

12-12-2019

## Optimized Linear ADRC Control for a Class of Fractional-Order Chaotic Systems

Huang Yu

*Hebei Engineering Research Center of Simulation & Optimized Control for Power Generation, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;*

Xie Tian

*Hebei Engineering Research Center of Simulation & Optimized Control for Power Generation, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;*

Wu Rui

*Hebei Engineering Research Center of Simulation & Optimized Control for Power Generation, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research](#), [Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

# Optimized Linear ADRC Control for a Class of Fractional-Order Chaotic Systems

## Abstract

**Abstract:** Linear active disturbance rejection control has many parameters and it is difficult to obtain appropriate parameters. *Therefore, a quantum-behaved particle swarm optimization algorithm based on cosine decreasing function is proposed in this article for searching optimal LADRC parameters. In this algorithm, cosine decreasing function and updated equation of quantum-behaved particle swarm optimization algorithm are combined. By using the variable characteristic of cosine decreasing function with the increase of iteration times, the original global optimization ability of quantum particle swarm optimization is retained and its poor local optimization ability is overcome.* And the simulation results show that the LADRC optimized by COSQPSO can suppress overshoot, reduce steady-state error, and has strong anti-jamming ability.

## Keywords

fractional-order chaotic system, linear ADRC, quantum-behaved particle swarm searching algorithm, cosine decreasing function

## Recommended Citation

Huang Yu, Xie Tian, Wu Rui. Optimized Linear ADRC Control for a Class of Fractional-Order Chaotic Systems[J]. Journal of System Simulation, 2019, 31(10): 2093-2102.

## 一类分数阶混沌系统的线性自抗扰优化控制

黄宇, 谢天, 武蕊

(华北电力大学 河北省发电过程仿真与优化控制工程技术研究中心, 河北 保定 071003)

**摘要:** 针对线性自抗扰器参数较多、协调整定较为困难的缺点。提出一种基于余弦递减函数的量子粒子群搜索算法, 该算法将余弦递减函数与量子粒子群搜索算法粒子的更新公式相结合, 利用余弦递减函数随迭代次数增加可变的特性, 既保留了量子粒子群原有的全局寻优能力, 又有效克服了其局部寻优能力差的缺点。将本文提出的算法应用于一类分数阶混沌系统的线性自抗扰控制器参数优化。仿真结果表明: 优化后的线性自抗扰控制器能够很好的抑制超调、减小稳态误差并具有较强抗干扰能力。

**关键词:** 分数阶混沌系统; 线性自抗扰控制; 量子粒子群搜索算法; 余弦递减函数

中图分类号: TK730      文献标识码: A      文章编号: 1004-731X (2019) 10-2093-10

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.17-0415

## Optimized Linear ADRC Control for a Class of Fractional-Order Chaotic Systems

Huang Yu, Xie Tian, Wu Rui

(Hebei Engineering Research Center of Simulation &amp; Optimized Control for Power Generation, North China Electric Power University, Baoding 071003, China)

**Abstract:** Linear active disturbance rejection control has many parameters and it is difficult to obtain appropriate parameters. Therefore, a quantum-behaved particle swarm optimization algorithm based on cosine decreasing function is proposed in this article for searching optimal LADRC parameters. In this algorithm, cosine decreasing function and updated equation of quantum-behaved particle swarm optimization algorithm are combined. By using the variable characteristic of cosine decreasing function with the increase of iteration times, the original global optimization ability of quantum particle swarm optimization is retained and its poor local optimization ability is overcome. And the simulation results show that the LADRC optimized by COSQPSO can suppress overshoot, reduce steady-state error, and has strong anti-jamming ability.

**Keywords:** fractional-order chaotic system; linear ADRC; quantum-behaved particle swarm searching algorithm; cosine decreasing function

## 引言

分数阶混沌系统的控制在数字信号处理<sup>[1]</sup>、图

像加密<sup>[2]</sup>和保密通信<sup>[3]</sup>等领域的研究中发挥着重要的作用。由于分数阶混沌系统阶次为分数, 运动特性较为复杂, 尤其是当分数阶混沌系统存在较高维数时, 一般的控制方法不容易取得很好的调节效果, 所以高维数分数阶混沌系统的控制问题已成为人们研究的重点和难点问题<sup>[4]</sup>。近年来, 人们采取了许多先进的控制策略和算法对分数阶混沌系统



收稿日期: 2017-09-04      修回日期: 2017-12-01;  
基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金(2015MS66);  
作者简介: 黄宇(1982-), 男, 江苏沐阳, 博士, 副教授, 研究方向为热工系统辨识与控制; 谢天(1993-), 男, 内蒙古通辽, 硕士生, 研究方向为控制系统结构及参数优化。

<http://www.china-simulation.com>

• 2093 •

进行控制,如自适应滑模控制<sup>[5]</sup>、分数阶输出反馈滑模控制<sup>[6]</sup>、基于预测的反馈控制<sup>[7]</sup>、主动控制<sup>[8]</sup>、主动滑模控制<sup>[9]</sup>、自适应模糊控制<sup>[10]</sup>等,取得了一定的控制效果。但是在以上控制方法中,有的控制方法算法复杂、有的控制方法抗干扰能力弱、有的控制方法对模型的依赖较大。为此,本文利用线性自抗扰控制器(Linear Active Disturbance Rejection Control, LADRC)对三维分数阶混沌系统进行控制。

线性自抗扰控制是以自抗扰控制<sup>[11]</sup>的思想为基础,以线性化的方法实现和设计 ADRC 各部分结构。目前, LADRC 以其结构简单、抗干扰能力强等特点被应用在多个领域。文献[12]将 LADRC 应用到强制循环蒸发系统的控制中。文献[13]对气垫船模型进行了分析,并通过 LADRC 对其取得了良好的控制效果。文献[14]利用 LADR 对球磨机制粉系统进行了控制。文献[15]将一阶 LADRC 应用到永磁同步电机的控制中并取得了良好的控制效果。文献[16]利用 LADRC 实现了对 LCL 型并网交流器的控制。但是, LADRC 待整定参数较多,各个参数难以相互协调获得较好的整定效果,因此如何获取准确的 LADRC 参数仍然是人们研究的焦点<sup>[17]</sup>。

为了更加准确的确定分数阶混沌系统 LADRC 的各个参数,本文将量子粒子群优化算法(Quantum-behaved Particle Swarm Optimization, QPSO)与余弦递减函数相结合,提出一种基于余弦递减函数控制缩放系数的 QPSO(COSQPSO)。该算法核心在于寻优过程改变 QPSO 的缩放系数,余弦递减函数在刚开始时下降速度较慢,保证了缩放系数长时间维持较大值,有利于全局搜索。后期下降速度变快,缩放系数迅速减小,有利于搜索局部最优值。将本文提出的 COSQPSO 算法应用到三维分数阶混沌系统的 LADRC 控制中,实验证明该方法具有良好的控制效果以及抗干扰能力。

## 1 三维分数阶混沌系统介绍

本文讨论的一类分数阶混沌系统为三维分数阶混沌系统,具体系统如表 1 所示。

表 1 三维分数阶混沌系统

Tab. 1 Three dimensional fractional order chaotic system

| 系统名               | 形式   |
|-------------------|--|
| Chen 系统           | $\begin{cases} D^{q^1}x = a(y-x) \\ D^{q^2}y = dx - xz + cy \\ D^{q^3}z = xy - bz \end{cases}$   |
| Lorenz 系统         | $\begin{cases} D^{q^1}x = a(y-x) \\ D^{q^2}y = x(b-z) - y \\ D^{q^3}z = xy - cz \end{cases}$   |
| Lü 系统             | $\begin{cases} D^{q^1}x = a(y-x) \\ D^{q^2}y = -xz + cy \\ D^{q^3}z = xy - bz \end{cases}$   |
| Chua 系统           | $\begin{cases} D^{q^1}x = \alpha(y-x - f(x)) \\ D^{q^2}y = x - y + z \\ D^{q^3}z = -\beta y - \gamma z \end{cases}$  |
| Lotka-Volterra 系统 | $f(x) = m_1x + 1/2(m_0 - m_1)( x+1  -  x-1 )$ $\begin{cases} D^{q^1}x = ax + ex^2 - bxy - szx^2 \\ D^{q^2}y = -cy + dxy \\ D^{q^3}z = -pz + szx^2 \end{cases}$ |
| Newton-Leipnik 系统 | $\begin{cases} D^{q^1}x = -ax + y + 10yz \\ D^{q^2}y = -x - 0.4y + 5xz \\ D^{q^3}z = -5xy + bz \end{cases}$  |
| Liu 系统            | $\begin{cases} D_i^{q^1}x = a(y-x) \\ D_i^{q^2}y = bx - xz \\ D_i^{q^3}z = -cx + dx^2 \end{cases}$   |
| Rosler 系统         | $\begin{cases} D_i^{q^1}x = -y - z \\ D_i^{q^2}y = x + ay \\ D_i^{q^3}z = b + z(x-c) \end{cases}$  |

对于三维分数阶混沌系统,由于分数阶的引入以及混沌系统本身的复杂性,系统状态在没有控制作用的情况下通常会呈现出发散且无规则的运动状态。然而在实际的应用当中,经常希望系统状态按照一个特定的轨迹运动或是达到一个特定的值。因此,为了能够对这类分数阶混沌系统取得良好的控制效果,人们进行了大量的实验研究。为此,本文采用 LADRC 对三维分数阶混沌系统进行控制。

## 2 线性自抗扰控制策略

图 1 给出了二阶 LADRC 控制系统的结构<sup>[21]</sup>。

图 1 中,  $G_p$  为被控对象,有两个作用在控制回路的外部信号,分别是设定值  $r$  和控制量扰动  $d$ 。线性扩张状态观测器(Linear Extended State

Observer, LESO)通过输入信号(控制量  $u$  和系统输出  $y$ )和输出信号( $z_1$ 、 $z_2$  和  $z_3$ )来确定系统的内部状态。 $k_p$ 、 $k_d$  和  $b_0$  是 LADRC 控制器参数。

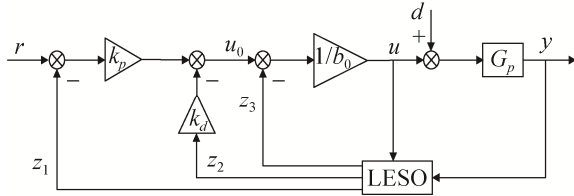


图 1 二阶 LADRC 系统结构  
Fig. 1 Two-order LADRC system structure

二阶 LESO 的形式为:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \beta_1(y - z_1) \\ \dot{z}_2 = z_3 + \beta_2(y - z_1) + b_0 u \\ \dot{z}_3 = \beta_3(y - z_1) \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $z_1$ 、 $z_2$ 、 $z_3$  为 LESO 的状态变量;  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$  为待确定参数。当式中 LESO 被准确整定时,  $z_1$ 、 $z_2$ 、 $z_3$  将分别跟踪  $y$ 、 $\dot{y}$ 、 $f$ 。

图 1 中 LADRC 的控制率如下所示:

$$u_0 = k_p(r - z_1) - k_d z_2 \quad (2)$$

$$u = \frac{u_0 - z_3}{b_0} \quad (3)$$

综上, 由 Mason 公式能够给出图 1 所示系统的闭环传递函数:

$$G = \frac{G_p(s)k_p(s^3 + \beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3)}{b_0 A(s) + G_p(s)B(s)} \quad (4)$$

其中,

$$A(s) = s^3 + (\beta_1 + k_d)s^2 + (\beta_1 k_d + \beta_2 + k_p)s$$

$$B(s) = (\beta_1 k_p + \beta_2 k_d + \beta_3)s^2 + (\beta_2 k_p + \beta_3 k_d)s + \beta_3 k_p$$

由文献[22]可知, 式中

$$\beta_1 = 3\omega_0, \beta_2 = 3\omega_0^2, \beta_3 = \omega_0^3 \quad (5)$$

$$k_p = \omega_c^2, k_d = 2\omega_c \quad (6)$$

式中:  $\omega_c$  为控制器带宽;  $\omega_0$  为观测器带宽。

根据文献[16]可知,  $\omega_c$  与  $\omega_0$  存在如下的关系

$$\omega_0 = 3 \sim 10 \omega_c \quad (7)$$

这里我们令  $\omega_0 = 3 \omega_c$ , 所以综上所述可知, 图 1 所示 LADRC 控制器中只剩下两个待整定参数, 分别

是  $\omega_0$  和  $b_0$ 。为了使 LADRC 发挥良好控制效果, 本文提出 COSQPSO 优化算法, 为找出准确的 LADRC 参数提供了一种有效可行的方法。

### 3 COSQPSO 搜索算法

#### 3.1 QPSO 搜索算法

QPSO 是由 Sun 等人将粒子群算法(Particle Swarm Optimization, PSO)与量子理论相结合提出的<sup>[23]</sup>。与 PSO 算法相比, 由于量子理论的引入, 使得粒子可以在整个变量空间内进行搜索, 因此 QPSO 算法具有较强的全局搜索能力。

QPSO 算法的进化方程为:

$$mbest = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M pbest_i = \frac{1}{M} \left( \sum_{i=1}^M pbest_{i1}, \sum_{i=1}^M pbest_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^M pbest_{iDim} \right) \quad (8)$$

$$P = \varphi \times pbest + (1 - \varphi) \times gbest \quad (9)$$

$$X_{id}(t+1) = P \pm \beta \times |mbest_d - X_{id}(t)| \times \ln(1/u) \quad (10)$$

式(8)中,  $mbest$  是种群的平均最好位置点;  $M$  为种群中粒子的数目;  $Dim$  为粒子的维数;  $Pbest_{iDim}$  为每一维粒子所经历的最好位置。式(9)中,  $\varphi$  是 [0,1]上均匀分布的随机数;  $pbest$  和  $gbest$  分别表示个体粒子最优值和种群所有粒子中的最优值。式(10)中,  $\beta$  为取值在[0,1]之间缩放系数, 通过调整  $\beta$  可以控制收敛速度, 改善量子粒子群算法的全局搜索能力,  $\beta$  前的“±”号取“+”和“-”的概率各占 50%。一般的,  $\beta$  由式(11)确定:

$$\beta = 1 - \frac{t}{T} \times 0.5 \quad (11)$$

式中:  $T$  为最大迭代次数;  $t$  为当前迭代次数。

综上, 传统的 QPSO 算法流程如下所示:

- step 1: 初始化。确定搜索空间与各参数取值范围, 设定种群数目、最大迭代次数与初始粒子位置  $x$ ;
- step 2: 由种群中粒子初始位置计算出初始  $pbest$ 、 $gbest$ ;
- step 3: 根据式(8)~(9)分别计算出  $mbest$  和  $P$ ;

step 4: 将第 3 步计算出  $mbest$  和  $P$  代入到粒子更新公式当中, 求出新  $x$ ,  $pbest$  以及  $gbest$ ;

step 5: 重复运行上述步骤, 直到达到最大迭代次数或达到预期误差精度。

由公式(11)可知, 传统 QPSO 中的缩放系数与迭代次数的变化呈线性关系, 虽然在搜索初期可以满足全局快速搜索的需求; 但是在搜索后期当粒子处在最优值附近时, 由于缩放系数的变化速率是恒定的, 这就导致粒子无法放慢更新速度进行细致搜索。随着算法运行时间的增长, 搜索粒子有可能会越过最优值, 导致无法达到良好的寻优效果。因此面对这个问题, 需要对 QPSO 算法进行改进。

### 3.2 余弦递减函数

针对传统 QPSO 在迭代后期算法无法仔细搜索这一问题, 对其缩放系数与迭代次数的关系式进行改进, 具体形式如下所示:

$$\beta = 1 - \cos((1 - t/T)\pi/2) \quad (12)$$

式中:  $T$  为最大迭代次数;  $t$  为当前迭代次数。

与式(11)相比, 改进的缩放系数更新公式中, 缩放系数  $\beta$  与算法当前迭代次数  $t$  呈非线性关系。在算法运行前期,  $\beta$  呈非线性变化而快速收敛, 有利于全局搜索使粒子快速接近最优值; 随着  $t$  的增加,  $\beta$  的变化速率会明显减小, 这一改变有效的避免了粒子进化速度过快越过最优值的情况, 进而使粒子在最优值附近仔细搜索找到最优值。图 2 给出了式(11)与式(12)控制的缩放系数变化曲线的对比。

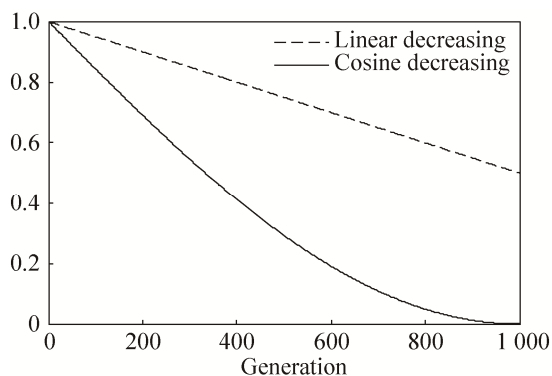


图 2 两种缩放系数控制策略对比

Fig. 2 Comparison of two control strategies for scaling coefficient

### 3.3 COSQPSO 搜索算法

由于 QPSO 的缩放系数变化率恒定, 导致算法寻优过程中容易越过最优值。针对这一问题, 本文提出 COSQPSO 优化算法。

对于优化问题, COSQPSO 的粒子更新公式如式(13)所示:

$$X_{id}(t+1) = P \pm [1 - \cos((1 - t/T)\pi/2)] \times |mbest_d - X_{id}(t)| \times \ln(1/u) \quad (13)$$

由式(13)可以看出, 在优化算法运行的过程中, 缩放系数随着  $t$  的增加而减小, 并且变化速率也逐渐变缓, 这样既保留了 QPSO 全局搜索的能力, 又克服了 QPSO 算法过快收敛而容易越过最优值的问题。

### 3.4 COSQPSO 计算复杂度分析

算法的计算复杂度包括空间复杂度和时间复杂度。空间复杂度是用来表示算法计算占用的系统存储空间的大小。本文算法利用余弦递减函数控制 QPSO 粒子更新公式当中的缩放系数, 改变了粒子更新的方式, 但是增加的复杂度是线性阶的。所以在低维条件下, 对存储空间的增加并不多。

一般地, 时间复杂度与算法运行过程中语句的执行次数有关。在最不理想的情况下, QPSO 的时间复杂度为  $O(t_{\max}nm^2)$  ( $t_{\max}$  为最大迭代次数,  $n$  为问题的维数,  $m$  为种群规模), 当引入余弦递减函数之后, 只是改变了常规迭代过程中缩放系数的计算方式, 并未增加迭代步骤。因此在算法复杂度上, 本文提出的算法与 QPSO 算法相同。

### 3.5 COSQPSO 实验性能测试

为了验证 COSQPSO 算法的有效性, 本文选择了 6 个标准测试函数, 这些函数已经被应用在许多优化算法的性能测试中<sup>[24]</sup>。本文采用的测试函数的维度、变量的容许范围和最优值汇总如表 2 所示。

在表 2 中, 除  $f_6$  为低维测试函数外, 其余均为高维测试函数,  $n$  代表函数的维数。  $f_1$ 、 $f_2$ 、 $f_3$  与  $f_5$  为单峰测试函数。  $f_4$  与  $f_6$  为多峰测试函数。将本文

算法与 PSO 算法、GSA 算法以及 QPSO 算法相比较。在相同的给定条件下, 比较四种算法求解最优值的能力, 最优值的平均值与理论值越接近, 说明算法求解的精度越高。

表 2 标准测试函数  
Tab. 2 Standard test functions

| 测试函数  | 搜索范围                      | 最优值   |
|---|---------------------------|-------|
| $f_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$   | $[-100, 100]^n$           | 0     |
| $f_2(x) = \max\{ x_i , 1 \leq i \leq n\}$   | $[-100, 100]^n$           | 0     |
| $f_3(x) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^i x_j^2 \right)^2$   | $[-100, 100]^n$           | 0     |
| $f_4(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$                            | $[-600, 600]^n$           | 0     |
| $f_5(x) = \sum_{i=1}^n ( x_i + 0.5 )^2$   | $[-100, 100]^n$           | 0     |
| $f_6(x) = \left( x_2 - \frac{5.1}{4\pi^2} + \frac{5}{\pi} x_1 - 6 \right)^2 + 10 \left( 1 - \frac{1}{8\pi} \right) \cos x_1 + 10$ | $[-5, 10] \times [0, 15]$ | 0.398 |

COSQPSO 参数设置: 种群规模均设置为 50, 即  $N=50$ 。多维函数的维数  $n$  设为 30, 最大迭代次数为 1 000, 对每个测试函数进行 30 次独立实验。对于其他系统, 算法设置相同。测试结果如表 3 所示, 其中 PSO 算法与 GSA 的计算结果由文献[25]给出。

表 3 4 种算法的实验结果比较  
Tab. 3 Comparison of the experimental results of 4 algorithms

| 函数    | PSO | GAS                   | QPSO                  | COSQPSO                |                        |
|-------|-----|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| $f_1$ | 平均值 | $1.80 \times 10^{-3}$ | $7.3 \times 10^{-11}$ | $5.59 \times 10^{-9}$  | $1.99 \times 10^{-1}$  |
|       | 中值  | $1.20 \times 10^{-3}$ | $7.1 \times 10^{-11}$ | $8.18 \times 10^{-9}$  | $2.20 \times 10^{-18}$ |
| $f_2$ | 平均值 | 8.100 0               | $3.70 \times 10^{-6}$ | $7.59 \times 10^{-7}$  | $1.13 \times 10^{-9}$  |
|       | 中值  | 7.400 0               | $3.70 \times 10^{-6}$ | $4.90 \times 10^{-8}$  | $1.01 \times 10^{-9}$  |
| $f_3$ | 平均值 | $4.10 \times 10^3$    | $0.16 \times 10^3$    | $5.23 \times 10^{-1}$  | $2.36 \times 10^{-1}$  |
|       | 中值  | $2.20 \times 10^3$    | $0.15 \times 10^3$    | $1.01 \times 10^{-14}$ | $3.11 \times 10^{-15}$ |
| $f_4$ | 平均值 | 0.010 0               | 0.290 0               | 0.010 4                | 0.008 1                |
|       | 中值  | 0.008 1               | 0.040 0               | 0.022 1                | 0.007 9                |
| $f_5$ | 平均值 | 1.639 5               | $7.0 \times 10^{-3}$  | $2.88 \times 10^{-3}$  | 0                      |
|       | 中值  | 1.520 1               | $6.4 \times 10^{-4}$  | $1.54 \times 10^{-33}$ | 0                      |
| $f_6$ | 平均值 | 0.397 9               | 0.397 9               | 0.397 9                | 0.397                  |
|       | 中值  | 0.397 9               | 0.397 9               | 0.397 9                | 0.397                  |

从表 3 中的实验结果可以看出, 应用本文算法对函数  $f_1$ 、 $f_2$  和  $f_5$  进行寻优, 最终结果无论是中值还是平均值, 在寻优精度上都明显高于 PSO、GSA 和 QPSO。对于函数  $f_3$  和  $f_4$ , COSQPSO 的精度与 QPSO 持平, 并明显优于 PSO、GSA。根据以上的实验结果分析, 表明本文提出的算法拥有良好的搜索能力和较为普遍的适用性。

## 4 仿真与实验

### 4.1 COSQPSO 算法参数设置

利用 COSQPSO 算法对三维分数阶混沌系统的 LADRC 控制器进行参数优化时, 考虑到控制器输出与系统误差, 本文采用综合型目标函数:

$$Q = \int_0^{t_s} [c_1 t |e(t)| + c_2 t |u(t)|] dt \quad (14)$$

式中:  $c_1$ ,  $c_2$  分别是误差和控制量在目标函数中的权值, 这里令  $c_1=c_2=0.5$ ;  $t_s$  为过渡过程时间;  $u(t)$  为控制器输出量;  $e(t)$  为输入量与系统的输出量之间的误差。

选取 COSQPSO 的最大迭代次数为 1 000, 种群规模为 50, 缩放系数控制式为  $\beta = 1 - \cos((1 - t/T)\pi/2)$ 。

### 4.2 分数阶 Lorenz 混沌系统

受控的分数阶 Lorenz 混沌系统

$$\begin{cases} D_t^{q_1} x = \sigma(y - x) + u_1 \\ D_t^{q_2} y = x(\rho - z) - y + u_2 \\ D_t^{q_3} z = xy - \beta z + u_3 \end{cases} \quad (15)$$

未加入控制量, 即  $u_1=u_2=u_3=0$  时, 选取参数  $\sigma=10$ ,  $\rho=28$ ,  $\beta=8/3$ , 分数阶阶次  $q_1=q_2=q_3=0.993$ , 此时系统处于混沌状态, 系统状态如图 3 所示。

分数阶 Lorenz 混沌系统的初始值为  $[x \ y \ z]^T = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$ , 其控制器参数如表 4 所示。当  $t=10$  s 时加入控制, 目标是使系统达到平衡点  $[0 \ 0 \ 0]^T$ 。当  $t=20$  s 时, 在状态变量  $y$  上加入幅值为 0.01 的扰动, 观察控制系统的抗扰性。控制效果如图 4 所示。

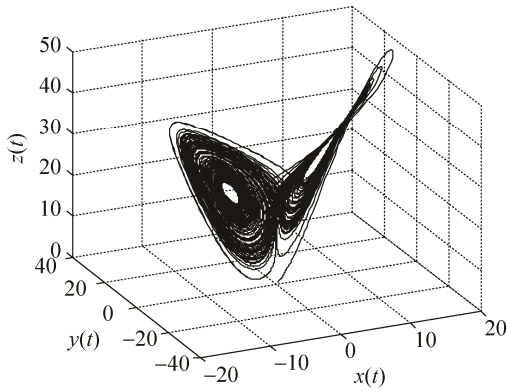


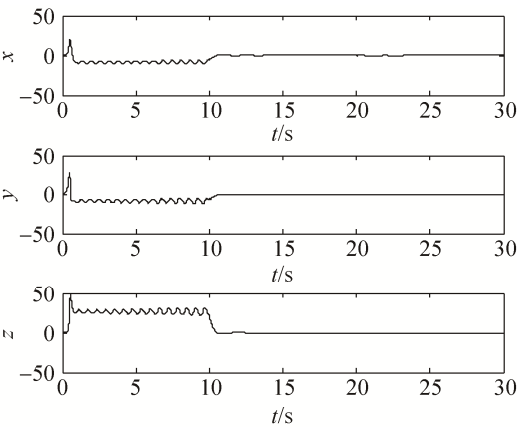
图 3 分数阶 Lorenz 系统状态

Fig. 3 States of fractional order Lorenz system

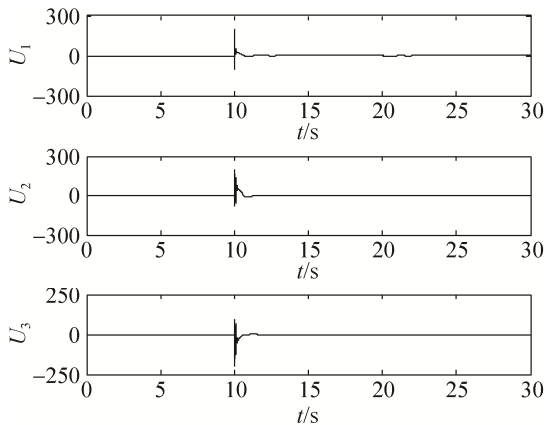
表 4 优化后的控制器参数

Tab. 4 Optimized controller parameters

| 控制器 1         |         | 控制器 2         |         | 控制器 3         |         |
|---------------|---------|---------------|---------|---------------|---------|
| $b_{01}$      | 4.014 5 | $b_{02}$      | 3.129 1 | $b_{03}$      | 4.254 6 |
| $\omega_{c1}$ | 8.556 1 | $\omega_{c2}$ | 9.215 8 | $\omega_{c3}$ | 10.012  |



(a) 系统输出



(b) 控制作用

图 4 分数阶 Lorenz 混沌系统的 LADRC 控制结果,

Fig. 4 Control result of LADRC for fractional order Lorenz chaotic system

由表 5 可以看出, 当系统加入控制量后, 三个状态均能够快速的稳定下来, 三个变量的调节时间均在 2s 以内, 基本达到了理想控制效果。当系统加入扰动后,  $x$ 、 $y$  状态的超调量只有 1% 左右,  $z$  状态的波动很小, 可忽略。综上, 基于 COSQPSO 的 LADRC 控制器可以对分数阶 Lorenz 混沌系统实现良好的控制效果。

表 5 分数阶 Lorenz 混沌系统仿真结果分析

Tab. 5 Analysis of simulation results of fractional order Lorenz chaotic system

| 加入控制量后 |       |       |        | 加入扰动后 |       |       |        |
|--------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|--------|
| 状态变量   | 超调量/% | 衰减率/% | 调节时间/s | 状态变量  | 超调量/% | 衰减率/% | 调节时间/s |
| $x$    | 19.52 | 99.21 | 1.45   | $x$   | 0.25  | 99.99 | 0      |
| $y$    | 72.50 | 98.21 | 1.95   | $y$   | 1.51  | 97.75 | 0      |
| $z$    | 65.11 | 99.88 | 1.40   | $z$   | -     | -     | 0      |

### 4.3 分数阶 Lü 混沌系统

受控的分数阶 Lü 混沌系统

$$\begin{cases} D_t^{q_1} x = a(y - x) + u_1 \\ D_t^{q_2} y = -xz + cy + u_2 \\ D_t^{q_3} z = xy - bz + u_3 \end{cases} \quad (16)$$

无控制器加入时, 选取参数  $[a, b, c] = [36, 3, 20]$ , 分数阶阶次  $[q_1, q_2, q_3]^T = [0.985, 0.99, 0.98]^T$ , 此时系统处于混沌状态<sup>[26]</sup>, 系统状态如图 5 所示。

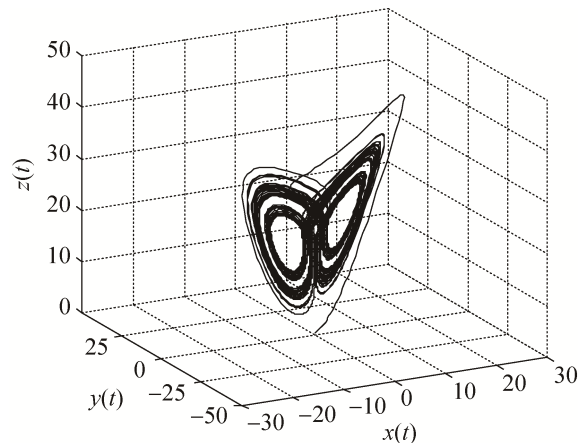


图 5 分数阶 Lü 混沌系统状态

Fig. 5 States of fractional order Lü system

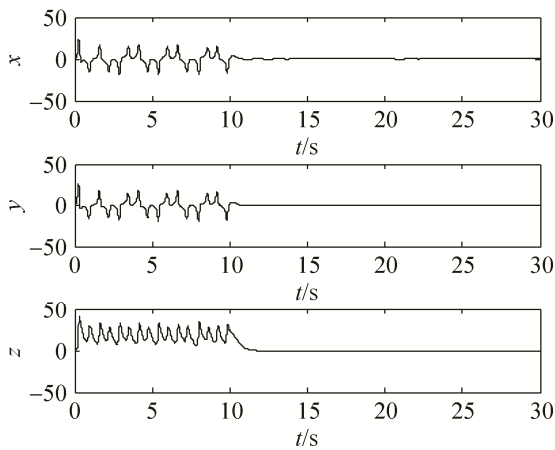
分数阶 Lü 混沌系统的初始值为  $[x, y, z]^T = [0.2$



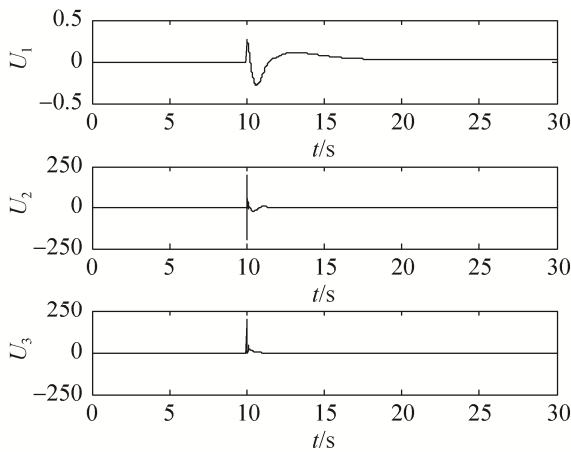
$0.5 \ 0.3]^T$ , 其控制器参数如表 6 所示。当  $t=10 \text{ s}$  时加入控制, 目标是使系统达到平衡点  $[0 \ 0 \ 0]^T$ 。当  $t=20 \text{ s}$  时, 在状态变量  $y$  上加入幅值为 0.02 的扰动, 观察控制系统的抗扰性。控制效果如图 6 所示。

表 6 优化后的控制器参数  
Tab. 6 Optimized controller parameters

| 控制器 1         | 控制器 2   | 控制器 3         |         |               |         |
|---------------|---------|---------------|---------|---------------|---------|
| $b_{01}$      | 0.311 7 | $b_{02}$      | 4.520 3 | $b_{03}$      | 5.668 4 |
| $\omega_{c1}$ | 0.107 3 | $\omega_{c2}$ | 10.001  | $\omega_{c3}$ | 5.380 6 |



(a) 系统输出



(b) 控制作用

图 6 分数阶 Lü 混沌系统的 LADRC 控制结果,  
Fig. 6 Control result of LADRC for fractional order Lü chaotic system

由表 7 可以看出, 当系统加入控制量后, 除了  $z$  状态的超调量小于 20%, 其余两个状态的超调量在 40%左右, 衰减率均保持在 90%以上, 调节时间在 2~3 s 之间。当系统加入扰动后, 3 个状态变

量产生的震荡几乎为零。所以, 针对分数阶 Lü 混沌系统, 基于 COSQPSO 的 LADRC 控制器虽然在调节能力上仍有待提高, 但是其抗扰能力是值得肯定的。

表 7 分数阶 Lü 混沌系统仿真结果分析

Tab. 7 Analysis of simulation results of fractional order Lü chaotic system

| 状态变量 | 加入控制量后 |       |        | 加入扰动后 |       |        |   |
|------|--------|-------|--------|-------|-------|--------|---|
|      | 超调量/%  | 衰减率/% | 调节时间/s | 超调量/% | 衰减率/% | 调节时间/s |   |
| $x$  | 41.10  | 91.48 | 2.03   | $x$   | 2.52  | 95.63  | 0 |
| $y$  | 41.05  | 90.74 | 2.15   | $y$   | 2.3   | 91.23  | 0 |
| $z$  | 18.21  | 98.56 | 3.18   | $z$   | -     | -      | 0 |

#### 4.4 分数阶 Rossler 混沌系统

受控的分数阶 Rossler 混沌系统

$$\begin{cases} D_t^{q_1} x = -y - z + u_1 \\ D_t^{q_2} y = x + ay + u_2 \\ D_t^{q_3} z = b + z(x - c) + u_3 \end{cases} \quad (17)$$

未加入控制量, 即  $u_1=u_2=u_3=0$  时, 选取参数  $a=0.5, b=0.2, c=10$ 。分数阶阶次  $q_1=0.9, q_2=0.85, q_3=0.95$ , 此时系统处于混沌状态<sup>[27]</sup>, 系统状态如图 7 所示。

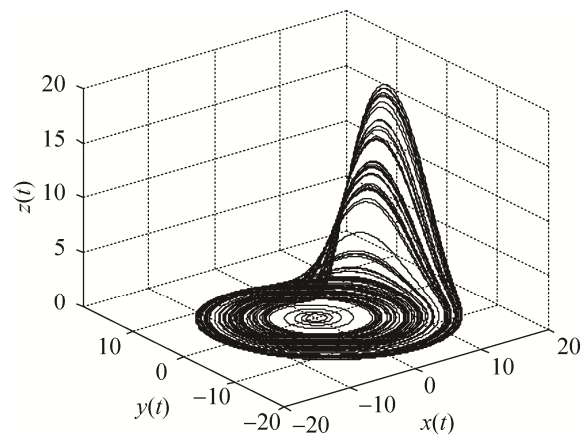


图 7 分数阶 Rossler 混沌系统状态

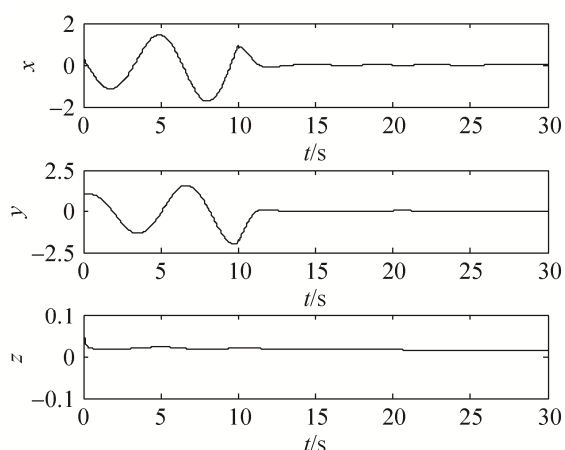
Fig. 7 States of fractional order Rossler system

分数阶 Rossler 混沌系统的初始值为  $[x \ y \ z]^T = [0.5 \ 1.5 \ 0.1]^T$ , 其控制器参数如表 8 所示。当  $t=10 \text{ s}$  时加入控制, 目标是使系统达到平衡点  $[0 \ 0$

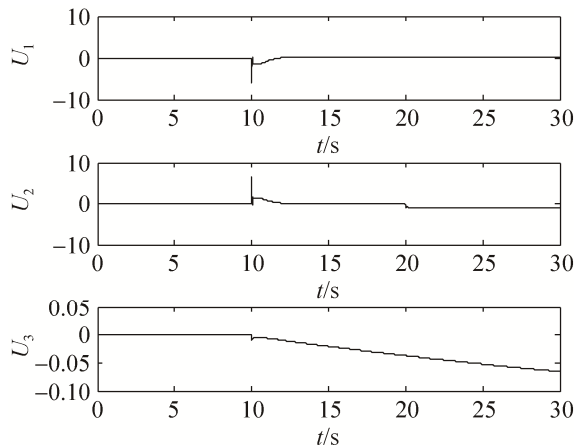
0]。当  $t=20$  s 时，在状态变量  $y$  上加入扰动，取值为  $\Delta y=0.02$ ，观察控制系统的抗扰性。控制效果如图 8 所示。

表 8 优化后的控制器参数  
Tab. 8 Optimized controller parameters

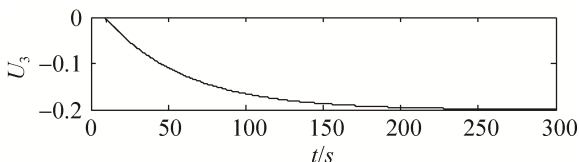
| 控制器 1         | 控制器 2   | 控制器 3         |         |               |         |
|---------------|---------|---------------|---------|---------------|---------|
| $b_{01}$      | 5.291 1 | $b_{02}$      | 5.778 4 | $b_{03}$      | 4.142 4 |
| $\omega_{c1}$ | 4.137 7 | $\omega_{c2}$ | 4.731 2 | $\omega_{c3}$ | 1.126 9 |



(a) 系统输出



(b) 控制作用



(c)  $U_3$  扩展图

图 8 分数阶 Rossler 混沌系统的 LADRC 控制结果  
Fig. 8 Control result of LADRC for fractional order Rossler chaotic system

由表 9 可以看出，当系统加入控制变量后， $x$ 、 $y$ 、 $z$  状态均能够在 3 s 以内收敛至平衡点，超调量较小。在系统加入扰动之后， $x$ 、 $y$ 、 $z$  3 个状态的波动很小，调节时间小于 1 s。综合来看，通过 COSQPSO 优化后的 LADRC 控制器能够对分数阶 Rossler 混沌系统实现良好的控制并具有较强的抗干扰能力。

表 9 分数阶 Rossler 混沌系统仿真结果分析  
Tab. 9 Analysis of simulation results of fractional order Rossler chaotic system

| 加入控制量后 |       |       |        | 加入扰动后 |       |       |        |
|--------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|--------|
| 状态变量   | 超调量/% | 衰减率/% | 调节时间/s | 状态变量  | 超调量/% | 衰减率/% | 调节时间/s |
| $x$    | 11.5  | 99.55 | 2.82   | $x$   | 1.12  | 92.41 | 0      |
| $y$    | 10.3  | 99.76 | 2.51   | $y$   | 9.6   | 99.74 | 1.13   |
| $z$    | -     | -     | 0 s    | $z$   | -     | -     | 0      |

限于篇幅，以上只给出了 3 种三维分数阶混沌系统的 LADRC 控制仿真结果。实际上，作者还对其他三维分数阶混沌系统进行了仿真实验，例如分数阶 Chen 混沌系统、分数阶 Liu 混沌系统、分数阶 New-Leipnik 混沌系统以及分数阶 Lotka-Volterra 混沌系统，将他们从某一初始条件控制到特定点。实验结果显示，利用 COSQPSO 算法进行参数寻优后的 LADRC 可以将多数三维分数阶混沌系统控制到稳定状态，具有调节时间短、超调量小、抗干扰能力强以及没有稳态误差等优点。

## 5 结论

LADRC 控制器参数的整定通常依赖于经验或反复试验获取，十分低效而且繁琐。本文提出了 COSQPSO 算法并用于 LADRC 的参数优化，此算法利用余弦递减函数控制 QPSO 算法粒子更新公式中的缩放系数，使缩放系数随着优化算法的运行而快速收敛，增强了传统 QPSO 的局部搜索能力，解决了传统 QPSO 算法运行后期容易越过最优值的问题。仿真结果表明：优化后的 LADRC 能够在多个三维分数阶混沌系统的控制中取得良好的效果并具有较强的抗干扰能力。

## 参考文献:

- [1] Wang H H, Sun K H, He S B. Characteristic Analysis and DSP Realization of Fractional-Order Simplified Lorenz System Based on Adomian Decomposition Method[J]. *International Journal of Bifurcation & Chaos* (S0218-1274), 2015, 25(6): 1550085.
- [2] Guo Z, Yang J, Zhao Y. Double image multi-encryption algorithm based on fractional chaotic time series[J]. *Open Mathematics* (S2391-5455), 2015, 13(1): 868-876.
- [3] 薛薇, 徐进康, 贾红艳. 一个分数阶超混沌系统同步及其保密通信研究[J]. *系统仿真学报*, 2016, 28(8): 1915-1921.  
Xue Wei, Xu Jinkang, Jia Hongyan. Study of Synchronization for Fractional-order Hyperchaotic System and Its Application in Secure Communication [J]. *Journal of System Simulation*, 2016, 28(8): 1915-1921.
- [4] 黄宇, 刘玉峰, 彭志敏, 等. 基于量子并行粒子群优化算法的分数阶混沌系统参数估计[J]. *物理学报*, 2015, 64(3): 228-235.  
Huang Yu, Liu Yufeng, Peng Zhimin, et al. Research on particle swarm optimization algorithm with characteristic of quantum parallel and its application in parameter estimation for fractional-order chaotic systems[J]. *Acta Phys Sin*, 2015, 64(3): 228-235.
- [5] 李特, 袁建宝, 吴莹. 一类不确定分数阶混沌系统同步的自适应滑模控制方法[J]. *动力学与控制学报*, 2017, 15(2): 110-118.  
Li Te, Yuan Jianbao, Wu Ying. A method of adaptive sliding mode control for synchronization of one class of uncertain fractional-order chaotic system[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(2): 110-118.
- [6] Shahri E S A, Alfi A, Machado J A T. Stabilization of Fractional-order Systems Subject to Saturation Element Using Fractional Dynamic Output Feedback Sliding Mode Control[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* (S1555-1423), 2017, 12(3): 031014-031020.
- [7] Soukkou A, Boukabou A, Leulmi S. Prediction-based feedback control and synchronization algorithm of fractional-order chaotic systems[J]. *Nonlinear Dynamics* (S0924-090X), 2016, 85(4): 1-24.
- [8] Hammouch Z, Mekkaoui T. Control of a new chaotic fractional-order system using Mittag-Leffler stability[J]. *International Journal of Impact Engineering* (S0734-743X), 2015, 87: 44-54.
- [9] 仲启龙, 邵永晖, 郑永爱. 分数阶混沌系统的主动滑模同步[J]. *动力学与控制学报*, 2015(1): 18-22.  
Zhong Qilong, Shao Yonghui, Zheng Yongai. Active sliding mode synchronization of fractional order chaotic systems[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2015(1): 18-22.
- [10] 李宁, 李亚光, 王宏兴, 等. 分数阶永磁同步电机混沌系统模糊跟踪控制[J]. *信息与控制*, 2016, 45(1): 8-13.  
Li Ning, Li Yaguang, Wang Hongxing, et al. Fuzzy Tracking Control for Fractional-order Permanent Magnet Synchronous Motor Chaotic System[J]. *Information and Control*, 2016, 45(1): 8-13.
- [11] Sun L, Dong J Y, Li D H, et al. A Practical Multivariable Control Approach Based on Inverted Decoupling and Decentralized Active Disturbance Rejection Control[J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research* (S0888-5885), 2016, 55(7): 847-866.
- [12] 张园, 孙明玮, 陈增强. 强制循环蒸发系统线性自抗扰解耦控制的鲁棒设计[J]. *化工学报*, 2015, 66(增 2): 263-270.  
Zhang Yuan, Sun Mingwei, Chen Zengqiang. Robust design of linear active disturbance rejection decoupling control for forced-circulation evaporation system[J]. *CIESC Journal*, 2015, 66(S2): 263-270.
- [13] Morales R, Sira-Ramírez H, Somolinos J A. Linear active disturbance rejection control of the hovercraft vessel model[J]. *Ocean Engineering* (S0029-8018), 2015, 96(12): 100-108.
- [14] 董君依, 孙立, 李东海. 球磨机制粉系统的线性自抗扰控制[J]. *工程科学学报*, 2015, 37(4): 509-516.  
Dong Junyi, Sun Li, Li Donghai. Linear active disturbance rejection control for ball mill coal-pulverizing systems[J]. *Chinese Journal of Engineering*, 2015, 37(4): 509-516.
- [15] 曾岳南, 周斌, 郑雷, 等. 永磁同步电机一阶线性自抗扰控制器的设计[J]. *控制工程*, 2017, 24(9): 1818-1822.  
Zeng Yuenan, Zhou Bin, Zheng Lei, et al. Design of 1<sup>st</sup>-order Linear Active Disturbance Rejection Controller for PMSMs[J]. *Control Engineering of China*, 2017, 24(9): 1818-1822.
- [16] Lu J H, Savaghebi M, Guerrero J M, et al. Linear active disturbance rejection control for LCL type grid-connected converter[C]. *IECON 2016, Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. New York: IEEE, 2016: 3458-3463.
- [17] Tan W, Fu C F. Linear Active Disturbance-Rejection Control: Analysis and Tuning via IMC[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* (S0278-0046), 2016, 63(4): 2350-2359.
- [18] 谢伟, 游敏, 周玉钦. 基于自适应分数阶微分的引导

- 滤波及其应用[J]. 计算机应用研究, 2017, 34(1): 283-286.
- Xie Wei, You Min, Zhou Yuqin. Guided image filter and application based on adaptive fractional-order differential[J]. 2017, 34(1): 283-286.
- [19] 张玮玮, 吴然超. 基于线性控制的分数阶混沌系统的对偶投影同步[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(7): 710-717.
- Zhang Weiwei, Wu Ranchao. Dual Projective Synchronization of Fractional-Order Chaotic Systems with a Linear Controller[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2016, 37(7): 710-717.
- [20] Borah M, Roy B K. An enhanced multi-wing fractional-order chaotic system with coexisting attractors and switching hybrid synchronisation with its nonautonomous counterpart[J]. Chaos Solitons & Fractals (S0960-0779), 2017, 102: 372-386.
- [21] 孙立, 董君伊, 李东海, 等. 基于扩张状态观测器的汽轮机功频电液串级控制[J]. 中国电机工程学报, 2015, 35(7): 1697-1703.
- Sun Li, Dong Junyi, Li Donghai, et al. Cascaded Load-frequency Digital Electric-hydraulic Regulation of Turbine via Extended State Observer[J]. Proceedings of the Chinese Society for Electrical Engineering, 2015, 35(7): 1697-1703.
- [22] 黄宇, 王佳荣. 水轮机调速系统的线性自抗扰优化控制[J]. 系统仿真学报, 2016, 28(12): 3033-3040.
- Huang Yu, Wang Jiarong. Optimized Linear Active Disturbance Rejection Controller Design for Hydraulic Turbine Governing Systems[J]. Journal of System Simulation, 2016, 28(12): 3033-3040.
- [23] Xu X Z, Shan D, Wang G Y, et al. Multimodal medical image fusion using PCNN optimized by the QPSO algorithm[J]. Applied Soft Computing (S1568-4946), 2016, 46: 588-595.
- [24] 王凌, 钱斌. 混合差分进化与调度算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- Wang Ling, Qian Bin. Hybrid differential evolution and scheduling algorithm[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2012.
- [25] Rashedi E, Nezamabadi-Pour H, Saryazdi S. GSA: a gravitational search algorithm[J]. Information sciences (S0020-0255), 2009, 179(13): 2232-2248.
- [26] 张志明, 张一帆, 王瑜. 基于分数阶控制器的分数阶混沌系统同步[J]. 兰州理工大学学报, 2016, 42(4): 152-158.
- Zhang Zhiming, Zhang Yifan, Wang Yu. Synchronization of fractional-order chaotic system with fractional-order controller[J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2016, 42(4): 152-158.
- [27] Dar M R, Kant N A, Khanday F A. Realization of Integrable Incommensurate-Fractional-Order-Rössler-System Design Using Operational Transconductance Amplifiers (OTAs) and Its Experimental Verification[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos (S0218-1274), 2017, 27(5): 1750077.