

12-12-2019

Flow Stability of Hunt Flow under Low-intensity Magnetic Field

Dong Shuai

School of Energy Power and Mechanical Engineering, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;

Li Shuang

School of Energy Power and Mechanical Engineering, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;

Xuemin Ye

School of Energy Power and Mechanical Engineering, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research](#), [Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Flow Stability of Hunt Flow under Low-intensity Magnetic Field

Abstract

Abstract: The stability of conducting fluid flow in ducts under magnetic field is vital to materials preparation and the design and operation of thermonuclear fusion cooling system. *A model of MHD duct flow which is known as Hunt's flow is simulated by non-normal mode stability analysis in this study. The amplification and distribution of optimal primary perturbations are obtained by solving iteratively the direct and adjoint governing equations with respect of the perturbation variables. Four modes of perturbations with different symmetries in the space are considered, and the effect of the low-intensity magnetic field is also taken into account.* The results show that, when the Hartmann number Ha is small, the perturbations in the form of different modes exhibit transient growth. By contrast, when Ha is large, these perturbations behave differently: the perturbations in the form of mode I, III and IV grow transiently; the perturbations of mode II grows exponentially, meanwhile, the flow stability is related to jets.

Keywords

Hunt's flow, stability, non-normal mode, transient growth, exponential growth

Recommended Citation

Dong Shuai, Li Shuang, Ye Xuemin. Flow Stability of Hunt Flow under Low-intensity Magnetic Field[J]. Journal of System Simulation, 2019, 31(8): 1605-1616.

低强度磁场作用下 Hunt 流的稳定性分析

董帅, 李爽, 叶学民

(华北电力大学能源动力与机械工程学院, 河北 保定 071003)

摘要: 矩形管道内导电流体在磁场作用下的流动稳定性对材料的制备、热核聚变冷却系统的设计和运行均有重要意义。采用非正则模态稳定性分析方法, 对 Hunt 流进行了数值模拟, 获得了 4 种模态下初始扰动的增长特征及空间分布, 分析了低强度磁场对流动稳定性的影响。结果表明, 哈特曼数 Ha 较小时, 4 种模态下的扰动均呈瞬态增长; Ha 较大时, 4 种模态下的扰动出现两种增长模式: 类型为模态 I、III、IV 的扰动仍呈瞬态增长, 模态 II 的扰动呈指数增长, 此时流场稳定性与射流有关。

关键词: Hunt 流; 稳定性; 非正则模态; 瞬态增长; 指数增长

中图分类号: O361.5 文献标识码: A 文章编号: 1004-731X (2019) 08-1605-12

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.17-0301

Flow Stability of Hunt Flow under Low-intensity Magnetic Field

Dong Shuai, Li Shuang, Ye Xuemin

(School of Energy Power and Mechanical Engineering, North China Electric Power University, Baoding 071003, China)

Abstract: The stability of conducting fluid flow in ducts under magnetic field is vital to materials preparation and the design and operation of thermonuclear fusion cooling system. A model of MHD duct flow which is known as Hunt's flow is simulated by non-normal mode stability analysis in this study. The amplification and distribution of optimal primary perturbations are obtained by solving iteratively the direct and adjoint governing equations with respect of the perturbation variables. Four modes of perturbations with different symmetries in the space are considered, and the effect of the low-intensity magnetic field is also taken into account. The results show that, when the Hartmann number Ha is small, the perturbations in the form of different modes exhibit transient growth. By contrast, when Ha is large, these perturbations behave differently: the perturbations in the form of mode I, III and IV grow transiently; the perturbations of mode II grows exponentially, meanwhile, the flow stability is related to jets.

Keywords: Hunt's flow; stability; non-normal mode; transient growth; exponential growth

引言

导电流体在磁场中运动会产生感生电流, 该电流与磁场相互作用产生洛伦兹力, 从而改变流场速度分布^[1], 进而影响管道的换热效率及安全性。



收稿日期: 2017-06-29 修回日期: 2017-11-26;
基金项目: 国家自然科学基金(11302076), 河北省自然科学基金(A2014502047), 中央高校基本科研业务费专项资金资助(2018MS100);
作者简介: 董帅(1982-), 男, 河北辛集, 博士, 讲师, 研究方向为磁流体力学及流动稳定性分析等。

20 世纪 30 年代, Hartmann 等对液态金属汞在磁场作用下流动特性的实验研究被认为是磁流体力学学科的开端, 随后该类流动问题引起广泛关注。材料制备过程中的非接触式电磁控制^[2], 电磁搅拌^[3]、热核聚变冷却系统的设计和制造^[4]等都需要通过磁场来控制导电流体的流动。其中, 矩形管道内导电流体在磁场作用下的流动稳定性在这些实际生产中都有重要应用。

导电流体在矩形管道中的流动会形成两类边

界层—垂直于磁场的哈特曼边界层和平行于磁场的侧边界层^[5], 这两类边界层靠近的壁面分别称为哈特曼壁和侧壁。20 世纪 50 年代, Shercliff^[5]在 Hartmann 等的基础上研究了法向磁场作用下导电流体在壁面绝缘矩形管道内的流动特性, 推导了磁流体力学方程, 得到了二维充分发展流动的速度分布。Hunt^[6]研究了法向磁场作用下哈特曼壁导电、侧壁绝缘的二维充分发展流动, 发现在靠近侧壁处形成两股射流, 该流动随后被称为 Hunt 流。随后, Branover^[7]和 Müller 等^[8]发现, 壁面导电率也是影响导电流体在中流动稳定性的主要因素之一。

近年来, 国内外学者对壁面导电率不同的矩形管道内流动稳定性开展了较多的研究。Biau 等^[9]研究了无磁场作用下方管中流动的稳定性及其转换过程, 发现最优初始扰动为流向漩涡, 而诱发转换的则是初始能量更低的行波。Krasnov 等^[10]采用非正则模态稳定性分析方法研究了壁面绝缘矩形管道流动的稳定性, 他们发现, 在磁场强度较大时, 扰动由于受到磁场的抑制, 主要以流向漩涡形式分布在侧边界层内, 并不受管道截面宽高比的影响。Priede 等采用正则模态方法分析了 Hunt 流^[11]、壁面导电^[12]以及壁面导电率为有限值^[13]的情况下, 导电流体在方形管道内的流动稳定性, 发现随磁场强度增加, 在侧壁附近会出现两股射流, 且射流厚度不断变薄, 并分别获得了临界雷诺数 Re_c 、临界流向波数 α_c 与哈特曼数 Ha 间的渐近关系式。为进一步探究射流稳定性的物理机制, 刘婵等^[14]采用正则模态方法, 对法向磁场作用下导电流体在侧壁导电率不同、哈特曼壁完全导电方形管道中的流动稳定性进行了分析, 发现哈特曼数 Ha 变化时, 流动中存在 2 种不稳定的流动状态。

综上所述, 学者们大多采用正则模态分析方法或者非正则模态分析方法, 研究导电流体在矩形管道内的流动稳定性问题。需要指出的是, 正则模态方法侧重于考察初始扰动的指数增长(或衰减), 分析相应的波数及其增长率与流场参数

(Re 、 Ha)等的关系, 获得临界曲线分布。该方法仅适用于扰动控制方程的特征解为正交的流动稳定性问题, 如热对流、泰勒-库埃特流等。而在处理与本文类似的扰动控制方程的特征解是非正交的情况时, 采用上述方法得到的临界参数值往往高于实验结果^[15], 非正则模态方法的预测结果则与之较为接近^[16]。这是因为, 采用非正则模态分析方法可以考察非正交的初始扰动之间的相互作用, 在短时间内形成几何增长(瞬态增长)^[17], 从而导致主流失稳。然而, 目前尚未报道过采用非正则模态方法研究 Hunt 流的流动稳定性。因此, 本文采用非正则模态稳定性分析方法和数值模拟, 对低磁场强度下 Hunt 流的流动稳定性进行研究, 重点考察扰动的增长倍数及其空间分布, 以及哈特曼数、波数对流动稳定性的影响, 探究磁场影响导电流体的流动稳定性机理。

1 物理模型与数值方法

1.1 物理模型

本文的研究对象为 Hunt 流, 即外置稳恒均匀的法向磁场作用下, 不可压缩导电流体(液态金属、电解质)在哈特曼壁导电、侧壁绝缘的方形管道中的流动。该流动的物理模型如图 1 所示。其中, 管道截面边长为 d , 外置磁场强度为 $\mathbf{B}=B_0\mathbf{e}$, $\mathbf{e}=(0,0,1)$, 流体的密度、运动粘度和导电率分别为 ρ , ν 和 σ , x 方向为流向方向, y 方向为展向方向, z 方向为法向方向。管道内的流动由压力梯度驱动, 且体积流量保持为定值。

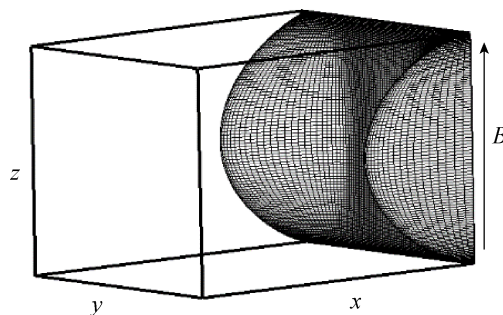


图 1 Hunt 流的流动示意图

Fig. 1 Flow schematic diagram of Hunt flow

1.2 控制方程组

本文针对低磁雷诺数下导电流体的流动, 即只考虑外界磁场对流场的作用, 而忽略流场对磁场的影响, 无量纲控制方程组和边界条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \\ \frac{Ha^2}{Re} (-\nabla \phi \times \mathbf{e} + (\mathbf{u} \times \mathbf{e}) \times \mathbf{e}) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{e}) \\ y = \pm 1, u = v = w = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ z = \pm 1, u = v = w = \phi = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{u}$ 为速度矢量, u, v, w 分别为 x, y, z 上的速度; ϕ, p 分别为电势、压力; L, U_0 分别为物理模型的特征长度、特征速度; 其中 $L=d/2, U_0$ 为流场中的最大速度, 磁场强度特征值为 B_0 , 相应的电势特征值为 $\sigma U_0 B_0$, 时间和压力的特征值分别为 L/U_0 和 ρU_0^2 。同时, 式中有两个重要的无量纲参数: 即, 雷诺数 $Re=LU_0/\nu$, 表征惯性力和粘性力的相对大小; 哈特曼数 $Ha=B_0 L(\sigma/\rho\nu)^{1/2}$, 表征洛伦兹力和粘性力的相对大小。

1.3 线性分析

将控制方程组的解分解为基本流和扰动, 则流场中的物理量可表示为:

$$\begin{cases} u = U(y, z, t) + u_p \\ v = V(y, z, t) + v_p \\ w = W(y, z, t) + w_p \\ p = P(y, z, t) + p_p \\ \phi = \Phi(y, z, t) + \phi_p \end{cases} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1), 联立基本流的控制方程组, 并进行线性化处理, 得到关于扰动的线性方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} + (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}_p = -\nabla p_p + \\ \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}_p + \frac{Ha^2}{Re} (-\nabla \phi_p \times \mathbf{e} + (\mathbf{u}_p \times \mathbf{e}) \times \mathbf{e}) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_p = 0 \\ \nabla^2 \phi_p = \nabla \cdot (\mathbf{u}_p \times \mathbf{e}) \\ y = \pm 1, u_p = v_p = w_p = \frac{\partial \phi_p}{\partial y} = 0 \\ z = \pm 1, u_p = v_p = w_p = \phi_p = 0 \end{cases} \quad (3)$$

为考察扰动的增长情况及其空间分布, 采用非正则模态稳定性分析方法^[18-20], 则扰动项可展开成如下形式:

$$\begin{aligned} (u_p, v_p, w_p, \phi_p, p_p) &= (\hat{u}(y, z, t), \hat{v}(y, z, t), \\ &\hat{w}(y, z, t), \hat{\phi}(y, z, t), \hat{p}(y, z, t)) \exp(i\alpha x) \end{aligned} \quad (4)$$

式中: α 为流向波数。为定量描述扰动的增长情况, 选取变量 $E(t)$ 用于表示扰动动能随时间的变化:

$$E(t) = \int (\hat{u}\hat{u}^* + \hat{v}\hat{v}^* + \hat{w}\hat{w}^*) dydz \quad (5)$$

式中: 上标“*”代表变量的共轭复数。初始扰动的增长或衰减倍数用下式表示:

$$G \equiv \frac{E(T)}{E(0)} \quad (6)$$

式中: T 为所要考察的时刻; 0 为初始时刻; G 为扰动增长倍数。

为获得 G 的最大值及其相应的最优扰动, 采用拉格朗日乘子法^[17,21-24]求解, 即引入原扰动场的伴随场, 通过在时间上循环迭代求解原始扰动变量和伴随扰动变量分别满足的控制方程组, 直至求解过程收敛, 以获取 G 的极值与对应的最优初始扰动分布。具体求解过程如图 2 所示, 图中顶标“^”代表原始扰动变量场, 顶标“~”代表伴随扰动变量。

$$\begin{array}{ccc} \hat{u}(y, z, 0) & \rightarrow & \hat{u}(y, z, T) \\ \uparrow & & \downarrow \\ \tilde{u}(y, z, 0) & \leftarrow & \tilde{u}(y, z, T) \end{array}$$

图 2 循环迭代
Fig. 2 Cyclic iteration

当雷诺数 Re 和哈特曼数 Ha 为定值时, 某一初始扰动会在某一特定流向波数 α 、时刻 t 下, 得到

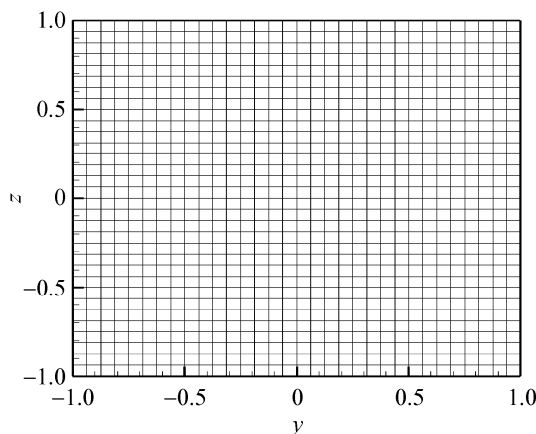
所有扰动增长倍数 G 的最大值, 即最优扰动增长倍数 $G_{\max}$, 对应的流向波数、时刻分别称为最优流向波数 α_{opt} 、最优时刻 t_{opt} 。本文对 $Re=5\ 000$, $Ha=0, 5, 8, 10, 15, 20$ 时, 初始扰动的增长分别进行计算。由于基本流在管道截面是对称分布的, 扰动的分布也具有不同的对称性, 本文参考 Tatsumi^[25] 以及 Uhlmann 等^[26] 的分类方法, 将扰动分为 4 种模式: 模式 I(o, e)、模式 II(o, o)、模式 III(e, e)、模式 IV(e, o), “ o ”代表变量关于坐标轴奇对称, “ e ”代表变量关于坐标轴偶对称, 具体参见表 1。

表 1 模式不同时扰动速度分量关于 y, z 轴的对称类型
Tab. 1 Symmetry type of the velocity component of different modes in the Y and Z axis

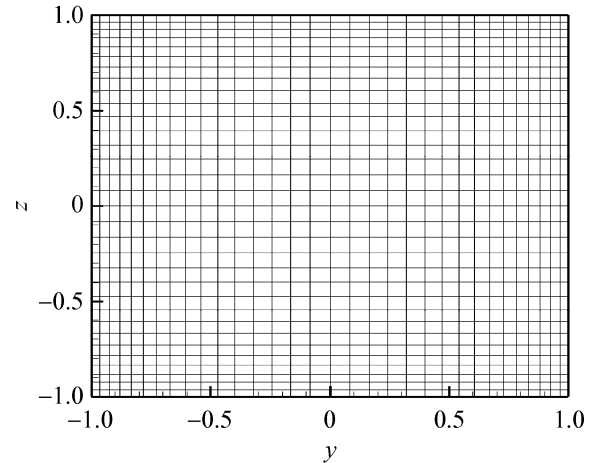
模式	I	II	III	IV
流向速度 $\hat{u}$	(o, e)	(o, o)	(e, e)	(e, o)
展向速度 $\hat{v}$	(e, e)	(e, o)	(o, e)	(o, o)
法向速度 $\hat{w}$	(o, o)	(o, e)	(e, o)	(e, e)

1.4 网格分布与程序验证

本文采用二阶有限差分方法^[23]求解关于扰动的无量纲控制方程组。为了更好地求解流场结构, 采用正交化的非均匀网格, 在近壁面处布置较多的网格节点, 从而可以更好的求解近边界层内的流场结构, 如图 3 所示。先进行网格无关性验证, 在哈特曼数 Ha 较小时, 采用较少的网格节点(80×80)即可精确求解流场结构, 随哈特曼数增加, 边界层厚度变薄, 需相应增加网格节点个数以及减少时间步长来提高计算精度。



(a) 均匀网格



(b) 非均匀网格

图 3 网格节点分布示意图

Fig. 3 Sketch map of grid node distribution

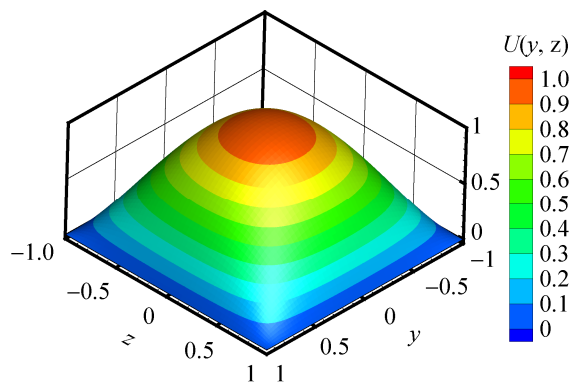
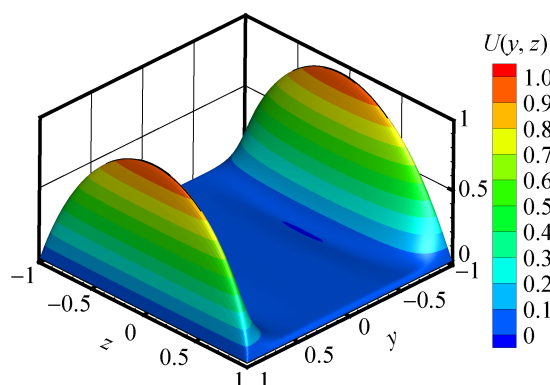
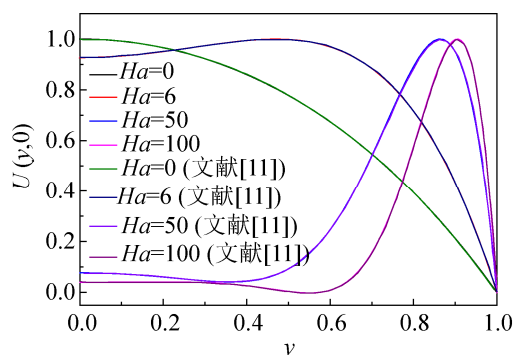
2 结果分析与讨论

2.1 主流速度分布

图 4 为雷诺数 $Re=5\ 000$ 时, $Ha=0, 6, 50, 100$ 时方形管道内 Hunt 流的速度分布。当 $Ha=0$ 时, 即不存在磁场作用时, 流动状态为层流, 如图 4(a)所示; 当 $Ha=100$ 时, 即施加磁场后, 感生电流在流场中心区域处闭合, 方向与磁场方向垂直, 产生了抑制流动的洛伦兹力, 而在近侧壁处感生电流与磁场平行, 磁场的抑制效果减弱, 此处的流动速度高于中心区域, 因此在近侧壁处产生了如图 4(b)所示的两股射流。此外, 由图 4(c)可知, 随磁场强度增加, 射流的厚度逐渐变薄, 射流厚度 $\delta \sim Ha^{-1/2}$, 速度梯度随之增大; 本文得到的不同 Ha 下的速度分布与 Priede 等^[11]的一致, 验证了本文计算结果的可靠性。

2.2 无磁场作用时的流动稳定性

本文首先计算 $Re=5\ 000$, $Ha=0$, 即无磁场作用时, 4 种模式的扰动增长特征, 并与文献结果进行对比, 之后再考虑加入磁场的情形, 分析磁场对流动稳定性的影响。

(a) $Ha=0$ (b) $Ha=100$ 

(c) 计算结果与文献[11]结果的对比

图 4 $Re=5\,000$, 不同 Ha 时, 管道内的速度分布
Fig. 4 Velocity distribution when $Re=5\,000$ and Ha is different

图 5 为 $Ha=0$, 不同模式下, 扰动增长倍数 G 和流向波数 α 与时间 t 的关系。如图 5(a)所示, 当 $Ha=0$, G 随着 t 的增加而逐渐增大, 直到最大值 $G_{\max}$, 此时对应的 t 和 α 分别为最优时刻 t_{opt} 和最优流向波数 α_{opt} ; 4 种模式下 G 随 t 的变化曲线均呈单峰形式, 即扰动呈瞬态增长, 其中模式 I 和模式 IV 的 G 随 t 的变化趋势相近, 得到的 $G_{\max}$ 相等, 模式

III 的 $G_{\max}$ 值最大; 当 t 较大时, 模式 I 和模式 IV 的 G 值大于其他 2 种模式, 表明这两种模式的扰动更不稳定。而由 5(b)可知, 4 种模式下 α 均随 t 的增大逐渐减小, 最终趋于 0, 且在同一 t 下对应的 α 基本相等。此外, 本文的计算结果较好地符合了 Biau 等^[9]的结果, 进而验证了所用程序的正确性。

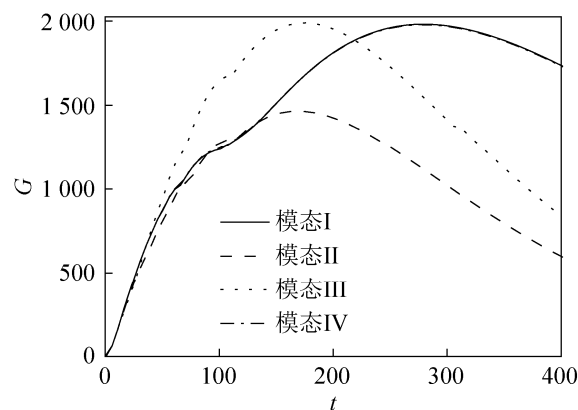
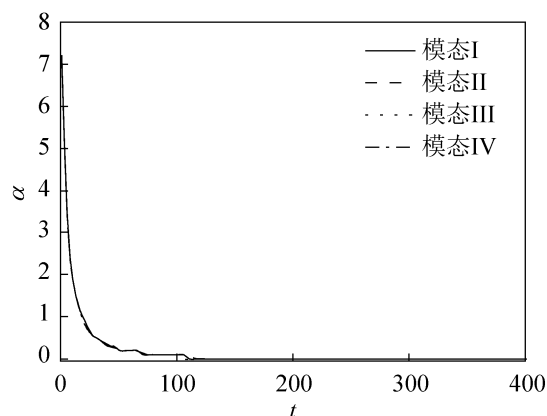
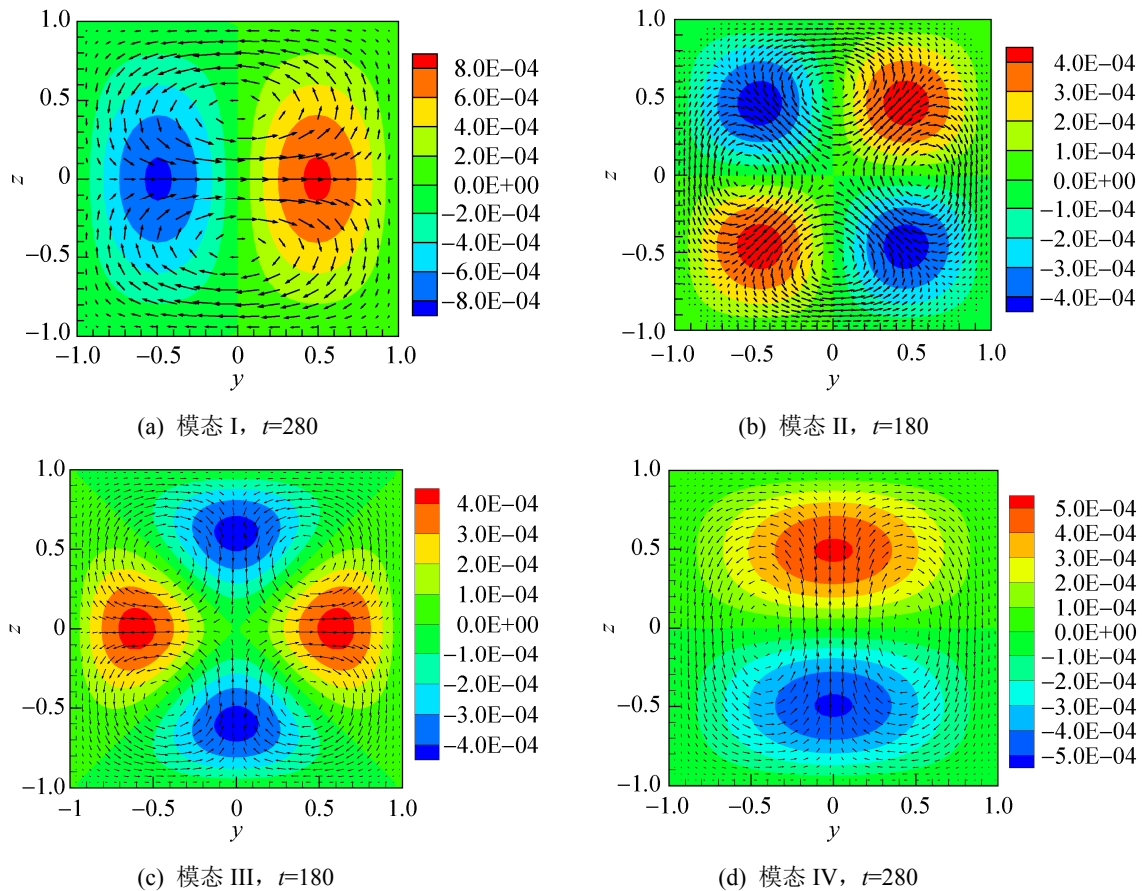
(a) G 随 t 的变化(b) α 随 t 的变化图 5 $Ha=0$ 时, 不同模式下的 G , α 与 t 的关系

Fig. 5 Relationship between G , α and t under different modes when $Ha=0$

图 6 为 $Ha=0$, $\alpha=0$ 时, 不同模式下扰动速度分量 $\hat{u}$ 和速度矢量的空间分布。由图 6 可知, 4 种模式下的扰动均以流向漩涡的形式分布在整個流场区域, 但它们的对称类型及结构不同。对比图 6(a)和 6(d)表明, 模式 I 和模式 IV 的漩涡结构大致相同, 因无磁场作用, 2 种模式在同一时刻 t 下的扰动增长倍数 G 相等, 对应的流向波数 α 也相等(图 5)。

图 6 $Ha=0$, $\alpha=0$ 时, 不同模式下扰动速度分量 $\hat{u}$ 和速度矢量的空间分布Fig. 6 Spatial distribution of the disturbance velocity component $\hat{u}$ and the velocity vector under different modes when $Ha=0$ and $\alpha=0$

2.3 磁场作用时的流动稳定性

图 7 为 $Ha=5$, 不同模式下的扰动增长倍数 G 和流向波数 α 随时间 t 的变化。对比 $Ha=0$ 的情形 (图 5), $Ha=5$ 时 4 种模式下的 G 与 t 的关系仍为单峰曲线, α 均随 t 的增大而减小, 且 4 种模式下对应的 α 相等; 施加磁场后, 受磁场抑制作用, 扰动的最优增长倍数 $G_{\max}$ 减小。当 t 较小 ($t \leq 25$) 时, 4 种模式下的 G 值相等, 随着 t 的增大, 4 种模式的 G 值出现了明显的差异, 当 $25 \leq t \leq 93$ 时, 模式 II 下的 G 值大于其他模式, 而当 $t > 93$ 时, 模式 III 的 G 值最大, 当 $t=126$ 时, 模式 III 的 $G_{\max}$ 值为全局最大值。

图 8 为 $Ha=5$, $\alpha=0$ 时, 模式 II 和模式 III 扰动速度 $\hat{u}$ 的空间分布。由图 8 表明, 由于受到磁场的

抑制作用, 流向漩涡的尺寸和作用范围均减小, 侧边界层厚度变薄。对比图 8(a) 和图 8(b) 可知, 类型为模式 II 的扰动模式主要分布流场中心区域, 无相互作用; 而模式 III 对应的扰动存在一定的相互作用, 此时该模式下的 $G_{\max}$ 值最大 (图 7(a)), 对应的扰动最不稳定。

图 9 为 $Ha=8$ 时, 不同模式下的扰动增长倍数 G 和流向波数 α 随时间 t 的变化。当 t 较小时, 4 种模式对应的 G 值和 α 相等; t 较大时 ($t > 23$), 模式 II 对应的 G 值大于其他模式, 且随 t 的增长呈指数增长, 其余 3 种模式对应的 G 则随 t 增加而衰减。此外, 由图 9(b) 可知, 4 种模式的流向波数 α 均随 t 瞬间增长, 后逐渐减小, 模式 II 对应的 α 最终稳定于某一波数 ($\alpha \approx 0.9$), 而其他模式的波数随 t 的增长最终趋于 0。

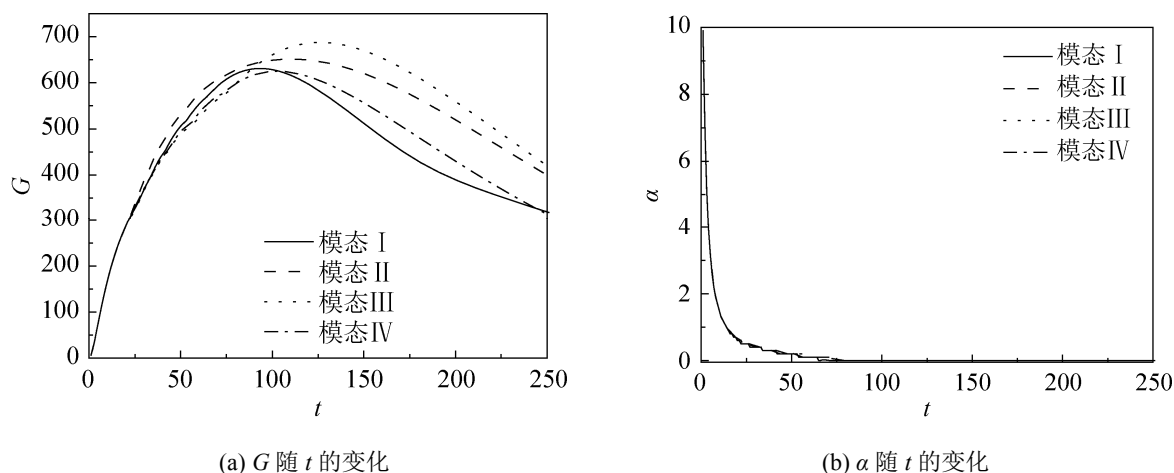
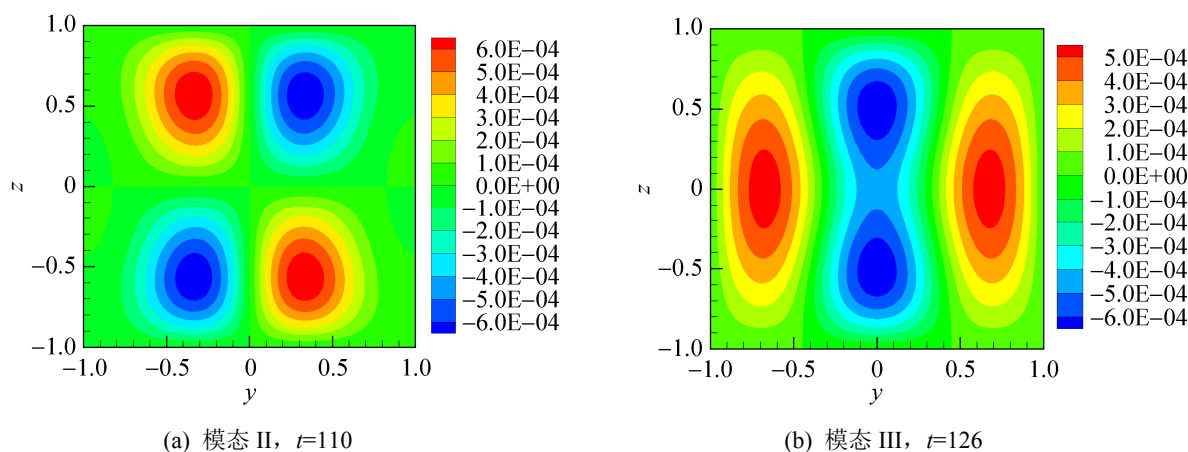
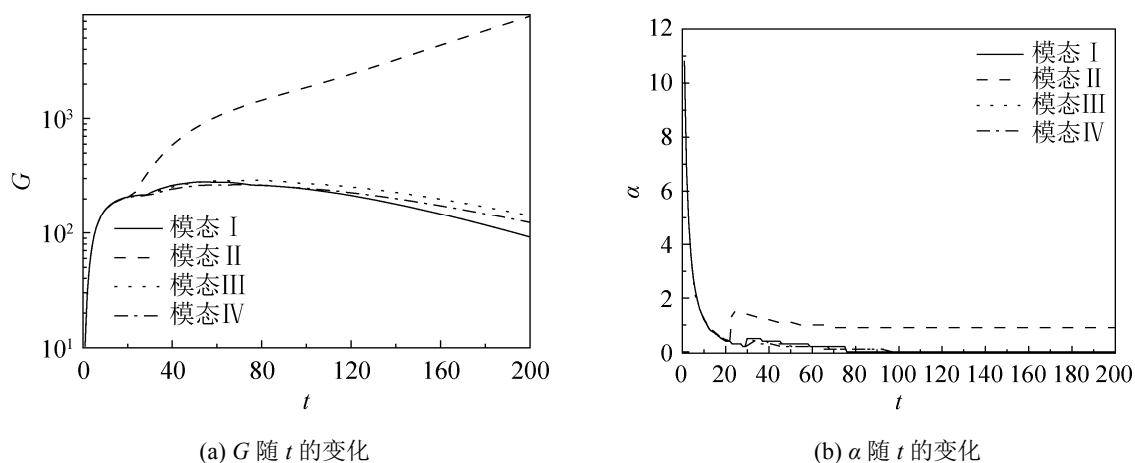
图 7 $Ha=5$ 时, 不同模式下的 G , α 与 t 的关系Fig. 7 Relationship between G , α and t under different modes when $Ha=5$ 图 8 $Ha=5$, $\alpha=0$ 时, 不同模式下扰动速度分量 $\hat{u}$ 的空间分布Fig. 8 Spatial distribution of the disturbance velocity component $\hat{u}$ under different modes when $Ha=5$ and $\alpha=0$ 图 9 $Ha=8$ 时, 不同模式下的 G , α 与 t 的关系Fig. 9 Relationship between G , α and t under different modes when $Ha=8$

图 10 为 $Ha=8$, $t=10$, $\alpha=1.2$ 时, 不同模式下的扰动速度分量 $\hat{u}$ 的空间分布。由图 10 可知, t 较小时, 随着哈特曼数 Ha 增大, 4 种模式的扰动空间分布形式类似, 均以流向漩涡的形式分布在侧边界层内, 扰动之间不存在相互作用, 此时 4 种模式的扰动增长倍数 G 及对应的流向波数 α 相等(图 9), 流场的稳定性与边界层稳定性类似。

图 11 为 $Ha=8$, $t=100$ 时, 不同模式下的扰动速度分量 $\hat{u}$ 的空间分布。随着时间 t 增大, 扰动结构均发生了明显的变化, 其中, 模式 II 的扰动主要分布在射流区域, 且呈指数增长, 当 t 足够大时, 很可能导致流场失稳; 其他模式的扰动则基本分布在射流区域内, 并且存在一定的相互作用, 由于受到磁场的抑制, 扰动到达峰值后缓慢衰减, 流场最终趋于稳定。此外, 对比图

10, 11 可知, 当 t 较小时, 扰动主要被限制在侧边界层内, 无相互作用, 流场稳定性与边界层稳定性类似; t 较大时扰动则分布在射流区域, 流场稳定性与射流有关。

图 12 为 $Ha=10$ 时, 不同模式下的扰动增长倍数 G 和流向波数 α 随时间 t 的变化。同 $Ha=8$, 当 t 较小时, 4 种模式对应的 G 和 α 均相等, 且在较短时间内, 模式 I 的 G 值大于其他 3 种模式, 对应的扰动最不稳定; 随着 t 的增大, 扰动仍出现两种增长模式: 模式 II 的扰动呈指数增长, 而其他模式的扰动呈瞬态增长, 到达峰值后, 受磁场的抑制作用, 流场最终趋于稳定。对比 $Ha=8$, 随着 Ha 数增大, 射流速度增大, 扰动间相互作用增强, G 值增大(模式 I、III、IV)或增长速率增大(模式 II), 此时更易使流场失稳。

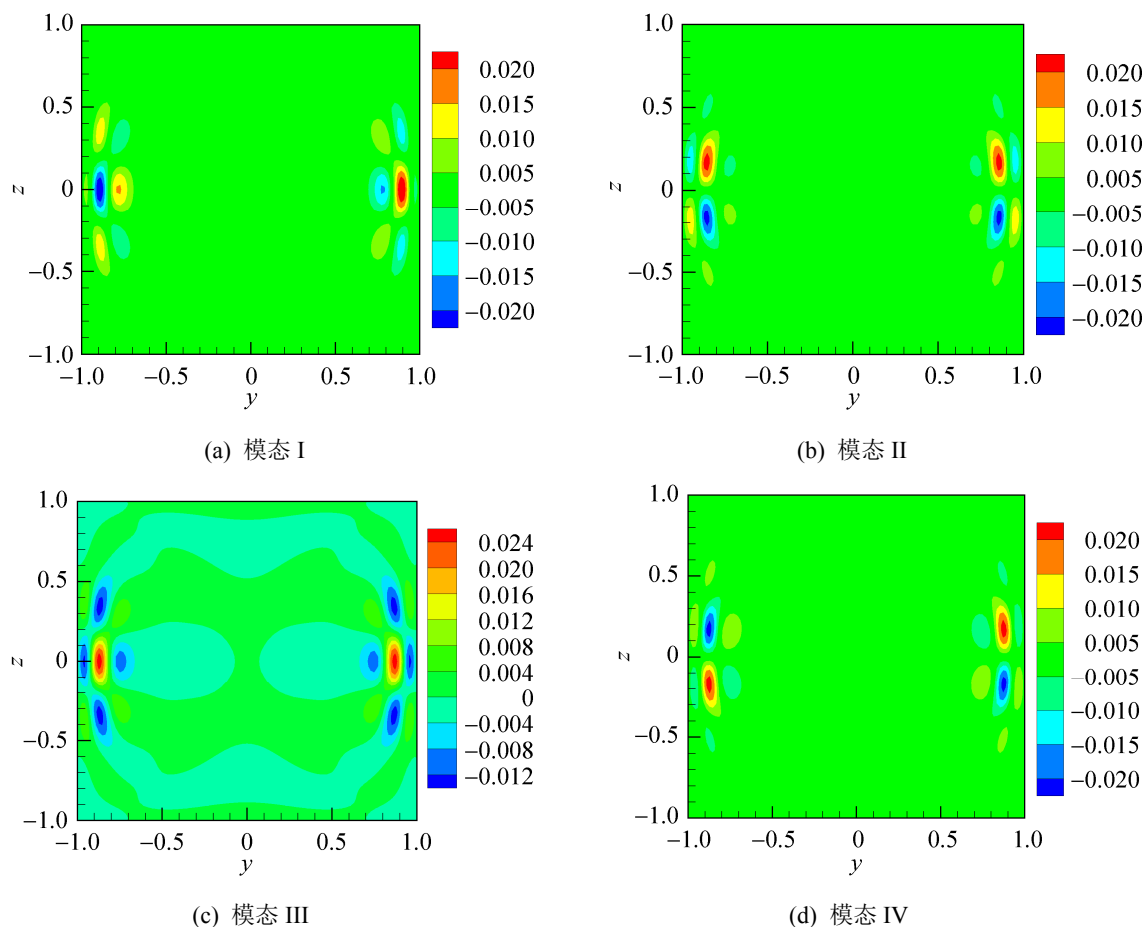


图 10 $Ha=8$, $t=10$, $\alpha=1.2$ 时, 不同模式下扰动速度分量 $\hat{u}$ 的空间分布

Fig. 10 Spatial distribution of the disturbance velocity component $\hat{u}$ under different modes when $Ha=8$, $\alpha=1.2$ and $t=10$

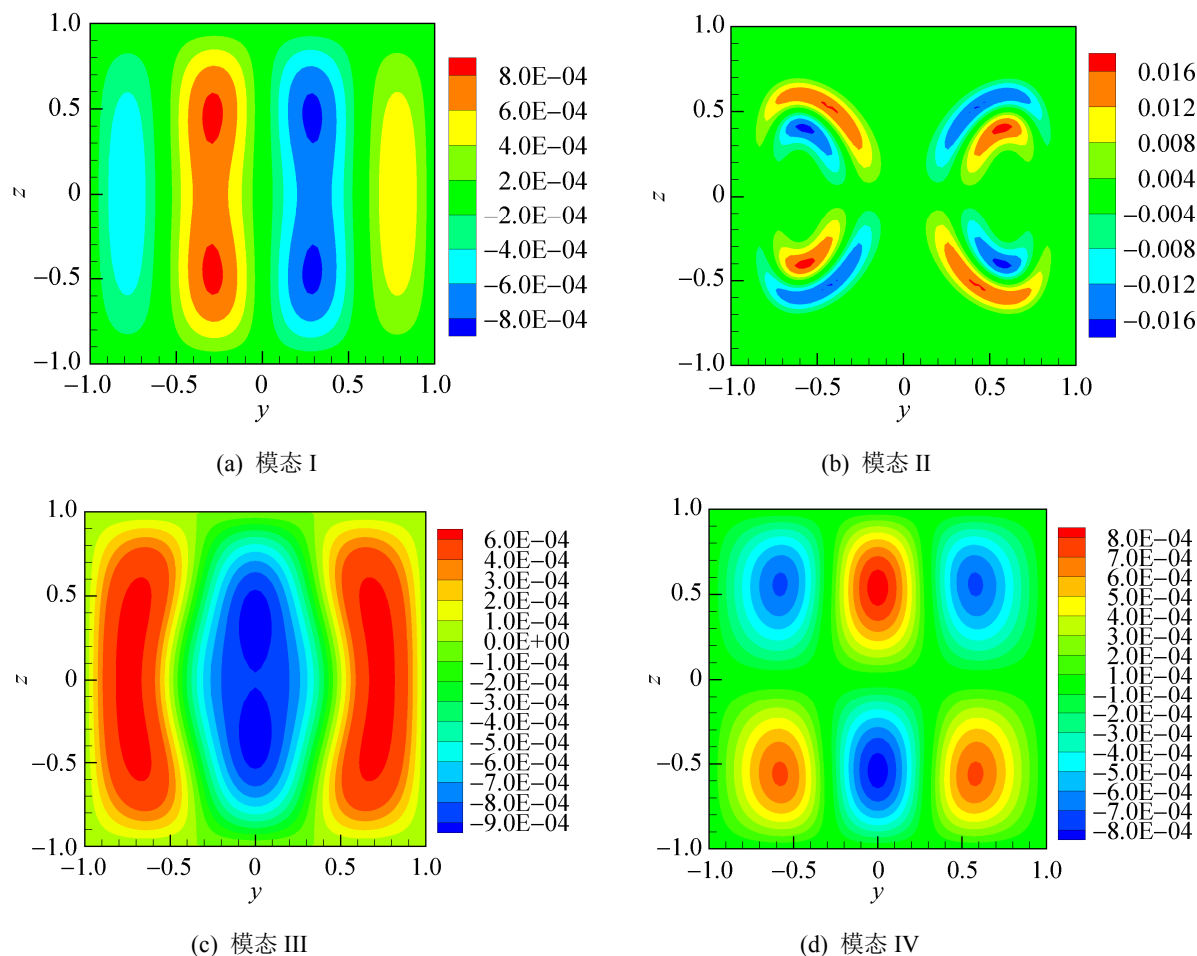
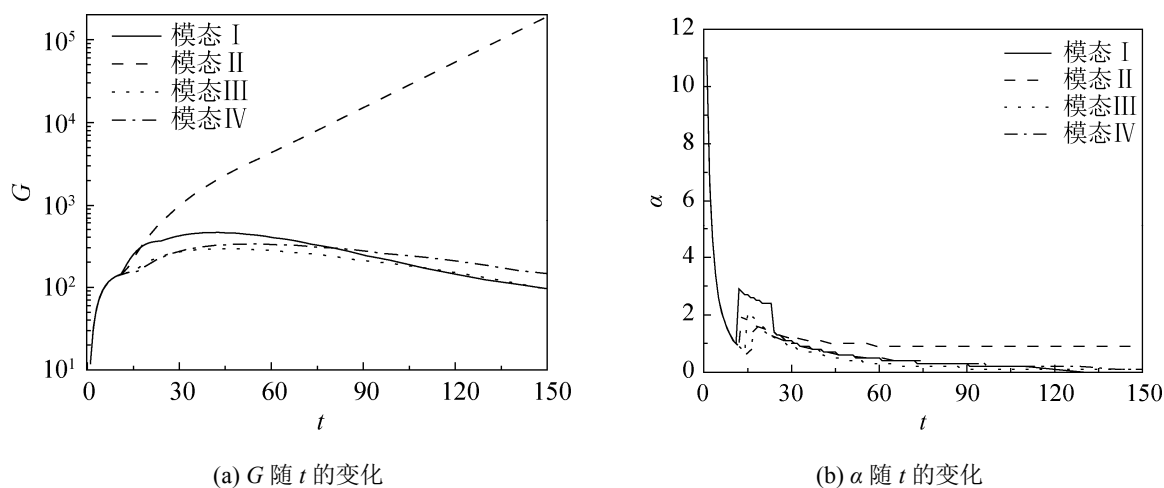
图 11 $Ha=8$, $t=100$ 时, 不同模态下扰动速度分量 $\hat{u}$ 的空间分布Fig. 11 Spatial distribution of the disturbance velocity component $\hat{u}$ under different modes when $Ha=8$ and $t=100$ 图 12 $Ha=10$ 时, 不同模态下的 G , α 与 t 的关系Fig. 12 Relationship between G , α and t under different modes when $Ha=10$

图 13 为 $Ha=15$ 时, 不同模式下的扰动增长倍数 G 和流向波数 α 随时间 t 的变化。4 种模式对应的 G 和 α 在 $t < 6$ 的范围内均相等; 当 $6 \leq t \leq 18$ 时, 模式 I 的扰动增长倍数 G 最大; 随着 t 的增大, 模式 II 的增长速率远大于其他 3 种模式, 为流场中最不稳定的模式。由于 Ha 增大, 扰动受磁场的抑制作用增强, 其增长速率较 $Ha=10$ 有所下降, 但仍会使流场失稳; 其他 3 种模式的扰动在一定时间范围内仍呈瞬态增长。

图 14 为 $Ha=20$ 时, 不同模式下的扰动增长倍数 G 和流向波数 α 随时间 t 的变化。由图 14 可知, 4 种模式的 G 和 α 随 t 的变化同 $Ha=8, 10, 15$, 对应的扰动仍出现两种不同的增长模式; 由于哈特

曼数 Ha 的进一步增大, 磁场强度增强, 对扰动的抑制作用也增强, 显然, 与 $Ha=15$ 相比, 扰动类型为模式 II 时, G 的指数增长速率进一步减小, 其余 3 种模式的最优扰动倍数 $G_{\max}$ 减小, 相应的 t_{opt} 减小, 最优流向波数 α_{opt} 增大。

综上可得, 在 Hunt 流中同样存在 2 种不同类型的稳定性机制, 即边界层稳定性和射流稳定性: 一方面, 在磁场作用下, 近侧壁处产生射流, 流场结构发生改变, 更易失稳; 另一方面, 磁场也会抑制扰动的增长, 使流动趋于稳定。总之, 在对磁场作用下的流动进行稳定性分析时, 需要综合考虑上述两种因素。

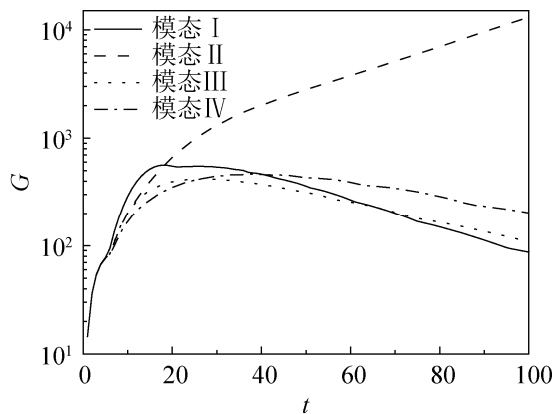
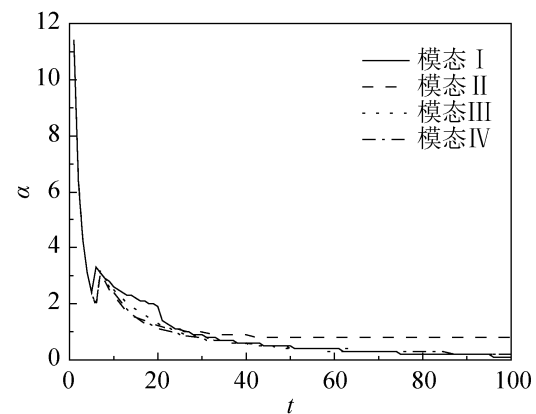
(a) G 随 t 的变化(b) α 随 t 的变化

图 13 $Ha=15$ 时, 不同模式下的 G, α 与 t 的关系
Fig. 13 Relationship between G, α and t under different modes when $Ha=15$

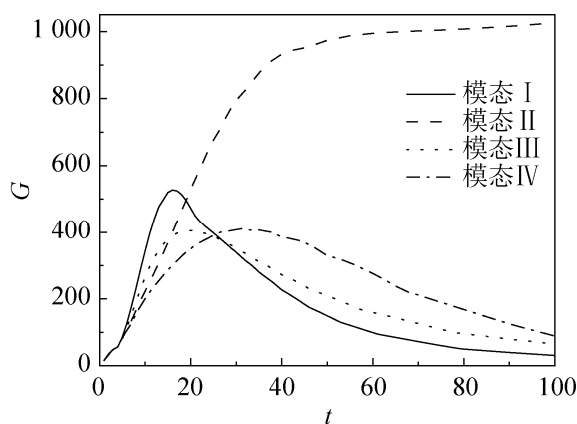
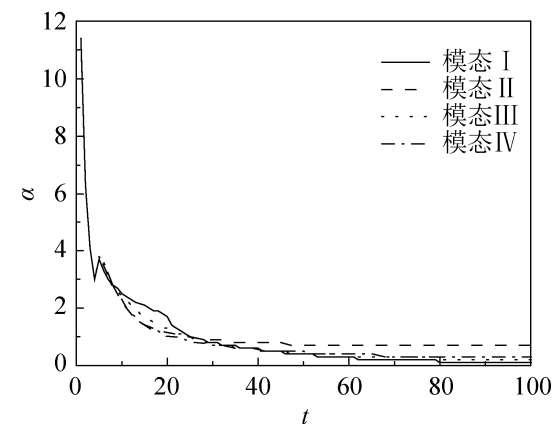
(a) G 随 t 的变化(b) α 随 t 的变化

图 14 $Ha=20$ 时, 不同模式下的 G, α 与 t 的关系
Fig. 14 Relationship between G, α and t under different modes when $Ha=20$

3 结论

本文结合非正则模态稳定性和数值模拟方法, 研究了低强度磁场下 Hunt 流的流动稳定性, 分析了 $Re=5\,000$, $Ha=0, 5, 8, 10, 15, 20$ 时 4 种模态下初始扰动的增长模式, 并比较了扰动的空间分布及其演化规律, 得出如下结论:

1) 在磁场作用下时, 流场内会产生射流, 且随磁场强度增加而速度增大, 受磁场抑制作用, 侧边界层厚度变薄; 扰动以流向漩涡的形式分布在整个流场区域。

2) 当 Ha 较小($Ha=0, 5$)时, 4 种模态的扰动均呈瞬态增长; 随着 Ha 的增大, 相应的最优扰动增长倍数 $G_{\max}$ 减小, 但由于射流的产生, 类型为模态 I、III、IV 的扰动到达 $G_{\max}$ 值后, 受磁场的抑制作用, 逐渐衰减至 0, 扰动呈瞬态增长。

3) 当 Ha 较大($Ha=8, 10, 15, 20$), t 较小时, 扰动集中在侧边界层, 4 种模态的对应的 G 及 α 相等, 流场稳定性与边界层稳定性相似; t 较大时, 模态 II 的扰动主要分布在射流区域, 随时间 t 呈指数增长, 且增长速率在 $Ha=10$ 时达到最大, 此时流场稳定性与射流有关。

参考文献:

- [1] Vorobev A, Zikanov O. Instability and transition to turbulence in a free shear layer affected by a parallel magnetic field[J]. Journal of Fluid Mechanics (S0022-1120), 2007, 574: 131-154.
- [2] Davidson P A. Magnetohydrodynamics in materials processing[J]. Annual Review of Fluid Mechanics (S0066-4189), 1999, 31(1): 273-300.
- [3] 王宝峰, 李建超. 电磁搅拌技术在连铸生产中的应用[J]. 鞍钢技术, 2009(1): 1-5.
Wang Baofeng, Li Jianchao. Application of Electromagnetic Stirring Technology in Continuous Casting[J]. Angang Technology, 2009(1): 1-5.
- [4] Smolentsev S, Moreau R, Bühler L, et al. MHD thermofluid issues of liquid-metal blankets: phenomena and advances[J]. Fusion Engineering and Design (S0920-3796), 2010, 85: 1196-1205.
- [5] Shercliff J A. Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields[J]. Mathematical

- Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (S0305-0041), 1953, 49(1): 136-144.
- [6] Hunt J C R. Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts[J]. Journal of Fluid Mechanics (S0022-1120), 1965, 21(4): 577-590.
- [7] Branover H. Magnetohydrodynamic Flow in Ducts[M]. New York: John Wiley, 1978.
- [8] Müller U, Bühler L. Magnetofluidynamics in channels and containers[M]. Berlin: Springer, 2001.
- [9] Biau D, Soueid H, Bottaro A. Transition to turbulence in duct flow[J]. Journal of Fluid Mechanics (S0022-1120), 2008, 596: 133-142.
- [10] Krasnov D, Zikanov O, Rossi M, et al. Optimal linear growth in magnetohydrodynamic duct flow[J]. Journal of Fluid Mechanics (S0022-1120), 2010, 653: 273-299.
- [11] Priede J, Aleksandrova S, Molokov S. Linear stability of Hunt's flow[J]. Journal of Fluid Mechanics (S0022-1120), 2010, 649: 115-134.
- [12] Priede J, Aleksandrova S, Molokov S. Linear stability of magnetohydrodynamic flow in a perfectly conducting rectangular duct[J]. Journal of Fluid Mechanics (S0022-1120), 2012, 708: 111-127.
- [13] Priede J, Arlt T, Bühler L. Linear stability of magnetohydrodynamic flow in a square duct with thin conducting walls[J]. Journal of Fluid Mechanics (S0022-1120), 2016, 788: 129-146.
- [14] 刘婵, 张年梅, 倪明玖. 侧壁非对称的方管 MHD 流动的线性稳定性分析[J]. 中国科学院大学学报, 2016, 33(1): 42-49.
Liu Chan, Zhang Nianmei, Ni Mingjiu. Linear stability analysis of MHD flow in square duct with unsymmetrical side walls[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2016, 33(1): 42-49.
- [15] Manneville P. Understanding the sub-critical transition to turbulence in wall flows[J]. Pramana (S0304-4289), 2008, 70(6): 1009-1021.
- [16] Zikanov O, Krasnov D, Boeck T, et al. Laminar-Turbulent Transition in Magnetohydrodynamic Duct, Pipe, and Channel Flows[J]. Applied Mechanics Reviews (S0003-6900), 2014, 66(3): 030802.
- [17] Schmid P J, Henningson D S. Stability and transition in shear flows[M]. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [18] 董帅, 林殿吉, 吕玉坤. 哈特曼边界层的初级稳定性分析[J]. 力学学报, 2016, 48(2): 327-335.
Dong Shuai, Lin Dianji, Lü Yukun. The primary stability analysis of Hartmann boundary layer[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics,

- 2016, 48(2): 327-335.
- [19] 李春曦, 陈朋强, 叶学民. 含活性剂液滴在倾斜粗糙壁面上的铺展稳定性[J]. 物理学报, 2015, 64(1): 138-149.
- Li Chunxi, Chen Pengqiang, Ye Xuemin. Stability of surfactant-laden droplet spreading over an inclined heterogeneous substrate[J]. Acta Physica Sinica, 2015, 64(1): 138-149.
- [20] Dong S, Krasnov D, Boeck T. Optimal linear perturbations in Hartmann channel flow: The influence of walls and magnetic damping[J]. Magnetohydrodynamics (S0024-998X), 2015, 51(2): 225-235.
- [21] Reddy S C, Schmid P J, Baggett J S, et al. On stability of streamwise streaks and transition thresholds in plane channel flows[J]. Journal of Fluid Mechanics (S0022-1120), 1998, 365: 269-303.
- [22] Dong S, Krasnov D, Boeck T. Secondary optimal energy growth and magnetic damping of turbulence in Hartmann channel flow[J]. European Journal of Mechanics-B/Fluids (S0997-7546), 2016, 60: 209-218.
- [23] 董帅. 磁场作用下的平板流稳定性分析[D]. 沈阳: 东北大学, 2012.
- Dong Shuai. Stability analysis of channel streaky flow under the magnetic field[D]. Shenyang: Northeastern University, 2012.
- [24] Dong S, Liu L S, Ye X M. Instability of MHD flow in the duct with electrically perfectly conducting walls[J]. Journal of Applied Fluid Mechanics (S1735-3572), 2017, 10(5): 1293-1304.
- [25] Tatsumi T, Yoshimura T. Stability of the laminar flow in a rectangular duct[J]. Journal of Fluid Mechanics (S0022-1120), 1990, 212: 437-449.
- [26] Uhlmann M, Nagata M. Linear stability of flow in an internally heated rectangular duct[J]. Journal of Fluid Mechanics (S0022-1120), 2006, 551: 387-404.