
Wang Zhenbin, Cao Guangyi, Zhu Xinjian. Identification algorithm for fractional order systems based on state space decomposition[J]. *Systems Engineering and Electronics*. 2004, 26(12): 1848-1851.
- [7] Hartley T T, Lorenzo C F. Fractional-order system identification based on continuous order-distributions[J]. *Signal Processing*(S0165-1684), 2003, 83(11): 2287-2300.
- [8] Tang Y, Liu H, Wang W, et al. Parameter identification of fractional order systems using block pulse functions[J]. *Signal Processing*(S0165-1684), 2015, 107: 272-281.
- [9] 李远禄, 于盛林. 非整数阶系统的频域辨识法[J]. *自动化学报*, 2007, 33(8): 882-884.
Li Yuanlu, Yu Shenglin. Identification of Non-integer Order Systems in frequency Domain[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(8): 882-884.
- [10] 李旺, 张国庆, 王永. 分数阶系统频域辨识算法[J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(8): 1118-1122.
Li Wang, Zhang Guoqing, Wang Yong. Frequency domain identification of fractional order systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(8): 1118-1122.
- [11] 钟建朋, 李黎川. 实心磁路磁轴承的分数阶系统辨识[J]. *中国电机工程学报*, 2013, 33(18): 170-177.
Zhong Jianpeng, Li Lichuan. Fractional-order System Identification of a Solid-core Active Magnetic Bearing[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2013, 33(18): 170-177.
- [12] Li Y, Sun N. Numerical solution of fractional differential equations using the generalized block pulse operational matrix[J]. *Computers & Mathematics with Applications* (S0898-1221), 2011, 62(3): 1046-1054.
- [13] Li Y, Zhao W. Haar wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations[J]. *Applied Mathematics & Computation*(S0096-3003), 2010, 216(8): 2276-2285.
- [14] 高桂革, 顾幸生, 曾宪文. Haar 小波运算矩阵与性质在分布参数系统控制中的应用[J]. *华东理工大学学报*, 2004, 8(4): 458-461.
Gao Guige, Gu Xingsheng, Zeng Xianwen. Operational Matrices of Haar Wavelets and Their Applications for

- Distributed Parameter Systems[J]. Journal of East China University of Science and Technology, 2004, 8(4): 458-461.
- [15] 顾幸生, 高桂革. 基于 Haar 小波微分运算矩阵的分布参数系统辨识[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2008, 48(52): 1821-1823.
Gu Xingsheng, Gao Guige. Identification based on the differential operational matrix of the Haar wavelets for distributed Parameter systems[J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2008, 48(52): 1821-1823.
- [16] Yuanlu L I. Solving a nonlinear fractional differential equation using Chebyshev wavelets[J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation(S1007-5704), 2010, 15(9): 2284-2292.
- [17] 张永宏, 王琦, 李远禄, 等. 多质量弹性扭转系统的模型辨识[J]. 信息与控制, 2015, 44(1): 62-66.
Zhang Yonghong, Wang Qi, Li Yuanlu, et al. The Model Identification of the Multi- mass Elastic Torsion System[J]. Information and Control, 2015, 44(1): 62-66.