

12-12-2019

HPC-based Virtual Flight Test Method for Multidisciplinary Multiphysical Field Coupling

Tie Ming

Key Laboratory of Space Physics, Beijing 100076, China;

Yu Ying

Key Laboratory of Space Physics, Beijing 100076, China;

Zhang Xing

Key Laboratory of Space Physics, Beijing 100076, China;

Jianlin Wang

Key Laboratory of Space Physics, Beijing 100076, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

HPC-based Virtual Flight Test Method for Multidisciplinary Multiphysical Field Coupling

Abstract

Abstract: Multidisciplinary simulation based on virtual flight system testbed (FST) will become an alternative way for the overall performance validation of near space hypersonic vehicles (HSV). The complexity of multi-physical field coupled modeling and simulation challenges the accuracy and efficiency of virtual experiment. Therefore, a multi-physical-field coupling simulation model is established. The architecture of HPC-FST is explicitly expounded for large-scale parallel multidisciplinary virtual flight tests and multi-physics coupling simulation of whole vehicle. Moreover, *an integration algorithm is developed for heterogeneous CAE models in collaborative simulation. A HPC based parallel virtual flight test method* with a task-level and algorithm-level hybrid large-scale parallel simulation technology is developed for whole flight envelope simulation, and *a large-scale parallel simulation algorithm* is proposed for efficient simulation of aerodynamic flow field. Based on the supercomputer, HPC-FST is a *high efficient platform for overall performance validation of HSV*, which will reduce development cost as well as improve integrated design capability.

Keywords

virtual flight system testbed, near space vehicle, multi-physical coupling, high performance computing, overall performance

Recommended Citation

Tie Ming, Yu Ying, Zhang Xing, Wang Jianlin. HPC-based Virtual Flight Test Method for Multidisciplinary Multiphysical Field Coupling[J]. Journal of System Simulation, 2019, 31(9): 1733-1740.

基于 HPC 的多学科多物理场耦合虚拟飞行试验方法

铁鸣, 于盈, 张星, 王建林

(空间物理重点实验室, 北京 100076)

摘要: 虚拟飞行试验是临近空间飞行器总体性能验证补充手段。多物理场耦合建模仿真的复杂性对虚拟试验精度和效率都形成挑战, 已成为系统仿真领域的一个经典问题。基于此, 建立了多物理场耦合仿真模型, 提出多物理场耦合的高效并行仿真架构和多专业异构 CAE 模型协同运行方法, 研究了任务级、算法级混合大规模并行仿真技术, 构建了基于高性能计算机 (High performance computer, HPC) 的虚拟飞行试验系统 (Flight system testbed, FST), 显著提高了虚拟飞行试验效率, 对飞行器总体设计水平的提升具有重要意义。

关键词: 虚拟飞行试验系统; 临近空间飞行器; 多物理场耦合; 高性能计算; 总体性能

中文分类号: V411.8

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2019) 09-1733-08

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.19-0406

HPC-based Virtual Flight Test Method for Multidisciplinary Multiphysical Field Coupling

Tie Ming, Yu Ying, Zhang Xing, Wang Jianlin

(Key Laboratory of Space Physics, Beijing 100076, China)

Abstract: Multidisciplinary simulation based on virtual flight system testbed (FST) will become an alternative way for the overall performance validation of near space hypersonic vehicles (HSV). The complexity of multi-physical field coupled modeling and simulation challenges the accuracy and efficiency of virtual experiment. Therefore, a multi-physical-field coupling simulation model is established. The architecture of HPC-FST is explicitly expounded for large-scale parallel multidisciplinary virtual flight tests and multi-physics coupling simulation of whole vehicle. Moreover, an integration algorithm is developed for heterogeneous CAE models in collaborative simulation. A HPC based parallel virtual flight test method with a task-level and algorithm-level hybrid large-scale parallel simulation technology is developed for whole flight envelope simulation, and a large-scale parallel simulation algorithm is proposed for efficient simulation of aerodynamic flow field. Based on the supercomputer, HPC-FST is a high efficient platform for overall performance validation of HSV, which will reduce development cost as well as improve integrated design capability.

Keywords: virtual flight system testbed; near space vehicle; multi-physical coupling; high performance computing; overall performance

引言

临近空间飞行器长时间在大气层内高速飞



收稿日期: 2019-07-31 修回日期: 2019-08-03;
基金项目: 国家自然科学基金(61773068), 国家重点
研发计划(2018YFB1701600);
作者简介: 铁鸣(1976-), 男, 回族, 辽宁沈阳, 博士,
研究员, 研究方向为复杂系统建模与仿真、智能建模
与优化。

行, 各系统、物理场产生复杂的交联耦合关系^[1-2], 地面试验条件无法真实模拟, 其总体性能的多物理场耦合仿真验证问题成为国际军事强国的研究重点。同时, 国内靶场条件难以实现全程飞行试验, 而且有限发数的飞行试验需要验证大空域、宽速域的飞行包络内的典型状态下飞行性能。全流程、大子样、多学科多物理场耦合的总体性能

<http://www.china-simulation.com>

• 1733 •

虚拟飞行试验是解决上述问题的重要技术途径。从航天企业未来发展来看,飞行试验和大型地面试验成本很高,适宜对特定状态进行验证,同时也由于试验本身的技术局限性,存在更多难以得到考核验证的高超声速飞行状态。多学科耦合的飞行性能验证主要是考核飞行器总体设计方案、各分系统及单机设计的匹配性、总体参数正确性。从探路者号火星探测器到各种类型的导弹、飞行器,美国国家航空航天局(NASA)通过飞行系统验证平台(Flight System Testbed, FST)与仿真器(Spacecraft Simulator, SPASIM)以虚拟飞行验证作为弥补飞行试验的主要技术途径,带来了可观的经济、军事效益^[3]。但是,由于临近空间飞行器控制-气动-热-结构耦合效应极为复杂^[4],仿真模拟效率极低,难以满足总体性能验证评估需求,成为亟待解决的技术难题。

高性能计算机和大规模并行仿真技术的发展,在航天器的计算分析与仿真领域应用效果显著^[5-7],为大子样、全剖面的临近空间飞行器多学科耦合仿真模拟提供了有效的技术支撑。本文基于超级并行计算环境建立了多学科多物理场耦合虚拟飞行试验系统,针对临近空间飞行器飞行环境偏差大、工况多,突破已有仿真试验方法,开展多级并行仿真技术研究,实现高效、自动化的大规模全程、全剖面、大子样的虚拟飞行试验,解决了总体性能多物理场耦合仿真验证的难题。

1 多学科多物理场耦合虚拟飞行试验系统

1.1 多物理场耦合仿真模型

临近空间飞行器的多物理场耦合主要源于高超声速流对结构表面的气动压力和流体运动产生气动热(由于速度的下降以及摩擦)。气动压力作用在飞行器表面上会引起飞行器的变形和运动,飞行器的变形和运动作为流场的边界条件,反过来会影响气动流场的特性,从而使气动表面压力以及气动热环境发生改变^[8-9]。

多物理场的耦合分析无法建立一个统一的动力学模型,目前常见的做法是基于各个学科控制方程,利用其输入输出且具有物理意义的边界条件将多个动力学模型联系起来,实现时域耦合数值求解。因而耦合求解的精度一方面取决于各个独立学科动力学模型和数值计算的精度,另一方面取决于耦合求解格式和数据交换的方法精度。利用CFD(计算流体力学)/CTD(计算传热学)/CSD(计算结构动力学)/CFM(计算飞行动力学)的时域耦合方法来计算耦合效应是一种可取的方法,如图1所示。

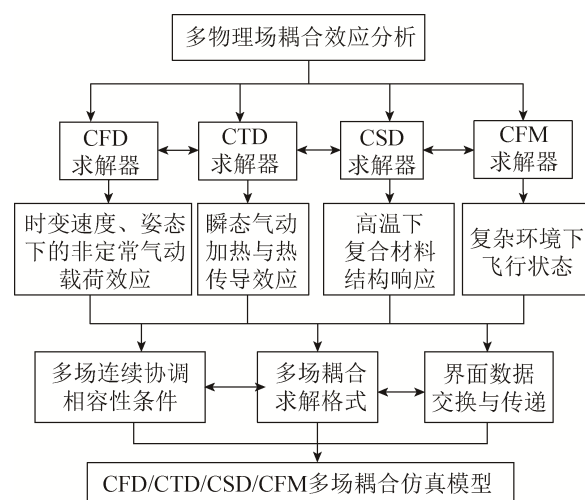


图1 临近空间飞行器多物理场耦合仿真模型
Fig. 1 Multi-physical coupling model for near space vehicles

临近空间飞行器多学科、多物理场耦合仿真模型主要针对控制系统及弹体运动、气动流场、结构应力场、结构温度场之间的耦合特性进行描述。其中,气动流场仿真建模又分为气动表面压力仿真建模和气动热环境仿真建模,结构应力场仿真建模以结构强度的应力、应变计算为主,结构温度场的仿真建模暨热载荷仿真模型,实现弹体的温度场和烧蚀特性的仿真解算。在临近空间飞行器多领域耦合仿真模型中,气动流场(气动力、热环境仿真模型)、固体温度场(热载荷仿真模型、烧蚀仿真模型)、固体应力场(结构强度仿真模型)之间存在的耦合信息映射分表面网格数据映射和体网格数据映射两大类,分别对应耦合界面为表面变量和耦合界面为体变量 2 种情况^[10]。临近空间飞行器多领域耦合

仿真流程仍以飞行航迹仿真的时序为主线, 牵引气动、热环境、热防护、结构强度等模型的仿真解算。热环境模型根据飞行器运动参数、气动表面压力, 解算飞行器表面热环境, 并输出冷壁热流给热防护模型。热防护模型根据冷壁热流计算弹体表面温度以及热场数据并输出给结构强度模型。结构强度模型根据弹体表面压力、表面温度以及热场数据计算飞行器结构应力、形变情况。

1.2 多物理场耦合虚拟飞行试验系统

如图 2 所示, 临近空间飞行器多学科多物理场耦合虚拟飞行试验系统主要以多物理场耦合仿真子系统为核心, 基于全包络海量分析状态的多专业耦合超大规模高效并行仿真子系统通过数以百万计的全程飞行试验获得的结果分析选取部分飞行状态, 开展多物理场耦合的虚拟飞行试验。

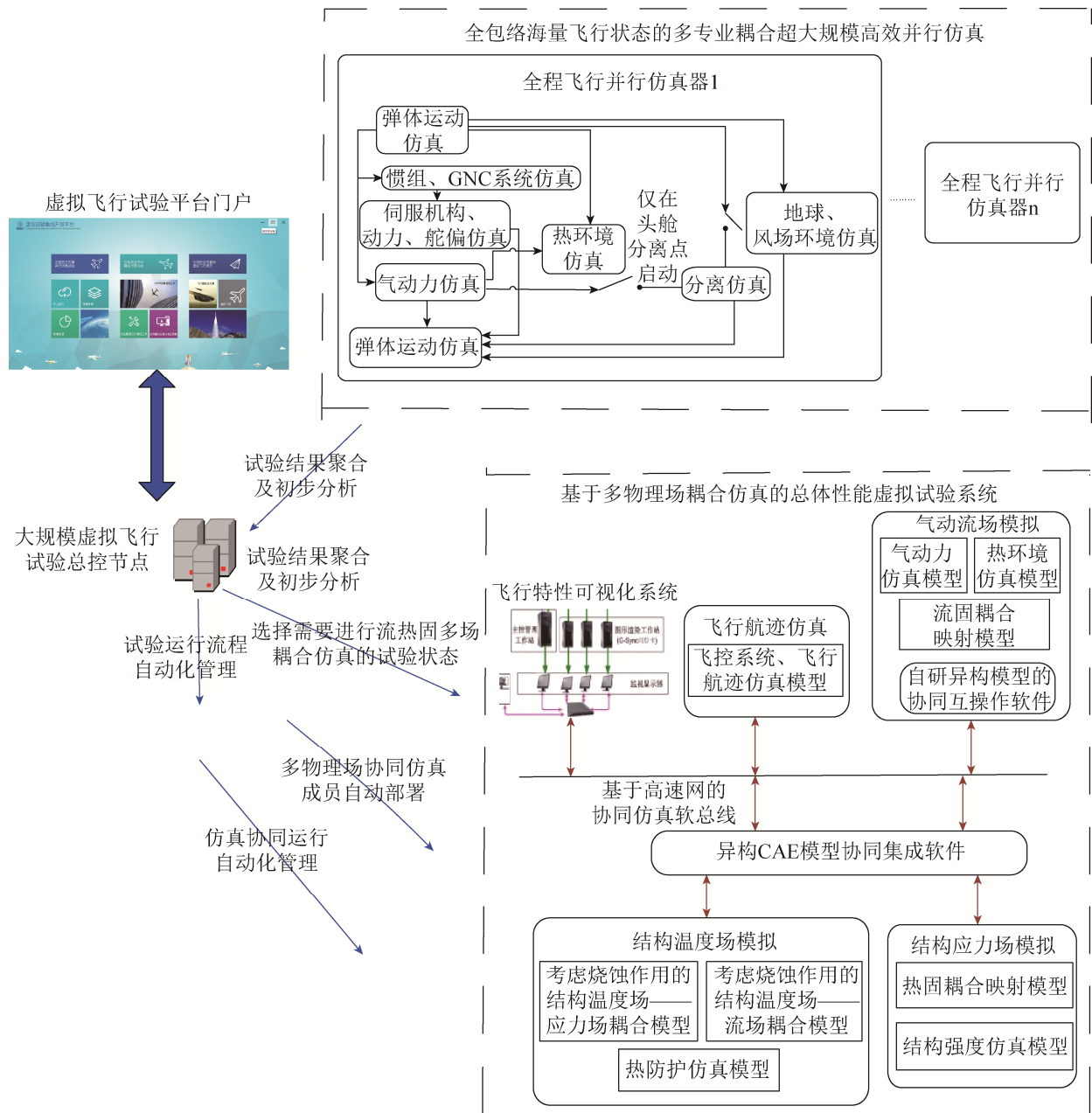


图 2 临近空间飞行器多学科多物理场耦合虚拟飞行试验系统
Fig. 2 Multidisciplinary and multi-physical coupling flight system testbed for near space vehicles

基于多物理场耦合仿真的虚拟飞行试验子系统主要包括飞行航迹仿真、气动流场模拟、结构温度场模拟和应力场模拟。各领域模型需要进行二次建模或仿真建模，研制飞行特性多学科一体化仿真的耦合接口，为集成相关的多学科异构仿真模型，需要研制协同适配器，并进行各学科仿真模型的封装、集成，并实现与底层互操作支撑软件无缝链接。

大规模虚拟飞行试验总控节点负责对大规模并行仿真试验结果聚合及初步分析，并进行虚拟飞行试验的运行流程自动化管理。基于多物理场耦合仿真的虚拟飞行试验子系统主要包括飞行航迹仿真、气动流场模拟、结构温度场模拟和应力场模拟。各领域模型需要进行二次建模或仿真建模，研制飞行特性多学科一体化仿真的耦合接口，为集成相关的多学科异构仿真模型，需要研制协同适配器，并进行各学科仿真模型的封装、集成，并实现与底层互操作支撑软件无缝链接。

2 虚拟飞行试验的多物理场协同建模仿真方法

多学科多物理场耦合的虚拟飞行试验系统中多学科模型种类多，接口复杂，特别是结构温度场、应力位移场及结构烧蚀模型通常是基于异构 CAE 算法^[11]。需要解决如何兼容各类异构学科模型，并通过协同仿真适配器进行各学科模型的封装、集成，实现与底层互操作支撑软件无缝链接，完成其相应的各项服务，以满足异构协同计算的要求。协同适配器可以将学科模型的内部变量映射为仿真联邦成员的对外数据接口，定义标准操作接口，封装不同学科模型的技术细节。

如图 3 所示，临近空间飞行器的热防护仿真模型和结构强度仿真模型需要异构 CAE 工具的求解器参与协同仿真计算，其协同适配器包括核心服务模块、管理模块、协同交互模块 3 部分。核心服务模块，提供仿真分析的参数输入和结果输出的管道，并实现对求解器的解算控制。管理模块，提供仿真的引擎启动、模型载入等外围功能。

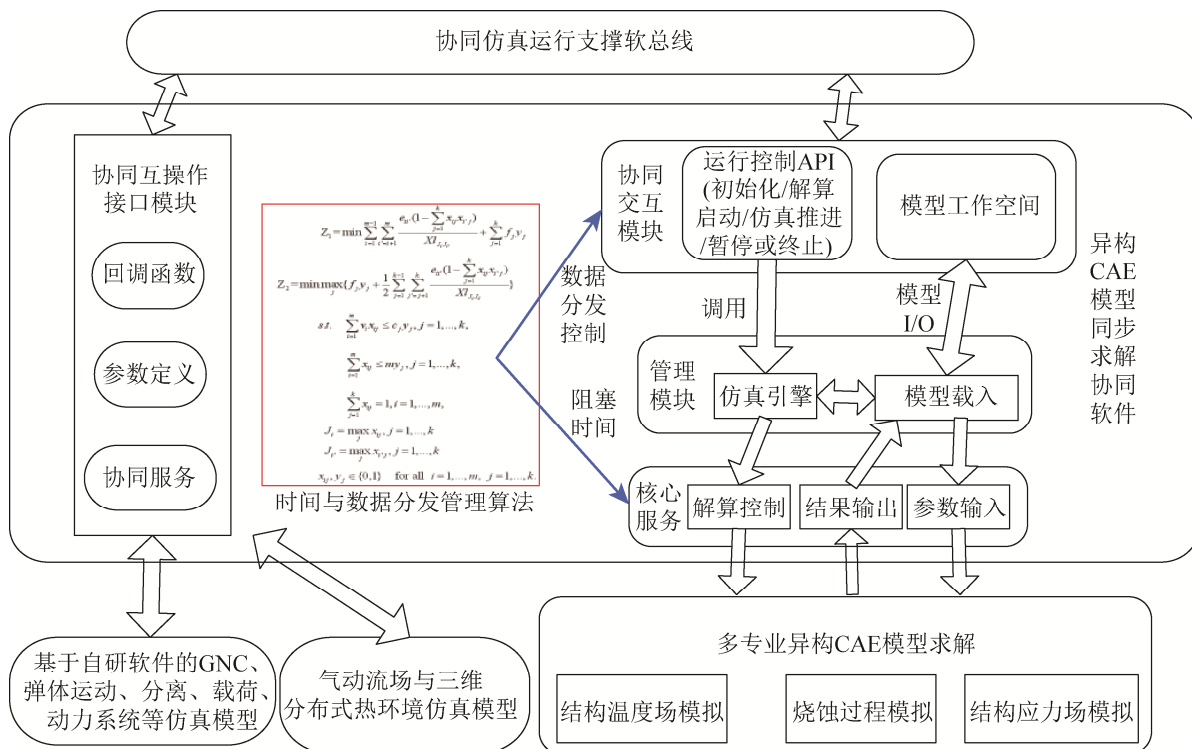


图 3 异构 CAE 模型同步仿真求解的协同建模方法
Fig. 3 Collaborative algorithm for heterogeneous CAE models

协同交互模块包括与协同仿真软总线打交道的内存中的模型工作空间和运行控制 API 接口, 运行控制 API 提供的功能包括: 仿真运行的初始化、模型解算启动、仿真的推进和暂停或终止。提供直接针对用户的模型解算与针对仿真引擎的协同解算两类功能。前者由用户提交模型给工具引擎, 然后设置输入参数后, 启动解算引擎, 获取最终输出结果, 后者实现模型的单步解算和状态存储, 以便在各设计工具进行协同仿真时, 在模型解算的每一个周期都能进行数据交互。从内部接口进行封装, 即通过学科软件提供的内部接口程序完成仿真推进、输入输出等操作, 通过仿真引擎内部来驱动外部主控程序进行推进。

3 虚拟飞行试验系统的混合大规模并行仿真方法

以图 1 所示的多学科、多物理场耦合仿真模型开展全剖面、大子样的虚拟飞行试验, 需要解决流场、温度场、应力场的繁复计算效率低下问题, 同时, 也要兼顾如何实现大规模、多状态并行试验的自动化模型部署、试验管理、数据管理问题。暨需要研究算法级大规模并行建模仿真技术的同时, 兼顾任务级大规模并行仿真试验技术。

3.1 任务级大规模并行仿真试验方法

开展大规模并行仿真试验, 是基于高性能计算系统中的多学科耦合仿真试验, 各专业模型间通过高性能协同仿真支撑软件进行数据通讯和交互控制, 制定了统一的接口标准, 各专业模型做到最大限度的独立性, 有利于专业的分工与人力资源的合理投入。任务级大规模并行仿真试验方法, 如图 4 所示, 结合高性能协同仿真协议与进程间通讯协议, 共同构建了一套实用的试验运行自动管理系统, 在进行百万以上量级蒙特卡洛打靶试验过程中, 能显著提高工作效率, 增加系统的稳定性。

为了提高仿真精度和充分考查设计结果的合理性和裕度, 针对临近空间飞行器的每轮设计结

果, 都要进行数个偏差组合状态下的几十万条乃至几百万条模拟打靶试验, 产生的大批量的试验数据需要进行详细的统计和分析。传统的试验数据统计方式一般是利用第三方商业软件如 Origin 等以人工的方式进行开展。该方式难以适用于在数据量剧增(几十万乃至上百万组弹道及偏差状态的数据), 严重影响仿真效率。

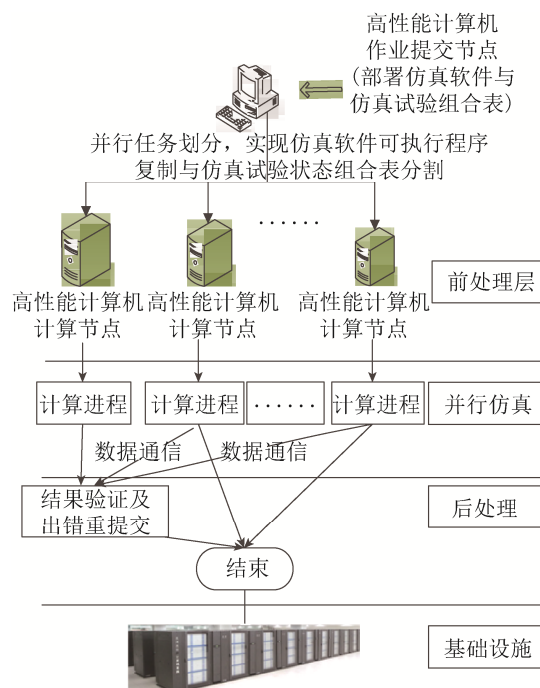


图 4 任务级大规模并行仿真试验方法

Fig. 4 Task-level large-scale parallel simulation approach

针对上述问题, 提出了一种临近空间飞行器大规模仿真试验数据统计方法, 该方法具有适用性强、简单易用、配置灵活等特点, 它通过对数据规模进行预判、动态分段和多批次排序等处理方式, 解决了大批量仿真试验数据统计时商业软件存在的数据无法完全加载、统计速度缓慢甚至软件卡死等问题, 提高了数据统计效率。

大规模仿真试验数据统计方法的基本思路为: 动态分割、逐段加载、多次排序, 具体为: 在每次进行数据统计前, 先对数据规模(试验结果文件中数据的行数)进行预判, 然后根据预判结果将数据分割为几段, 每次加载一段数据并进行数据排序, 最后挑选出每段数据中的最大、最小值

并进行最终的排序, 此次排序结果中的最大最小值(可能有多)即为本次试验数据的最终统计结果。

对这种处理方式的统计效率进行分析如下:

在不分段的情况下, 按最坏的情况考虑, 对于 n 个数据的排序需要进行的比较次数为:
 $1+2+\dots+n-1=0.5n(n-1)$ 。

将数据分为 k 段时, 按最坏的情况考虑, 对于每段 n/k 个数据的排序需要进行的比较次数为:
 $1+2+\dots+n/k-1=0.5n/k(n/k-1)$, 最后一次排序需要进行的比较次数为 $1+2+\dots+k-1=0.5k(k-1)$, 所以在该方式下数据一共需要进行的比较次数为:
 $0.5k \cdot n/k(n/k-1) + 0.5k(k-1) = 0.5n(n/k-1) + 0.5k(k-1)$ 。

在数据量较小时, $k=1$, 此时 2 种方式的统计效率是一致的。

在大批量数据时, $0.5n(n/k-1) + 0.5k(k-1) \approx 0.5n(n/k-1) < 0.5n(n-1)$, 显然分段方式的比较次数小于不分段的情况, 而且 n 越大, 分段方式的统计效率越高。

3.2 算法级大规模并行建模仿真方法

算法级大规模并行建模仿真方法, 主要针对 CFD/CSD 并行数值模拟问题。通常包括输入、预处理、通量计算、时间积分、后处理、输出、数

据传输、流程控制等功能^[12-14]。图 5 给出了并行仿真应用框架结构的基本构成。

由于 CFD/CSD 中大规模、超大规模计算问题对计算时间和精度上的需求, 并行化的实现过程中其大体思路可以描述为: 首先将网格重剖分, 将网格划分为更多, 网格点数量更平均的分区, 以进一步降低计算规模, 提高负载均衡; 采用 MPI 和 OPENMP 结合方式实现两级并行; 各子进程分别存储本区域内相关网格信息, 同时也需要存储相邻区域边界信息以及重叠网格计算所需要的节点映射关系和节点信息, 然后将各个分区的计算过程分别对应于不同进程进行计算即可, 各进程间计算负载的不均衡性还可进一步通过分配不同数量的并行线程加以改善。

图 6 所示的基于 MPI 的分区间进程级并行计算方法属于进程级粗粒度并行计算方法, 这种方法通过 MPI 进程通信原语实现“单程序多数据”(SPMD)方式的任务并发, 将相同的指令集作用于数据集所有元素, 将大的计算区域分解成若干个子区域, 然后在每个子区分别求解流体力学基本方程(欧拉方程、N-S 方程), 而边界耦合条件的构造是多分区并行计算的关键。

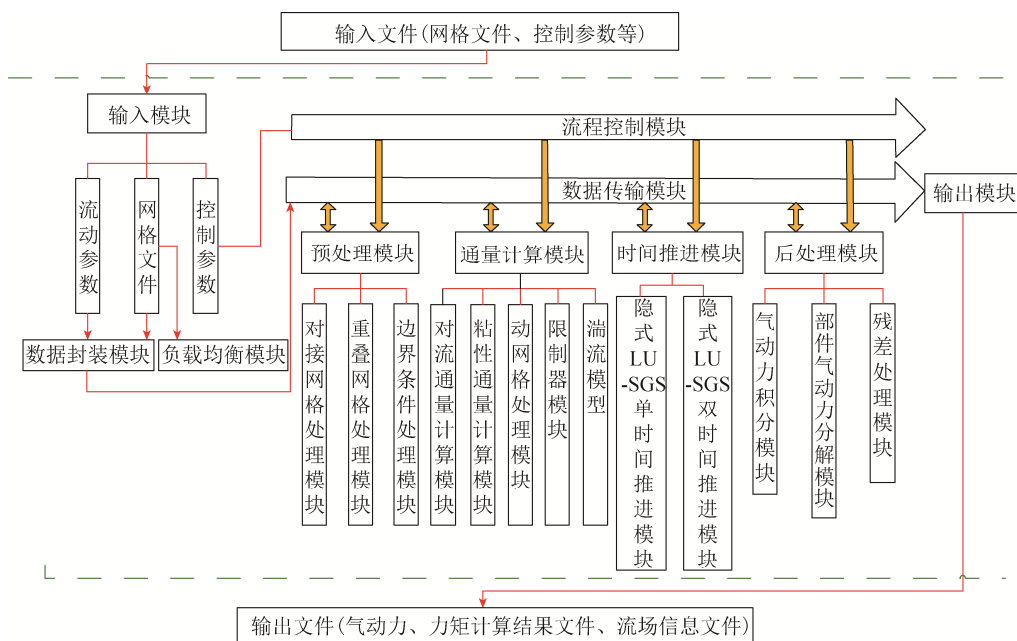


图 5 算法级并行仿真框架

Fig. 5 Parallel simulation framework of algorithm level

<http://www.china-simulation.com>

• 1738 •

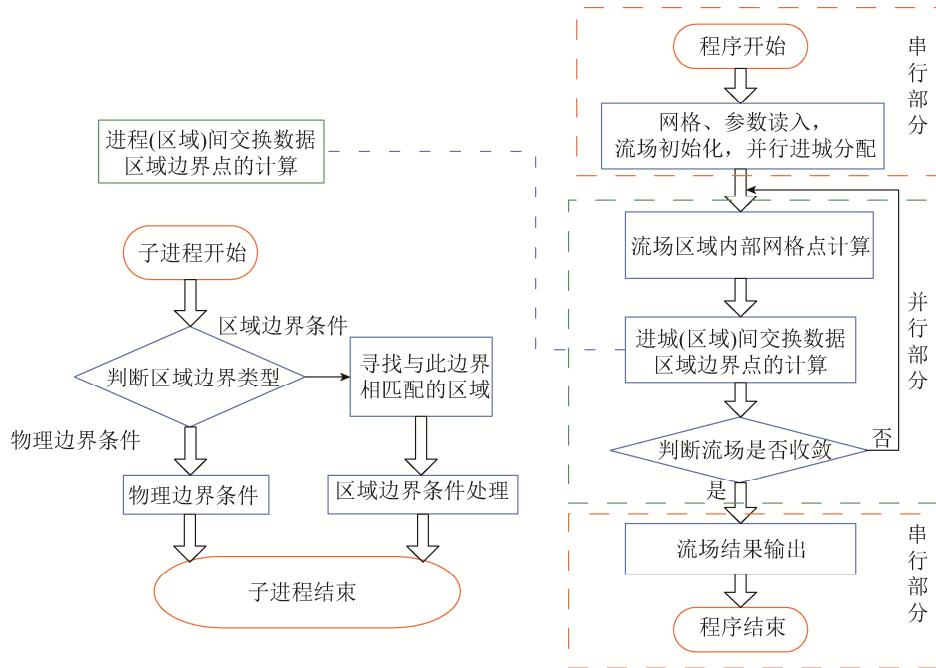


图 6 基于 MPI 的分区间进程级并行计算方法原理
Fig. 6 Theory of MPI partition based process level parallel computing

耦合条件定义在内边界点上, 一般从相邻区域的内点进行插值获得。由于主要采用隐式格式计算(收敛效率高), 因此在此的边界耦合条件定义仅针对隐式格式进行描述。为方便起见, 以一维 3 点格式的简化模型来说明问题。将流体力学基本方程写成:

$$W_t + f(w)_x = 0, t \in R^+, -A < x < B$$

这里 W 是守恒变量, $f(w)$ 是通量函数。为求解上述连续初边值条件 (IBVP), 将区域分解成 2 个子域: $D_u = (-A, b)$, $D_v = (-a, B)$, $-a \leq b$ 。若 $-a=b$, 则该计算域为对接网格, 左边区域的数值解用符号 $u_j^n (j=0, -1, -2, \dots)$ 标记, 右边区域的解用符号 $v_j^n (j=0, -1, -2, \dots)$ 标记。记 h_u, h_v 为区域 D_u, D_v 中的网格大小。在左右两区中, 差分格式 (这里限三点格式) 可分别写为:

$$\Delta u_j^n = -\sigma_u (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n), j=0, -1, -2, \dots,$$

$$\Delta v_j^n = -\sigma_v (g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n), j=0, 1, 2, \dots,$$

这里 $\sigma_u = k/h_u, \sigma_v = k/h_v$, k 为时间步长, $f_{j+1/2}^n$ 与 $g_{j+1/2}^n$ 为左右子区中相应于函数 $f(w)$ 的数值通量, $\Delta u_j^n = u_j^{n+1} - u_j^n, \Delta v_j^n = v_j^{n+1} - v_j^n$, 这样内边界点 $j=0$ 的值 u_0^{n+1} 和 v_0^{n+1} 的定义即为耦合条件。

由于隐式格式的数值通量计算数值通量涉及 $n+1$ 时刻的值, 从而需要定义 $n+1$ 时刻的耦合条件。如果将耦合条件定义为:

$$u_0^{n+1} = v_1^{n+1}, v_0^{n+1} = u_{-1}^{n+1}$$

则各区无法独立求解, 因为在求解之前, v_1^{n+1} 和 u_{-1}^{n+1} 是未知的, 不能用未知的值来定义边界条件。实际上隐式格式主要用来求定常问题, 关心的是时间收敛后的解, 从而时间精度并不重要。因此, 采用的方式是使用时间滞后耦合条件。

$$u_0^{n+1} = v_1^n, v_0^{n+1} = u_{-1}^n$$

这样各区之间就解耦了, 当时间迭代收敛后, 则接收相邻区域流场数据, 并发送当前区域的边界信息, 以保证区域间的迭代相匹配, 这种滞后就不会带来误差。

4 结论

地面/飞行试验与大子样虚拟飞行试验相结合的飞行器性能鉴定、评估方法是武器装备未来发展的必然趋势。高性能计算机和并行仿真技术的融合, 是改进虚拟飞行试验系统质量、提升试验效率的必由之路。本文提供了一种有效的基于

HPC 的多学科、多物理场耦合虚拟飞行试验方法及试验系统, 为新型飞行器总体性能仿真验证和鉴定评估提供了一条新的技术途径, 取得了显著的军事、社会和经济效益, 具有广阔的应用前景, 不仅对航天领域武器型号的传统验证模式形成有力的补充, 也牵引带动了国内虚拟试验验证技术的整体提升, 对飞行器总体设计能力的提升和研制周期的缩短都具有促进作用。

参考文献:

- [1] Pezzella G. Hypersonic environment assessment of the CIRA FTB-X reentry vehicle[J]. *Aerospace Science and Technology* (S1270-9638), 2013, 25(1): 190-202.
- [2] Tao X, Li N, Li S. Multiple model predictive control for large envelope flight of hypersonic vehicle systems [J]. *Information Sciences* (S0020-0255), 2016, 328(1): 115-126.
- [3] Conway E. Simulation and spacecraft design: engineering Mars landings[J]. *Technology and Culture* (S0040-165X), 2015, 56(4): 812-838.
- [4] Sockalingam S, Tabiei A. Fluid/thermal/chemical non-equilibrium simulation of hypersonic reentry vehicle[J]. *International Journal of Multiphysics* (S1750-9548), 2009, 3(3): 293-306.
- [5] Li Z, Jiang X, Wu J. Study on high performance parallel algorithm for spacecraft re-entry aerodynamics in the whole of flow regimes using Boltzman model equation[J]. *Chinese Journal of Computers* (S0254-4164), 2016, 39(9): 1801-1811.
- [6] Frezzotti A, Ghiroldi G, Gibelli L. Solving the Boltzmann equation on GPUs[J]. *Computer Physics Communications* (S0010-4655), 2011, 182(1): 2445-2453.
- [7] Brown P, Woods C, McIntosh S, et al. A massively multicore parallelization of the Kohn-Sham energy gradients[J]. *Journal of Computational Chemistry* (S0192-8651), 2010, 31(10): 2008-2013.
- [8] McNamara J, Friedmann P. Aeroelastic and aerothermoelastic analysis in hypersonic flow: Past, present, and future[J]. *AIAA Journal* (S0001-1452), 2011, 49(6): 1089-1121.
- [9] Zhang S, Chen F, Liu H. Time-adaptive, loosely coupled strategy for conjugate heat transfer problems in hypersonic flows[J]. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* (S0887-8722), 2014, 28(4): 635-646.
- [10] 铁鸣, 吴旭生, 毕敬, 等. 高超声速飞行器总体性能虚拟飞行试验验证系统[J]. *系统工程与电子技术*, 2013, 35(9): 2004-2010.
Tie Ming, Wu Xusheng, Bi Jing, et al. Virtual flight test system for overall performance of hypersonic vehicles[J]. *System engineering and Electronics*, 2013, 35(9): 2004-2010.
- [11] Cicirelli F, Furfaro A, Giodano A, et al. HLA_ACTOR_REPAST: An approach to distributing RePast models for high- performance simulations[J]. *Simulation Modelling Practice and Theory* (S1569-190X), 2011, 19(1): 283-300.
- [12] Zhang S, Yuan R, Wu Y. Implementation and efficiency analysis of parallel computation using OpenACC: a case study using flow field simulations[J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics* (S1061-8562), 2016, 30(1): 79-88.
- [13] Tian S, Wu Y, Xia J. Numerical simulation of unsteady flow field around helicopter in forward flight using a parallel dynamic overset unstructured grids method[J]. *Modern Physics Letters B* (S0217-9849), 2009, 23(3): 325-328.
- [14] Lei J, Wang X, Xie G. High performance computation of a jet in crossflow by Lattice Boltzmann based parallel direct numerical simulation[J]. *Mathematical Problems in Engineering* (S1024-123X), 2015, 956827: 1-11. DOI: 10.1155/2015/956827.