

8-12-2020

## Modeling and Simulation on Dynamics of Epidemic Disease Based on Social Division of Labor

haibin Li

*1. Engineering Training Center of Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China; ;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

## Modeling and Simulation on Dynamics of Epidemic Disease Based on Social Division of Labor

### Abstract

**Abstract:** Prediction is an essential part of the epidemic prevention and control system, and it is of great significance to accurately establish a dynamic model of epidemiological evolution. *The existing epidemiological modeling methods rarely consider the social division of labor of different groups. The entire group is divided into three subgroups, the ordinary residents, the social service personnel, and the front-line medical workers. Based on the heterogeneous uniform mixing theory, the subgroup adjacency matrix is used to represent the contact relationship between individuals, and a time-lapse dynamic model of epidemic spread and evolution is established.* The simulation results show that this method is in line with the actual situation and can provide an effective method to the modeling and simulation of the epidemiological dynamics. The method carries out the dynamic modeling and simulation analysis of the epidemic situation in Wuhan.

### Keywords

epidemic disease, modeling, social division of labor, adjacency matrix, COVID-19(Corona Virus Disease-2019)

### Recommended Citation

Li haibin. Modeling and Simulation on Dynamics of Epidemic Disease Based on Social Division of Labor[J]. Journal of System Simulation, 2020, 32(5): 745-758.

# 基于社会分工的流行病动力学建模与仿真研究

李海滨

(1. 内蒙古工业大学工程训练教学部, 内蒙古 呼和浩特 010051;  
2. 内蒙古自治区生命数据统计分析理论与神经网络建模重点实验室, 内蒙古工业大学理学院, 内蒙古 呼和浩特 010051)

**摘要:** 疫情预测是流行病防控体系中的重要一环, 准确建立流行病演化动力学模型具有十分重要的意义。针对现有流行病建模方法中鲜有考虑群体中的社会分工问题, 拟将整个群体划分为普通居民、社会服务人员和一线医务工作人员等三个子群, 基于异质均匀混合理论, 利用子群邻接矩阵表示个体间的接触关系, 建立了流行病传播与演化的延时动力学模型。仿真结果表明, 本文方法更符合实际情况, 可为流行病动力学建模与仿真提供一种有效手段, 对武汉疫情做了动力学建模与仿真分析。

**关键词:** 流行病; 建模; 社会分工; 邻接矩阵; 新型冠状病毒-2019

中图分类号: TP391.9

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2020) 05-0745-14

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.20-0128

## Modeling and Simulation on Dynamics of Epidemic Disease Based on Social Division of Labor

Li haibin

(1. Engineering Training Center of Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China; 2. Inner Mongolia Key Laboratory of Statistical Analysis Theory for Life Data and Neural Network Modeling, College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China)

**Abstract:** Prediction is an essential part of the epidemic prevention and control system, and it is of great significance to accurately establish a dynamic model of epidemiological evolution. *The existing epidemiological modeling methods rarely consider the social division of labor of different groups. The entire group is divided into three subgroups, the ordinary residents, the social service personnel, and the front-line medical workers. Based on the heterogeneous uniform mixing theory, the subgroup adjacency matrix is used to represent the contact relationship between individuals, and a time-lapse dynamic model of epidemic spread and evolution is established.* The simulation results show that this method is in line with the actual situation and can provide an effective method to the modeling and simulation of the epidemiological dynamics. The method carries out the dynamic modeling and simulation analysis of the epidemic situation in Wuhan.

**Keywords:** epidemic disease; modeling; social division of labor; adjacency matrix; COVID-19(Corona Virus Disease-2019)

## 引言

流行病威胁着人类社会繁荣与发展。探寻流行



收稿日期: 2020-03-19

修回日期: 2020-04-30;

基金项目: 国家自然科学基金(11962021);

作者简介: 李海滨(1973-), 男, 内蒙古呼和浩特, 蒙古族, 博士, 教授, 博导, 研究方向为结构不确定性分析与量化、神经网络计算、六维力传感器设计等。

病发病机理、演化机制、控制策略是此研究领域中的一个重要课题。目前, 关于流行病的数学建模与动力学仿真, 相关人员做了大量研究工作, 取得了诸多成果, 为疫情预测与控制提供了丰富的理论支持。1926年由 Kermack 和 Mckendrick 建立了著名的仓室模型, 开启了长达百年有余的流行病建模研究历史。该模型基于均匀混合理论, 将整群中的个

<http://www.china-simulation.com>

• 745 •

体分为不同状态,在整体中均匀混合建立了以各状态占比为自变量的动力学模型。根据状态类型的不同,仓室模型可分为 SI, SIR, SIS, SIRS, SEIR, SEIRS, SEIAR 等多种类型<sup>[1-3]</sup>,采用哪种模型需要根据病程中是否存在无症状患者、潜伏期以及 2 次感染等情况而定。上述模型基于微分方程组的动力学建模,因此人们可以利用现代控制理论方法对模型的稳定性、疫情爆发临界点、疫情峰值、地方病产生条件等进行定量分析。但是,基于均匀混合理论的动力学模型不能反映个体连接关系存在非均匀和相关性的情况。为此,文献[4]提出了异质均匀网络的建模方法,该方法按照个体连接权重的不同,将整体分为具有不同度的多个子群,假定子群内部均匀混合,具有相同度的节点在结构特征和动力学特性上是等价的。异质均匀网络细化了仓室模型,体现了网络结构在子群之间的异质性和子群内部的均匀性。但异质均匀网络仅用度和度分布 2 个参数来表示网络的拓扑结构显然不够精确。异质均匀网络方法一般适用于具有无穷大拓扑维数的网络,但是它忽略了 2 个重要的因素:一是该方法没有完全描述网络的接触结构特性;二是没有考虑节点间的相关性。针对第 1 个问题,人们利用邻接矩阵来描述节点之间的接触关系,提出了淬灭平均场方法,可以准确地描述网络拓扑结构。针对第 2 个问题,文献[5-6]提出了子对逼近方法,通过捕获节点间的相关性来进行更为精确的建模。这种方法的缺点是计算量大,影响了其应用<sup>[6]</sup>。以个体作为节点进行处理势必造成庞大的网络规模和耗时的计算量。

流行病学动力学建模与仿真在疫情防控中发挥着重要作用,国内外学者针对 2019 年 12 月以来的新型冠状病毒 COVID-19 开展了大量研究工作。文献[7]聚焦新型冠状病毒热点问题,简要介绍了病原学、流行病学、传播动力学、治疗及防控等多个相关领域的研究进展情况以及开展疫情防控的具有措施。文献[8]发展了一种离散变量概率方法对湖北省疫情发展进行了模拟和仿真预

测,文中利用 Monte Carlo 法抽样模型中的随机参数,以计算结果均值作为输出,取得了良好的预测效果。文献[9]建立了联合考虑潜伏期和追踪隔离干预措施的 COVID-19 的 SEIR 流行病传播动力学模型,仿真结果表明在 2 周短期内预测效果较好,但模型未考虑潜伏期的时滞效应。文献[10]利用 SEIR 模型通过仿真模拟和数据拟合,预测了武汉疫情的峰值病例数,仿真结果显示模型具有较好的拟合优度。文献[11]将一个随机传播模型与武汉病例的数据结合起来,估计了在 2020 年 1 月和 2020 年 2 月期间疫情传播变化情况,并基于上述数据,估计了疫情在其他地区爆发的概率。文献[12]指出,COVID-19 病毒感染在空间上存在显著的相关性,而空间关联性是造成病毒在中国大陆早期传播的关键因素,空间分析有助于了解传染病在中国大陆的传播。文献[13]通过数学建模与模拟研究,给出了 COVID-19 病毒传播对韩国学校开学的延迟效应。文献[14]针对如何应对复工复产这类尚未发生或正在发生的事件,通过构建人口地理模型、社会关系网络、动力学模型来演化疫情传播的过程,为复工复产提出了有益借鉴。文献[15]经过临床实验研究表明,重型和危重型患者的转归期为 12.9 天左右。文献[16]给出了新型冠状病毒患者的潜伏期平均为 7 天左右的新闻报道。文献[17]介绍了某医院 42 名医护人员与 14 名患者接触而被居家隔离或医学观察,最终有 3 名医护人员被确诊感染的事例。上述工作为获得动力学模型参数提供了有力的数据支撑。随着疫情发展以及人们对病毒传播规律认识的不断深入,必将会涌现出更多更加切合实际的流行病学动力学建模方法为战胜疫情做出更大的贡献。

针对流行病学动力学建模存在的问题,本文按社会分工将整个群体划分为不同的子群,以子群为节点建立相关性描述,再建立其动力学模型,以实现兼顾个体相关性和计算量的流行病学动力学建模方法。

## 1 基于社会分工的流行病数学模型

为了便于读者理解, 本文结合相关流行病建模理论, 按方法的形成过程做详细说明, 进而完成对本文方法的介绍。

### 1.1 状态与模型选择

流行病在传播过程中, 个体的状态可分为易感态  $S$ 、潜伏态  $E$ 、有症状的患病态  $I$ 、无症状的患病态  $A$ 、治愈态  $R$  和死亡态  $D$  等几种基本状态。其中, 除了易感态和有症状的患病态是必选之外, 其它状态要根据实际需要加以选择。如是否考虑潜伏期的影响, 是否存在无症状患者, 是否考虑二次感染, 是否需要计算治愈率和病死率等诸多因素。由于本文拟描述的流行病要考虑潜伏期的传染性, 不考虑二次感染和无症状患者, 需要利用治愈率和病死率的数据指标进行结果对比, 所以本文的动力学模型确定为 SEIRD 模型。如果暂不考虑人群中的个体差异, 则可由均匀混合理论建立如式(1)所示的 SEIRD 仓室模型动力学方程。

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta_E S(t)E(t) - \beta_I S(t)I(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta_E S(t)E(t) + \beta_I S(t)I(t) - \gamma E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \gamma E(t) - \mu_r I(t) - \mu_d I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \mu_r I(t) \\ \frac{dD(t)}{dt} = \mu_d I(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$ ,  $D(t)$  分别为在  $t$  时刻仓室中处于易感态、潜伏态、患病态、治愈态、死亡态的个体占比;  $\beta_E$ ,  $\beta_I$  分别为易感态个体与潜伏态个体、患病态个体在一次接触感染的概率, 当潜伏态个体不具有传染性时  $\beta_E=0$ 。  $\gamma$  为由潜伏态向患病态的转化概率。  $\mu_r$ ,  $\mu_d$  分别为由患病态向治愈态和死亡态的转化概率, 也称为治愈率和病死率。

### 1.2 异质均匀混合模型

当考虑个体差异时, 根据异质均匀混合理论,

认为度相同的个体具有相同的动力学方程, 则可建立如式(2)所示的流行病动力学方程。

$$\begin{cases} \frac{dS_k(t)}{dt} = -\beta_E k S_k(t) \varphi_E(t) - \beta_I k S_k(t) \varphi_I(t) \\ \frac{dE_k(t)}{dt} = \beta_E k S_k(t) \varphi_E(t) + \beta_I k S_k(t) \varphi_I(t) - \gamma E_k(t) \\ \frac{dI_k(t)}{dt} = \gamma E_k(t) - \mu_r I_k(t) - \mu_d I_k(t) \\ \frac{dR_k(t)}{dt} = \mu_r I_k(t) \\ \frac{dD_k(t)}{dt} = \mu_d I_k(t) \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $S_k(t)$ ,  $E_k(t)$ ,  $I_k(t)$ ,  $R_k(t)$ ,  $D_k(t)$  分别为度为  $k$  的子群中易感态、潜伏态、患病态、治愈态和死亡态个体占比。  $\beta_E$ ,  $\beta_I$ ,  $\gamma$ ,  $\mu_r$ ,  $\mu_d$  的意义同上。  $\varphi_E(t)$ ,  $\varphi_I(t)$  分别为度为  $k$  的子群中易感态个体的任一条连边接触潜伏态、患病态个体的概率, 其算式可写成式(3)~(4)。

$$\varphi_E(t) = \frac{\sum_{k=1}^N kp(k)E_k(t)}{\sum_{k=1}^N kp(k)} \quad (3)$$

$$\varphi_I(t) = \frac{\sum_{k=1}^N kp(k)I_k(t)}{\sum_{k=1}^N kp(k)} \quad (4)$$

式中:  $p(k)$  为度  $k$  的分布。

### 1.3 考虑社会分工的异质非均匀混合模型

在疫情爆发期间, 社会中个体间的差异主要来源于个体的行为差异, 而行为取决于个体的职业或是社会分工。在尚未复工复产、人群处于社区管控状态下, 将人群按社会分工划分为普通居民、社会管理与服务人员、一线医务人员等 3 个子群体。如普通居民一天只要出去买一趟菜, 途中只可能接触少量几个人, 而社区管理人员一天接触大量出入社区的居民。显然可以将普通居民和社区管理人员划入不同的 2 个子群中, 且每个子群具有自己的度。式(2)给出了异质均匀混合模型的动力学方程, 但是在实际情况下, 因社会分工均匀混合假设不再成立, 因此不能直接使用式(2)对已经划分子群的个体进行建模。例如, 处于一线的医务人员只接触患病态个体而不接触易感态个体; 社会管理人员只能接触

易感态、潜伏态和治愈态个体但不接触患病态个体。这些特定的接触关系反映了网络结构的特征属性，只有正确表述这些接触关系才能准确给出符合实际情况的动力学模型。淬火平均场理论利用邻接矩阵给出了网络节点的连接关系。受此启发，本文同样利用邻接矩阵来描述子群个体间的接触关系。

为了便于对方法的描述，将社会分工相同的群体作为一个子群，则整个群体可划分为若干子群。记第  $i$  子群的度为  $k_i$ 、度分布为  $p(k_i)$  ( $i=1,2,\dots,N$ )。建立邻接矩阵  $C$ ，其元素  $C_{ij}^x$  表示子群  $i$  与子群  $j$  中处于  $X$  ( $X \in \{S, E, I, R, D\}$ ) 态人群的接触状态， $C_{ij}^x=0$  表示不接触、 $C_{ij}^x=1$  表示接触。

在按社会分工划分子群和建立邻接矩阵的基础上，可以建立式(5)所示流行病动力学方程。

$$\begin{cases} \frac{dS_i(t)}{dt} = -\beta_E^i k_i S_i(t) \phi_E^i(t) - \beta_I^i k_i S_i(t) \phi_I^i(t) \\ \frac{dE_i(t)}{dt} = \beta_E^i k_i S_i(t) \phi_E^i(t) + \beta_I^i k_i S_i(t) \phi_I^i(t) - \gamma E_i(t) \\ \frac{dI_i(t)}{dt} = \gamma E_i(t) - \mu_r I_i(t) - \mu_d I_i(t) \\ \frac{dR_i(t)}{dt} = \mu_r I_i(t) \\ \frac{dD_i(t)}{dt} = \mu_d I_i(t) \end{cases} \quad (5)$$

与式(2)相比，式(5)在 3 方面做了修改。一是各子群的度  $k$  并非  $1 \sim N$  的自然数序列，而是对应第  $i$  个子群的度为  $k_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 的数列；二是一次接触感染率加注了上标，以区别不同子群上的取值；三是由于各子群的分工不同，计算个体单边接触概率式(3)~(4)有所变化，用考虑社会分工接触关系来代替均匀混合接触关系以实现计算单边接触概率。从而将式(3)~(4)改写为式(6)~(7)。

$$\begin{aligned} \phi_E^i &= \frac{\sum_{j=1}^N k_j p(k_j) C_{ij}^E E_j(t)}{\sum_{j=1}^N k_j p(k_j) (C_{ij}^S S_j(t) + C_{ij}^E E_j(t) + C_{ij}^I I_j(t) + C_{ij}^R R_j(t) + C_{ij}^D D_j(t))} \\ & \quad (6) \end{aligned}$$

式中：分子是  $i$  子群个体所接触到潜伏态个体的概率之和，分母是  $i$  子群个体所接触到所有态个体的概率之和。

$$\begin{aligned} \phi_I^i(t) &= \frac{\sum_{j=1}^N k_j p(k_j) C_{ij}^I I_j(t)}{\sum_{j=1}^N k_j p(k_j) (C_{ij}^S S_j(t) + C_{ij}^E E_j(t) + C_{ij}^I I_j(t) + C_{ij}^R R_j(t) + C_{ij}^D D_j(t))} \\ & \quad (7) \end{aligned}$$

式中：分子是  $i$  子群个体所接触到患病态个体的概率之和，分母是  $i$  子群个体所接触到所有态个体的概率之和。

式(5)~(7)得到了考虑社会分工的异质混合理论流行病动力学方程。由于个体接触不再受均匀混合假设的约束，本文属于一种异质非均匀混合理论流行病建模方法。

## 1.4 考虑时延因素的模型

为了能更真实反映潜伏、治疗中的时延特性，本文拟通过引入具有不同时延常数的时延函数来分别表示从潜伏态到患病态、从患病态到治愈态、从患病态到死亡态的时间间隔。于是在式(5)的基础上将流行病方程改写为式(8)的形式。

$$\begin{cases} \frac{dS_i(t)}{dt} = -\beta_E^i k_i S_i(t) \phi_E^i(t) - \beta_I^i k_i S_i(t) \phi_I^i(t) \\ \frac{dE_i(t)}{dt} = \beta_E^i k_i S_i(t) \phi_E^i(t) + \beta_I^i k_i S_i(t) \phi_I^i(t) - \gamma E_i(t - \tau_E) \\ \frac{dI_i(t)}{dt} = \gamma E_i(t - \tau_E) - \mu_r I_i(t - \tau_E - \tau_R) - \mu_d I_i(t - \tau_E - \tau_D) \\ \frac{dR_i(t)}{dt} = \mu_r I_i(t - \tau_E - \tau_R) \\ \frac{dD_i(t)}{dt} = \mu_d I_i(t - \tau_E - \tau_D) \end{cases} \quad (8)$$

式中： $\tau_E$ 、 $\tau_R$ 、 $\tau_D$  分别为病毒潜伏期、患病治愈、发病治疗死亡的时间滞后参数，考虑到各时间间隔的随机性，实际仿真中取其均值。

## 2 算例仿真

本节将通过算例来验证所提方法的有效性。设某流行病在某爆发区传播过程中包括  $S$ 、 $E$ 、 $I$ 、 $R$ 、 $D$  等 5 种状态。假设潜伏态  $E$  和患病态  $I$  具有传染性，易感态  $S$  与潜伏态  $E$  或患病态  $I$  个体通过接触以一定概率转化为潜伏态  $E$ ，其一次接触感染率分

别记为  $\beta_E^i$ ,  $\beta_I^i$ 。用  $\beta_E^i = k\beta_I^i$  中的  $k$  来表示潜伏期传染能力的弱化系数。潜伏态转化为患病态需要经过的潜伏期为  $\tau_E$ 、转化率为  $\gamma$ 。患病态经过治疗期  $\tau_R$  后以治愈率  $\mu_r$  治愈并且假设不再被二次感染, 患病态经过治疗期  $\tau_D$  后未治愈者的病死率为  $\mu_d$ 。模型参数的假设取值见表 1。

表 1 流行病模型参数  
Tab. 1 Epidemic model parameters

参数	取值
一次接触感染率 $\beta_I^i$ /%	10, 1, 0.1
弱化系数 $k$	0.5
转化率 $\gamma$	1.00
治愈率 $\mu_r$	0.95
病死率 $\mu_d$	0.05
潜伏期 $\tau_E$ /天	12
治疗期 $\tau_R$ /天	20
治疗期 $\tau_D$ /天	20

表 1 中,  $\beta_I^i$  的三种取值表示在弱、中等、强 3 种不同防护措施下易感态与患病态个体一次接触感染率。简单来说, 弱防护是指佩戴普通口罩、对环境偶尔做消毒处理, 中等防护是指佩戴 N95 以上高标准防护口罩、经常定期对周边环境做消毒处理, 强防护是指身穿专用防护服有专用场地的防护。

不失一般性, 将整群按工作分工划分为医务人员、社会管理与服务人员和普通居民 3 个子群。假设子群  $i$  中的个人单位时间(一天)内每人与其他人平均接触人次为  $x_i$ , 则可以确定子群  $i$  的度  $k_i=x_i$ 。然后根据子群的人口数量占比确定子群度分布

$P(k_i) = N_i / \sum_{i=1}^3 N_i$  ( $N_i$  为子群  $i$  的总人数), 本例中度、度分布的取值见表 2。

表 2 子群度、度分布  
Tab. 2 Subgroup degree and degree distribution

$i$	$k_i$	$p(k_i)$
1	2	0.97
2	20	0.02
3	15	0.01

根据实际工作情况, 经过与相关人员咨询, 确定各子群邻接矩阵元素  $C_X^{ij}$  的取值。对于普通居民

来说, 通常接触各子群中易感态、潜伏态和治愈态, 但不接触患病态和死亡态。社会管理与服务人员的接触关系同普通居民。医务人员的工作职能是救治已经确诊的患病态人群并且医务人员内部各态间相互接触。根据上述接触关系可以给出各子群邻接矩阵的取值如表 3 所示。

表 3 子群邻接矩阵  
Tab. 3 Subgroup adjacency matrix

$j$	$C_X^{ij}$									
	$X(i=1,2)$					$X(i=3)$				
	$S$	$E$	$I$	$R$	$D$	$S$	$E$	$I$	$R$	$D$
1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
2	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
3	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0

不难发现, 当子群邻接矩阵各元素取值为

$$C_X^{ij} = \begin{cases} 1, i, j = 1, 2, 3; X \in \{S, E, I, R\} \\ 0, \text{其它} \end{cases} \quad (9)$$

则式(6)退化为式(3)、式(7)退化为式(4), 利用式(6)~(8)也可以实现基于传统异质均匀混合理论的流行病动力学建模。利用式(6)~(8), 以表 1 的模型参数、表 2 的度、度分布参数以及按照表 3 和式(9)两种子群邻接矩阵元素  $C_X^{ij}$  的取值方式, 分别仿真考虑社会分工和传统异质均匀混合理论的流行病动力学过程。通过设定不同的  $\beta_I^i$ ,  $\beta_E^i$  取值, 分别考察在不同防护措施下的流行病传播过程。首先假设各子群的防护措施为弱防护, 易感个体的一次接触感染率为  $\beta_I^i = 0.1$ ,  $\beta_E^i = 0.05$  ( $i=1,2,3$ ), 采用本文方法进行仿真, 可得各子群的收敛过程如图 1~3 所示。在相同参数下利用传统方法进行仿真的收敛过程如图 4~6 所示。将两种方法的稳态解列于表 4 进行对比, 可以看出 2 种方法在社会管理与服务子群、医务人员子群上结果一致, 而在普通居民子群上有较大差别。

社会管理与服务子群、医务人员子群的患病率均为 100%、病死率均为 5%, 而在普通居民子群上, 本文方法的患病率(治愈率与病死率之和)为 74.59%、病死率为 3.73%, 传统方法的患病率为 99.48%、病死率为 4.97%。

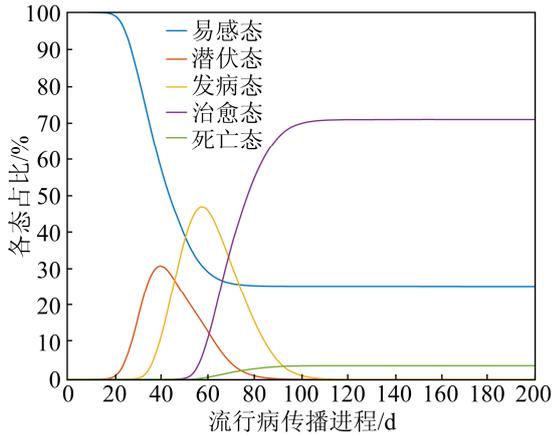


图1 弱防护本文方法居民子群收敛图

Fig. 1 Convergence graph of population subgroup with weak protection (N)

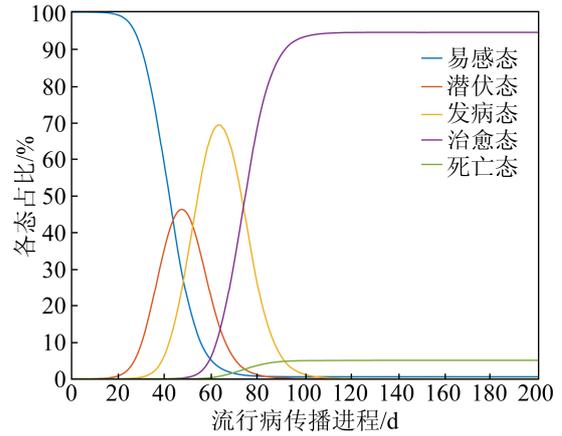


图4 弱防护传统方法居民子群收敛图

Fig. 4 Convergence graph of population subgroup with weak protection (T)

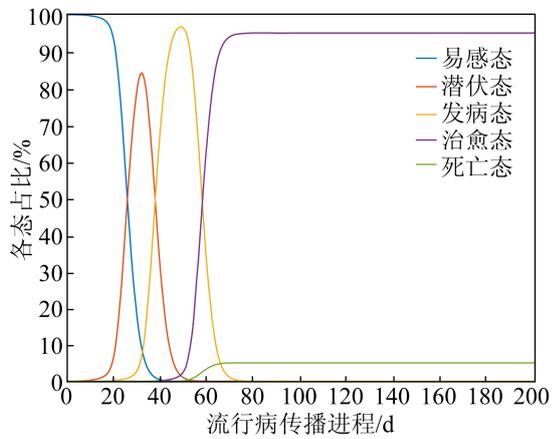


图2 弱防护本文方法服务子群收敛图

Fig. 2 Convergence graph of service subgroup with weak protection (N)

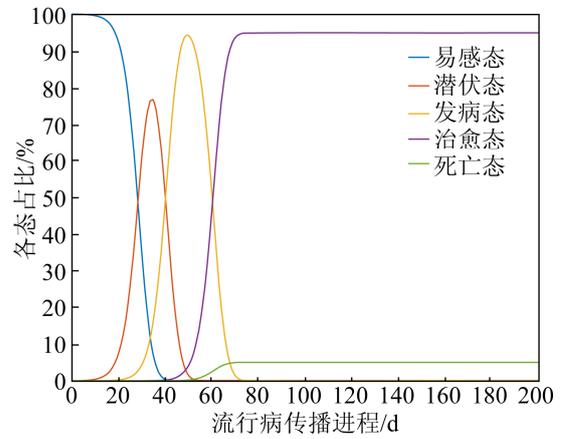


图5 弱防护传统方法服务子群收敛图

Fig. 5 Convergence graph of service subgroup with weak protection (T)

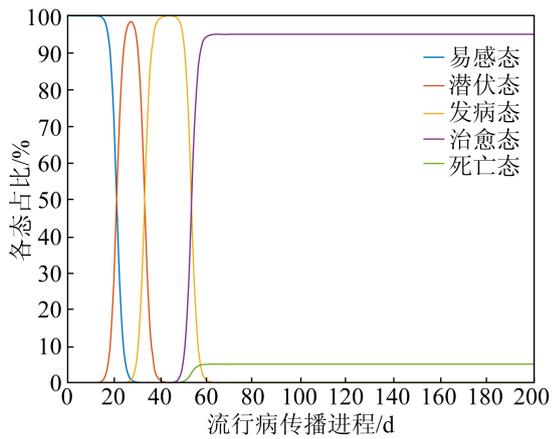


图3 弱防护本文方法医务子群收敛图

Fig. 3 Convergence graph of medical subgroup with weak protection (N)

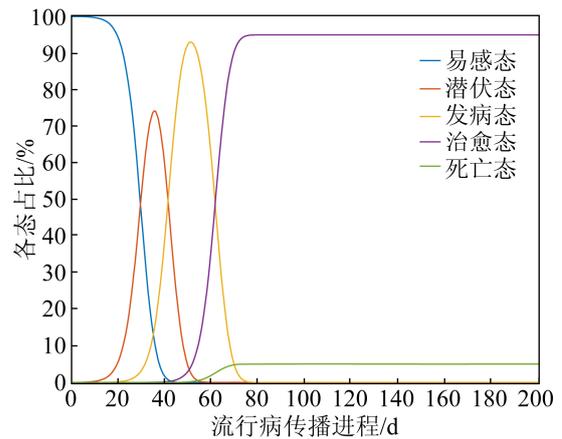


图6 弱防护传统方法医务子群收敛图

Fig. 6 Convergence graph of medical subgroup with weak protection (T)

表 4 各子群均采用弱防护情况下的稳态解  
Tab. 4 Steady state solution of each subgroup with weak protection

子群名称	状态	本文方法	传统方法
普通居民	S	0.254 1	0.005 2
	R	0.708 6	0.945 1
	D	0.037 3	0.049 7
社会管理与服务	S	0.000 0	0.000 0
	R	0.950 0	0.950 0
	D	0.050 0	0.050 0
医务人员	S	0.000 0	0.000 0
	R	0.950 0	0.950 0
	D	0.050 0	0.050 0

将各子群的防护等级调整到中等防护, 则易感个体的一次接触感染率设为  $\beta_1^i = 0.01$ ,  $\beta_E^i = 0.005 (i=1,2,3)$ , 其它参数仍按照表 1~3 给定的数值进行仿真。本文方法的各子群稳定收敛过程见图 7~9, 将 2 种方法得到的稳态解列于表 5。

进行对比可以看出, 无论哪种方法, 与弱防护相比中等防护在发病率和病死率上均有所下降。在普通居民子群和社会管理与服务子群上患病率和病死率本文方法结果均低于传统方法, 医务人员子群上本文方法高于传统方法。比较各子群的患病率和病死率不难发现, 本文方法医务人员的患病率和病死率最高、社会管理与服务人员的患病率和病死率次之, 普通居民的最低。而采用传统方法计算出的患病率和病死率是社会管理与服务人员的最高、医务人员次之、普通居民最低。

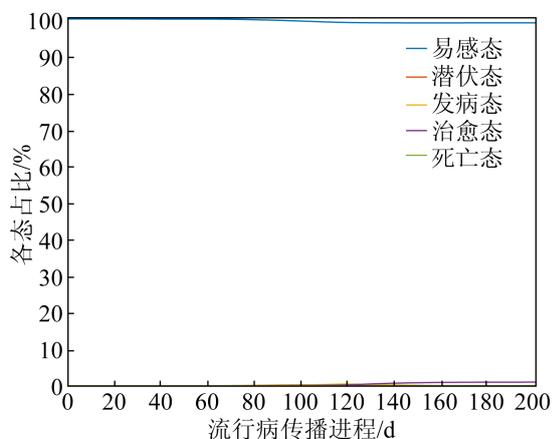


图 7 中等防护本文方法普通子群收敛图  
Fig. 7 Convergence graph of population subgroup with medium protection(N)

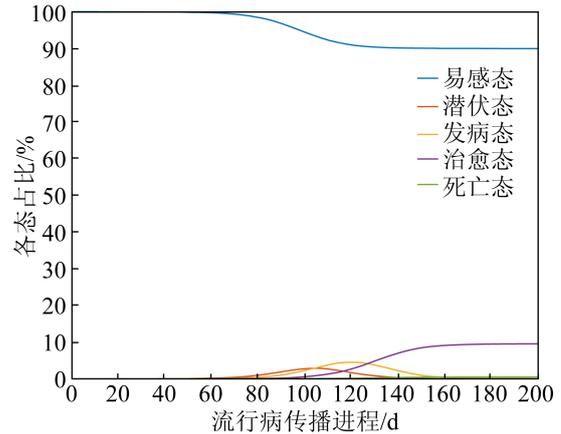


图 8 中等防护本文方法服务子群收敛图  
Fig. 8 Convergence graph of service subgroup with medium protection (N)

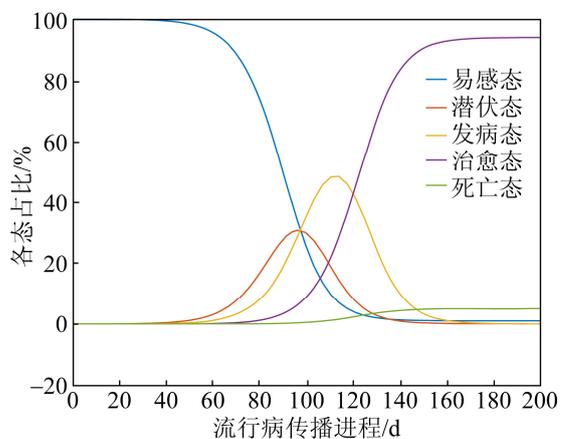


图 9 中等防护本文方法医务子群收敛图  
Fig. 9 Convergence graph of medical subgroup with medium protection (N)

表 5 各子群均采用中等防护情况下的稳态解  
Tab. 5 The steady state solution of each subgroup with general protection

子群名称	状态	本文方法	传统方法
普通居民	S	0.989 4	0.875 6
	R	0.010 1	0.118 2
	D	0.000 5	0.006 2
社会管理与服务	S	0.899 8	0.265 1
	R	0.094 8	0.698 2
	D	0.005 4	0.036 7
医务人员	S	0.009 8	0.369 5
	R	0.940 7	0.598 9
	D	0.049 6	0.031 6

为了进一步验证上述所得结论的普适性, 一次接触感染率  $\beta_1^i$  在 0.01 附近的 0.005, 0.015, 0.02

等3个点上取值进行仿真对比,将本文方法上述仿真结果的病死率和患病率一同绘于图10~11,将传统方法结果的病死率和患病率绘于图12~13。图示结果表明,本文方法在更多的一次接触感染率取值点上,同样显示出了医务人员具有较高患病率和病死率、社会管理与服务人员次之、普通居民最低,而传统方法是社会管理与服务人员的患病率和病死率最高、医务人员第二、普通居民最低的结论。

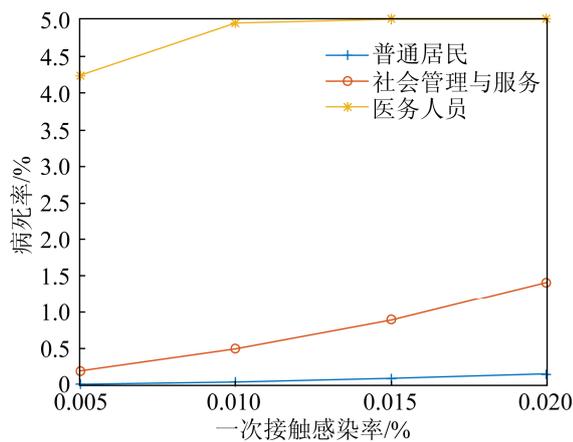


图10 本文方法一次感染率与病死率关系图

Fig. 10 Chart of relationship between primary infection rate and case fatality rate (N)

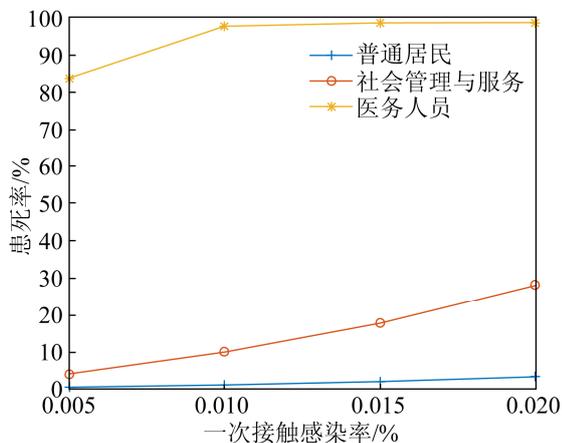


图11 本文方法一次感染率与患病率关系图

Fig. 11 Chart of relationship between primary infection rate and prevalence rate (N)

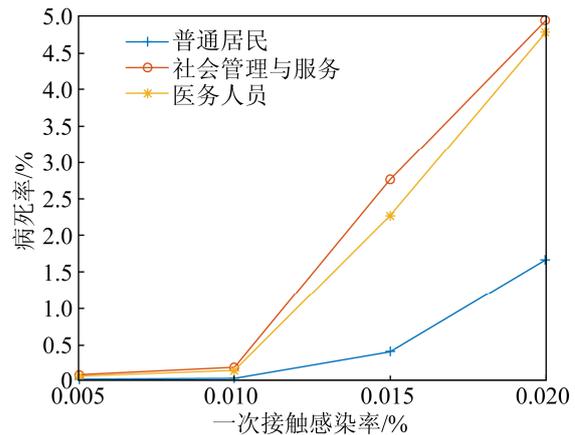


图12 传统方法一次感染率与病死率关系图

Fig. 12 Chart of relationship between primary infection rate and case fatality rate (T)

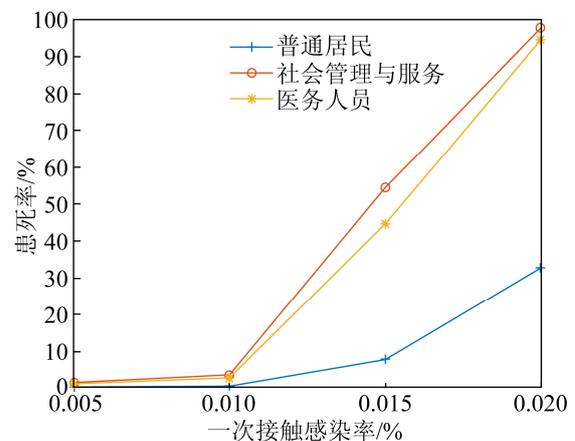


图13 传统方法一次感染率与患病率关系图

Fig. 13 Chart of relationship between primary infection rate and prevalence rate (T)

针对在中等防护条件下医务人员患病率和病死率仍然较高的问题,进一步单独调高医务人员子群的防护等级,取 $\beta_1^3 = 0.001$ ,在其它参数不变的条件下再次进行仿真。本文方法仿真的各子群收敛过程见图14~16,将本文方法和传统方法的稳态解列于表6。由表6可以看出,提升医务人员的防护等级,无论哪种方法医务人员的患病率和病死率均有大幅下降。两种方法在各子群患病率和病死率高低顺序仍然没有变化,与在中等防护条件下的仿真结论一致。

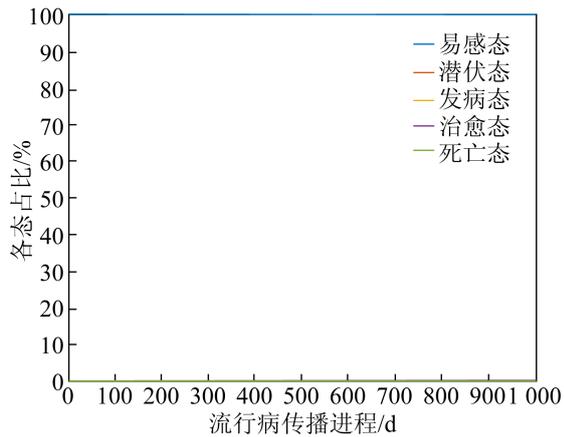


图 14 医务强防护本文方法居民子群收敛图

Fig. 14 Convergence graph of population subgroup with strong protection (N)

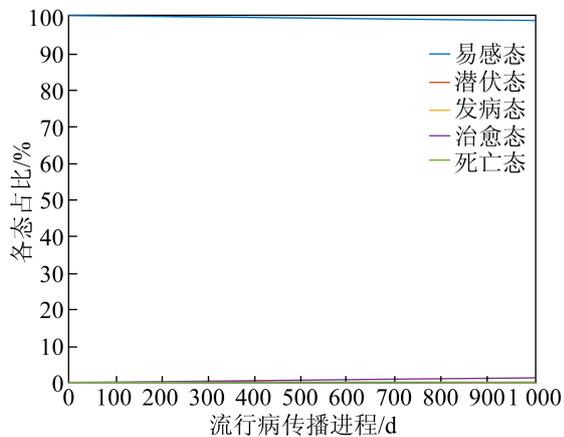


图 15 医务强防护本文方法服务子群收敛图

Fig. 15 Convergence graph of service subgroup with strong protection (N)

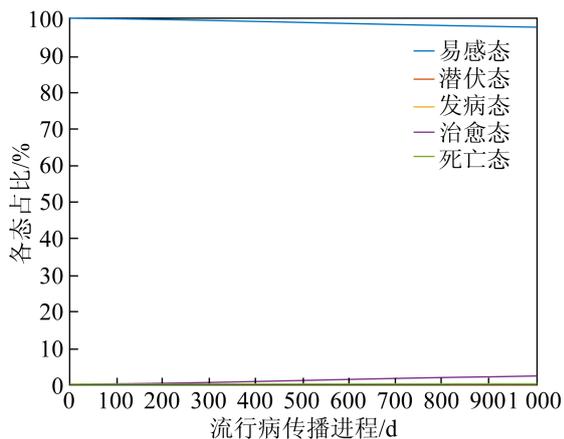


图 16 医务强防护本文方法医务子群收敛图

Fig. 16 Convergence graph of medical subgroup with strong protection (N)

表 6 医务人员采取强防护、其他子群采取中等防护情况下的稳态解

Tab. 6 Steady state solution of medical staff with strong protection and other subgroups with medium protection

子群名称	状态	本文方法	传统方法
普通居民	$S$	0.996 5	0.917 7
	$R$	0.003 2	0.078 0
	$D$	0.000 2	0.004 1
社会管理与服务	$S$	0.966 6	0.424 2
	$R$	0.031 4	0.546 6
	$D$	0.001 7	0.028 8
医务人员	$S$	0.938 5	0.937 7
	$R$	0.057 7	0.059 1
	$D$	0.003 0	0.003 1

综上所述,一次接触感染率是流行病动力学建模与仿真计算的一组关键参数,它的取值对患病率、病死率的稳态解有着重要影响。而一次接触感染率取决于人们在疫情期间的防护意识和防护措施。算例仿真表明,无论采用哪种方法进行仿真计算,相对其他两个子群普通居民子群的患病率和病死率均为最低,这与实际情况相符。在社会管理与服务子群、医务人员子群方面,在弱防护条件下,两种方法的仿真结果均达到了患病率和病死率的上限而相等,弱防护即意味着群体免疫,要付出大量人员病亡的代价。在中等和强防护条件下本文方法结果为医务人员子群的患病率、病死率较高,而传统方法的结果为社会管理与服务子群较高。由于医务人员虽然与其他个体在连接的度上小于社会管理与服务人员,但是与患病态人群密切接触,患病率和病死率显然会更高,所以考虑了社会分工后的本文方法较为合理。另外,及时的隔离与防护降低一次接触感染率是疫情防控的关键,以及在有限条件下应优先考虑提高医务人员的防护等级。

### 3 武汉疫情动力学建模与仿真

在上节的算例仿真中,已经验证了方法可行性的基础上,本节将利用武汉地区流行病相关参数进行动力学建模与仿真以进一步说明本文方法解决实际问题的能力。

### 3.1 确定模型参数

#### 3.1.1 子群度与度分布

根据国家卫健委相关数据统计共有 4.2 万医务人员支援武汉, 再加上本地医务人员 4.23 万人共有 8.43 万医务人员投入了此次抗疫行动中。假设社会管理与服务人员与医务人员按 2:1 配置, 则可以推算出社会管理与服务人员的数量为 16.86 万。按照武汉地区总人口 1 000 万计算, 则可得出各子群的度分布。假设普通居民每日外出有 2 人次接触, 社会成员平均每两天与社会管理与服务人员接触一人次, 则每位社会管理与服务人员每日平均接触人次为  $1\,000/2/16.86=29.66$ 。关于医务人员的接触情况, 由于各自岗位分工的不同接触频次各不相同, 简单起见本文以专家大夫为例进行一线医务人员子群的接触次数分析。设一位大夫一周出诊两天次、每天接诊 60 人次, 每周查房(治疗) 5 天次、每天查房(治疗)接触患者 10 人次。则每位大夫每周共计接触 170 人次, 平均每日接触人次为  $170/7=24.29$ 。根据上述关于子群度的定义可以给出各子群的度。将上述结果列于表 7。

表 7 子群度、度分布(武汉)

Tab. 7 Subgroup degree and degree distribution (Wuhan)

$i$	$k_i$	$p(k_i)$
1	2	0.974 7
2	29.66	0.016 86
3	24.29	0.008 430

#### 3.1.2 流行病学参数

##### (1) 治愈率与病死率

为了减小因治疗康复滞后所带来的影响, 本文取较长时间区间内的统计数据作为治愈率和病死率的计算依据。由于本文模型不考虑外部输入的影响, 因此在统计数据时需要去除境外输入数据。根据国家卫健委相关数据统计, 截至 4 月 20 日 24 时武汉累计治愈出院病例 46 362 例, 累计死亡病例 3 869 例, 累计确诊病例 50 333 例。由此可以计算得到治愈率为  $46\,362/50\,333$ 、病死率

为  $3\,869/50\,333$ 。

##### (2) 一次接触感染率 $\beta_i^j$

一次接触感染率通常需要通过相关实验获得, 由于目前未见公开报道, 因此本文将利用文献[17]给出的数据进行分析获得。文献[17]指出在疫情初期, 武汉某医院 42 名医护人员与 14 个手术患者接触 47 人次, 经过隔离观察有大夫 3 人确诊、14 名手术患者术后全部确诊。由于事先并不知情是由于大夫还是患者处于潜伏期, 因此我们考虑 2 种极端情况: 一是仅有一位潜伏者感染了 16 位医患人员的最大一次接触感染率情况; 二是 17 位确诊者本身在接触前已全部被感染处于潜伏期, 即零感染的最小感染率情况。由此可得一次接触感染率的极大极小区间值为  $[0\,16/55/47]$ 。由于本文不考虑区间数的计算问题, 所以在实际仿真中取区间中心作为仿真参数。由于未见潜伏期传染性与患病期传染性关系的相关报道, 所以仍然假设潜伏期传染力减弱系数为 0.5。

##### (3) 潜伏期、治愈期、治死期的时间滞后参数

根据已有文献[15-16]可以确定潜伏期和治疗转归康复期的时间滞后参数, 由于死亡时间滞后参数对动力学仿真没有实质性影响, 故本文将治死期与治愈期的时间滞后参数取为相同值。

##### (4) 潜伏期转化率

由于未见潜伏期直接转归治愈的相关报道和不考虑无症状患者情况, 所以设此参数为 1。

将上述各流行病学参数一并列于表 8。

表 8 流行病模型参数(武汉)

Tab. 8 Epidemic model parameters (Wuhan)

参数	取值
一次接触感染率 $\beta_i^j/\%$	0.15/0.55/0.47/0.02
弱化系数 $k$	0.5
转化率 $\gamma$	1.00
治愈率 $\mu_r$	46 362/50 333
病死率 $\mu_d$	3 869/50 333
潜伏期 $\tau_E/\text{天}$	7
治疗期 $\tau_R/\text{天}$	12.9
治死期 $\tau_D/\text{天}$	12.9

### 3.2 仿真计算

由于本文模型不考虑外来输入输出的影响,所以适合于仿真武汉封城之后的疫情传播动力学过程。以封城之日 1 月 23 日作为仿真计算的起点,此时官方发布的累积确诊病例为 5 641 人<sup>[18]</sup>。根据平均潜伏期 7 天左右的事实,将 1 月 24 日至 1 月 29 日 6 天内发病确诊总人数 4 211 人作为普通子群潜伏态初值,其他各态人数均假设为 0。按照表 7、表 8 参数利用流行病时延动力学方程式(8)进行建模与仿真。子群各态的收敛过程如图 17~19 所示,稳定解见表 9。结合表 7 度分布及总人口数,将各态百分比转化为实际人数列于表 10。

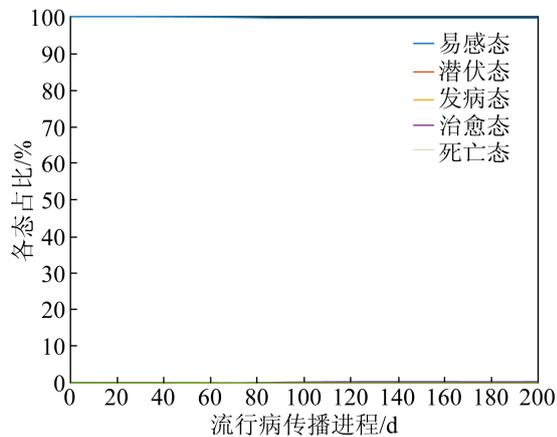


图 17 本文方法普通居民子群收敛图(武汉)  
Fig. 17 Convergence graph of population (Wuhan)

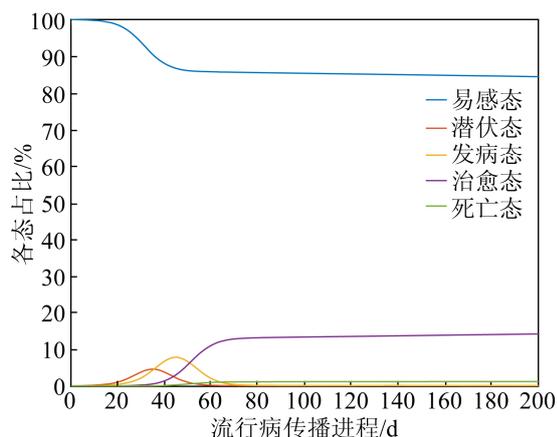


图 18 本文方法社会服务子群收敛图(武汉)  
Fig. 18 Convergence graph of service subgroup (Wuhan)

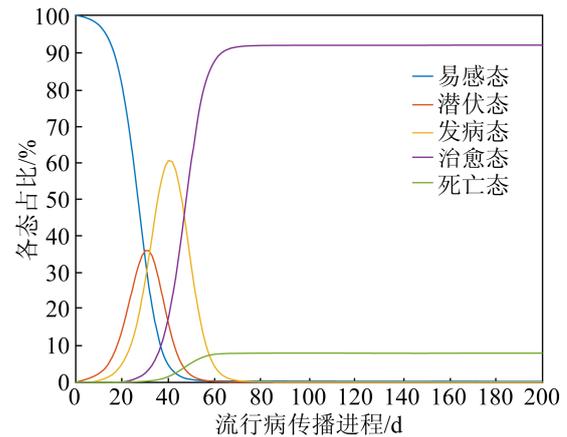


图 19 本文方法医务子群收敛图(武汉)  
Fig. 19 Convergence graph of medical subgroup (Wuhan)

表 9 武汉疫情仿真结果的稳态解(1)

Tab. 9 Steady-state solution of epidemic situation simulation in Wuhan (1)

子群名称	状态	本文方法
普通居民	$S$	0.987 8
	$R$	0.011 2
	$D$	0.001 0
社会管理与服务	$S$	0.845 0
	$R$	0.142 7
	$D$	0.012 3
医务人员	$S$	0.001 9
	$R$	0.919 4
	$D$	0.078 7

表 10 武汉疫情累积确诊和病死人数的仿真结果(1)

Tab. 10 Simulation results of cumulative confirmed epidemic situation and death toll in Wuhan (1)

子群名称	状态	本文方法
普通居民	累积确诊	11.892
	累积病死	9 750
社会管理与服务	累积确诊	26 133
	累积病死	2 074
医务人员	累积确诊	84 142
	累积病死	6 637
合计	累积确诊	122 167
	累积病死	18 461

由表 9 可知,仿真结果的武汉确诊总人数为 12.216 7 万、总病死数为 1.846 1 万。其中,医务人员无论在确诊人数还是在病死人数上都占据绝大多数。但从数量上看,这与实际情况有较大差距。

这主要是在感染率的设置上将 3 类子群取值相同所致。在武汉进入封城之后,随着全国医疗援汉力度的加大,医务人员的工作条件明显改善、防护等级显著增强,所以医务人员应设定更小的一次接触感染率为原来的 1/10。考虑到社会管理与服务人员的防护条件与手术室一般防护相差不大,因此本子群的一次接触感染率保持不变。而普通居民的防护等级无法达到手术室一般防护级别,因此重新调整其一次接触感染率为原来的 2 倍。重新进行仿真,当动力学方程处于稳定平衡状态时,将仿真结果列于表 11。结合表 7 度分布,将各态百分比转化为实际人数列于表 12。

表 11 武汉疫情仿真结果的稳态解(2)  
Tab. 11 Steady-state solution of epidemic situation simulation in Wuhan (2)

子群名称	状态	本文方法
普通居民	S	0.993 6
	R	0.005 9
	D	0.000 5
社会管理与服务	S	0.960 5
	R	0.036 5
	D	0.003 0
医务人员	S	0.875 8
	R	0.114 7
	D	0.009 5

表 12 武汉疫情累积确诊和病死人数的仿真结果(2)  
Tab. 12 Simulation results of cumulative confirmed epidemic situation and death toll in Wuhan (2)

子群名称	状态	本文方法
普通居民	累积确诊	62 381
	累积病死	4 874
社会管理与服务	累积确诊	6 154
	累积病死	506
医务人员	累积确诊	9 678
	累积病死	801
合计	累积确诊	78 213
	累积病死	6 181

由表 10 与表 12 比较可知,各子群累积确诊人数和病死人数的仿真解随一次感染率的变化而变化。其中,由于医务人员的一次感染率大幅减小,

导致仿真结果中医务人员以及社会总体的累积确诊人数和累积病死人数均由大幅度下降。并且由于总体感染人数的减少,社会管理与服务人员在一次接触感染率不变的情况下其确诊人数和病死人数也相应有所减少。而对于普通居民来说虽然设定的一次接触感染率有所上升,但由于社会总体的患病人数减少,疫情防控大环境有所改善,所以其对应的确诊人数和病死人数也有所减少。

另外,社会总体的确诊人数以及病死人数与此次疫情实际数据相比可能会有一定差距,但是总可以通过反复调整各子群的一次感染率参数来达到与实际情况的最佳吻合,由于篇幅原因,本文不再赘述。

由上述分析进一步说明了一次接触感染率对仿真结果的重要影响。如何准确获到一次接触感染率的实验数据是一个不可回避的问题。然而其取值受接触距离、时间、环境等诸多因素影响,即使可以获得一次接触感染率的实验室数据,在实际应用中也不能一成不变、完全照搬,要根据实际疫情统计数据来反演确定。因此开发一种基于实际数据的参数反演高效算法是一个需要进一步解决的问题。

## 4 结论

(1) 本文给出了一种考虑社会分工的异质非均匀混合流行病动力学建模方法。以普通居民、社会管理与服务、医务人员等 3 个子群划分为例,通过对子群邻接矩阵的赋值来描述网络结构关系,仿真了其中一种具有特定分工接触关系的情况。与传统异质均匀混合理论仿真结果进行对比表明,在设定医务人员与患病态个体接触、其他子群与易感态、潜伏态接触条件下,虽在度分布及度值均小于社会管理与服务子群但仍然仿真出较高的患病率和病死率,本文方法更符合实际情况。

(2) 通过对子群邻接矩阵的设定,可以描述丰富的个体接触关系。为流行病动力学建模与仿真提供了统一的模型,便于快速实现对给定接触关系的

仿真操作, 为使用者提供了便利。本文通过设定子群邻接矩阵取值, 方便地实现了异质均匀理论的流行病动力学仿真, 同时表明了异质均匀混合理论是异质非均匀理论的一个特例。

(3) 本文以 3 个子群为例进行了示范, 但实际社会分工远远多于此, 太少的子群划分无法保证预测精度, 在实际预测时, 需要按照疫情中的社会实际分工进一步细化子群分类。

(4) 模型中的诸多参数实际上并非为常数, 对于不同的个体对应有不同的取值, 是一组随机变量, 本文取为常数是基于随机变量的均值的思想所得。因此仿真结果为实际情况在均值意义上的一个近似而非随机结果本身。

(5) 本文考虑了潜伏期、治愈周期和病死时间的影响, 并在建模中利用延时动力学方程给予实现, 但是未考虑引入延迟对动力学稳定平衡过程的影响规律。关于稳定平衡过程的动力学时间特性, 拟在另外的工作中展开专门的研究。

(6) 今后, 需要进一步深入研究各参数与仿真结果的定量关系以及影响规律, 为流行病防控这一最终目标提供理论指导, 为夺取抗疫胜利贡献一份力量。

## 参考文献:

- [1] Pastor-Satorras R, Castellano C, Van Mieghem P. Epidemic processes in complex networks[J]. *Reviews of Modern Physics* (S0034-6861), 2015, 87: 925-979.
- [2] Li L, Zhang J, Liu C, et al. Analysis of transmission dynamics for Zika virus on networks[J]. *Applied Mathematics and Computation* (S0096-3003), 2019, 347: 566-577.
- [3] 张晴霞. 几类流行病模型研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2015.  
Zhang Qingxia. Research on Several Classes of Epidemic Models[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology, 2015.
- [4] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic spreading in scale-free networks[J]. *Physical Review Letters* (S0031-9007), 2001, 86(14): 3200-3203.
- [5] 阮中远. 复杂网络上的流行病传播[J]. *中国科学(物理学、力学、天文学)*, 2020, 50(1): 1-20.
- [6] Ruan Zhongyuan. Epidemic spreading in complex networks[J]. *Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomica*, 2020, 50(1): 1-20.
- [7] Wang W, Tang M, Eugene S H, et al. Unification of theoretical approaches for epidemic spreading on complex networks[J]. *Reports on Progress in Physics* (S0034-4885), 2017, 80(3): 036603.
- [8] 栾荣生, 王新, 张伟, 等. 新型冠状病毒肺炎的流行病学、临床治疗与疫情防控[J]. *四川大学学报(医学版)*. 2020, 51(2): 131-138.  
Luan Rongsheng, Wang Xin, Zhang Wei, et al. Epidemiology, Treatment, and Epidemic Prevention and Control of the Coronavirus Disease 2019: a Review[J]. *J Sichuan Univ ( Med Sci Edi )*, 2020, 51(2): 131-138.
- [9] 石耀霖, 程惠红, 黄禄渊, 等. 用离散随机模型研究湖北新冠肺炎流行病动力学特征[J]. *中国科学院大学学报*, 2020, 37(2): 145-154.  
Shi Yaolin, Cheng Huihong, Huang Luyuan, et al. Using a discrete stochastic model to study the epidemic dynamics of COVID-19 in Hubei. China[J]. *Journal of University of Chinese Academy of Sciences*, 2020, 37( 2) : 145-154.
- [10] 曹盛力, 冯沛华, 时朋朋. 修正 SEIR 传染病动力学模型应用于湖北省 2019 冠状病毒病(COVID-19)疫情预测和评估[J]. *浙江大学学报(医学版)*, 2020, 4: 178-184. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/33.1248.R.20200303.1722.004.html>.
- [11] Cao Shengli, Feng Peihua, Shi Pengpeng, et al. Study on the epidemic development of COVID-19 in Hubei province by a modified SEIR model[J]. *Journal of Zhejiang University (Med Sci Edi)*, 2020, 4: 178-184.
- [12] Fang Y Q, Nie Y T, Penny M. Transmission dynamics of the COVID-19 outbreak and effectiveness of government interventions: A data-driven analysis[J]. *Journal of medical virology* (S0146-6615), 2020: 645-659. DOI: 10.1002/jmv.25750.
- [13] Kucharski A J, Russell T W, Diamond C, et al. Early dynamics of transmission and control of COVID-19: a mathematical modelling study[J]. *The Lancet infectious diseases* (S1474-4457), 2020. DOI: 10.1016/S1473-3099(20)30144-4.
- [14] Kanga D, Choia H, Kimb J H, et al. Spatial epidemic dynamics of the COVID-19 outbreak in China[J]. *International Journal of Infectious Diseases* (S1878-3511), 2020, 94: 96-102.
- [15] Kim S, Kim Y J, Peck K R, et al. School Opening Delay Effect on Transmission Dynamics of Coronavirus Disease 2019 in Korea: Based on Mathematical Modeling and

- Simulation Study[J]. Journal of Korean medical science (S1598-6357), 2020, 35(13): e143. <https://doi.org/10.3346/jkms.2020.35.e143>.
- [14] 陈彬, 艾川, 马亮, 等. 大局稳定、局部冒泡, 应对疫情应做好持久战的准备—利用计算实验进行疫情间复工复产风险分析[EB/OL]. [2020-03-15]. [http://journal19.magtechjournal.com/Jwk3\\_xtfzxb/CN/](http://journal19.magtechjournal.com/Jwk3_xtfzxb/CN/).  
Chen Bin, Ai Chuan, Ma Liang, et al. To deal with the epidemic situation, we should make preparations for a long-term war[EB/OL]. [2020-03-15]. [http://journal19.magtechjournal.com/Jwk3\\_xtfzxb/CN/](http://journal19.magtechjournal.com/Jwk3_xtfzxb/CN/).
- [15] 杨倩, 孙勤, 国江波, 等. 中西医结合治疗新型冠状病毒肺炎重症患者的回顾性临床研究[J]. 中草药, 2020, 51(8): 2050-2054.  
Yang Qian, Sun Qin, Guo Jiangbo, et al. Retrospective Clinical Study on Treatment of Covid-19 Patients With Integrated Traditional Chinese and Western Medicine[J]. Chinese Traditional and Herbal Drugs, 2020, 51(8): 2050-2054.
- [16] 国家卫健委. 新型冠状病毒肺炎的潜伏期平均在 7 天左右 [EB/OL]. [2020-01-22]. 中国新闻网. <https://www.chinanews.com/gn/2020/01-22/9067014.shtml>.  
The National Health and Family Planning Commission. The incubation period of novel coronavirus pneumonia is about 7 days[EB/OL]. [2020-01-22]. China News. <https://www.chinanews.com/gn/2020/01-22/9067014.shtml>.
- [17] 苏娃婷, 雷少青, 贾一帆, 等. 14 例潜伏期新型冠状病毒肺炎患者手术室传染性及其术后转归观察. 武汉大学学报(医学版). <http://kns.cnki.net/kcms/detail/42.1677.R.20200409.0855.001.html>.  
Su Wating, Lei Shaoqing, Jia Yifan, et al. Infectivity of 14 Patients With Latent Covid-19 Infection in Operating Room and Their Postoperative Outcomes[J]. Journal of Wuhan University(Med Sci Edi). <http://kns.cnki.net/kcms/detail/42.1677.R.20200409.0855.001.html>.
- [18] Pan A, Liu L, Wang C L, et al. Association of public health interventions with the epidemiology of the COVID-19 outbreak in Wuhan, China[J/OL]. The Journal of the American Medical Association (S1538-3598). [2020-04-28]. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/32275295>. DOI: 10.1001/jama.2020.6130.