

12-12-2019

## Analysis of Amplitude-frequency Characteristics of Fractional-order Current-controlled Meminductor

Liu Meng

*School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China;*

Zhaohui Gan

*School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China;*

Shiyong Zhang

*School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

## Analysis of Amplitude-frequency Characteristics of Fractional-order Current-controlled Meminductor

### Abstract

**Abstract:** Meminductor is a nonlinear memory element with hysteresis characteristics, which is an important part of memristive systems. In recent years, meminductor research is mainly focused on time domain characteristics, but the research of frequency domain characteristics of meminductor has not been seen report. A fractional-order current-controlled meminductor model with nonlinear window function is studied, *and the amplitude-frequency response characteristics of meminductor under different excitation signals are analyzed in detail. The influence of fractional-order and control parameter in window function on amplitude-frequency characteristics of the fractional-order current-controlled meminductor is summarized. It has certain guiding significance to research of meminductor characteristics.*

### Keywords

meminductor, fractional-order, amplitude-frequency, characteristics

### Recommended Citation

Liu Meng, Gan Zhaohui, Zhang Shiyong. Analysis of Amplitude-frequency Characteristics of Fractional-order Current-controlled Meminductor[J]. Journal of System Simulation, 2019, 31(6): 1179-1187.

## 一种分数阶流控忆感器的幅频特性分析

刘梦, 甘朝晖, 张士英

(武汉科技大学信息科学与工程学院, 湖北 武汉 430081)

**摘要:** 忆感器是一种具有非线性特性的记忆元件, 是记忆元器件家族中的重要一员。忆感器的研究主要集中在时域特性的分析上, 而频域特性的研究还没有开展。在研究了一种带有非线性窗函数的分数阶流控忆感器模型的基础上, 分析了它在不同电流激励信号下的幅频响应特性, 并总结了分数阶阶次以及非线性窗函数的控制参数对分数阶流控忆感器幅频特性影响的规律, 这对忆感器频域特性的研究具有一定的指导意义。

**关键词:** 忆感器; 分数阶; 幅频; 特性

中图分类号: TN710 文献标识码: A 文章编号: 1004-731X (2019) 06-1179-09

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.17-0204

## Analysis of Amplitude-frequency Characteristics of Fractional-order Current-controlled Meminductor

Liu Meng, Gan Zhaohui, Zhang Shiyong

(School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

**Abstract:** Meminductor is a nonlinear memory element with hysteresis characteristics, which is an important part of memristive systems. In recent years, meminductor research is mainly focused on time domain characteristics, but the research of frequency domain characteristics of meminductor has not been seen report. A fractional-order current-controlled meminductor model with nonlinear window function is studied, and the amplitude-frequency response characteristics of meminductor under different excitation signals are analyzed in detail. The influence of fractional-order and control parameter in window function on amplitude-frequency characteristics of the fractional-order current-controlled meminductor is summarized. It has certain guiding significance to research of meminductor characteristics.

**Keywords:** meminductor; fractional-order; amplitude-frequency; characteristics

## 引言

2008 年, 惠普实验室使用纳米技术研制出了一种物理器件, 其特性与蔡少棠教授所猜想的忆阻器的特性一样, 从而证实了忆阻器是客观存在的<sup>[1-2]</sup>。忆阻器具有非线性的特性, 特别是它的“记

忆”特性, 使得忆阻器的应用前景十分广阔。到目前为止, 研究人员对忆阻器进行了大量的研究, 在神经网络<sup>[3]</sup>、混沌电路设计<sup>[4]</sup>、图像处理<sup>[5-6]</sup>、非易失性 RRAM 和 SRAM 存储器<sup>[7-8]</sup>等领域已经取得了一定的研究成果。

随着忆阻器实物的发现, Ventra 和蔡少棠教授等人拓展了忆阻器的概念, 提出了忆容器和忆感器的相关概念<sup>[9]</sup>。由于目前还没有发现忆感器的实物, 因此, 对忆感器的研究还停留在理论分析和实验仿真的阶段。研究人员基于忆感器的数学定义以



收稿日期: 2017-05-15 修回日期: 2017-10-09;  
基金项目: 国家自然科学基金面上项目(41571396);  
作者简介: 刘梦(1994-), 女, 湖北黄陂, 硕士, 研究方向为忆感器及忆阻系统; 甘朝晖(1969-), 男, 湖北武汉, 博士, 教授, 研究方向为忆阻器及忆阻系统, 人工智能及机器人。

<http://www.china-simulation.com>

• 1179 •

及其本构关系, 即磁通的积分  $\rho$  和电荷  $q$  的关系, 先后提出了忆感器的数学模型和 SPICE 模型, 并设计出了忆感器的模拟器, 对忆感器的电气特性进行了相关的研究<sup>[10-12]</sup>。这些研究都是分析忆感器的时域特性, 而关于忆感器幅频特性的研究还没有见到相关报道。

在正弦信号激励下忆感器的磁通和电流关系曲线是一条在原点紧致的滞回曲线, 其形状和大小主要受忆感器磁通和电流谐波的影响。由于在时域上很难分析出信号的频率成分, 而傅里叶变换可以将信号从时域变换到频域, 能够分析出信号的频率分布特征, 因此, 可以采用傅里叶变换的方法来分析研究忆感器的频率特性。

Biolkova V 等将傅里叶变换应用到磁控忆阻器的研究上, 对正弦电压信号激励下流过忆阻器的电流进行了傅里叶分析, 得到了磁控忆阻器的幅频特性, 发现流过磁控忆阻器电流的频谱中只包含正弦分量, 没有直流分量, 因此, 忆阻器在正弦信号激励下的伏安特性曲线具有紧致特性和奇对称性<sup>[13]</sup>。他们的工作为记忆元件幅频特性的研究提供了思路。本文应用分数阶傅立叶变换的方法, 对一种带有非线性窗函数的分数阶流控忆感器在阶跃、正弦和非正弦周期信号激励下的幅频响应特性进行了分析, 总结了分数阶阶次和非线性窗函数的控制参数对分数阶流控忆感器幅频特性的影响, 为分数阶忆感器以及包含分数阶忆感器电路的幅频特性分析提供了一种方法, 从而为将来分数阶忆感器在放大电路、滤波器及谐振等电路中的应用打下一定的基础。

## 1 分数阶傅里叶变换

傅里叶变换将时域和频域联系在一起, 从整体上展示信号的频率成分, 适用于确定性平稳信号的分析。而分数阶傅里叶变换是整数阶傅里叶变换的拓展, 能更加全面地分析信号在频域内的特性, 因此适合分析非平稳信号<sup>[14]</sup>。分数阶傅里叶变换是在整数阶傅里叶变换的基础上引入了一个自由参

数  $\alpha$ , 函数  $X(t)$  的  $\alpha$  阶傅里叶变换的定义如公式(1)所示<sup>[15]</sup>:

$$X_{\alpha}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_{\alpha}(t, \mu) dt \quad (1)$$

其中, 分数阶傅里叶变换的核函数为:

$$K_{\alpha}(t, \mu) = \begin{cases} A_{\beta} \exp[j\pi(\mu^2 \cot \beta - 2t\mu \csc \beta + t^2 \cot \beta)], \\ \beta \neq n\pi \\ \delta(t - \mu), \beta = 2n\pi \\ \delta(t + \mu), \beta = (2n \pm 1)\pi \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中,  $A_{\beta} = \sqrt{1 - j \cot \beta}$  是分数阶傅里叶变换的幅值,  $\beta = \alpha\pi/2$ 。当  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \pi/2$  时,  $A_{\beta} = 1$ , 由公式(1)可以得到

$$X_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\mu t} x(t) dt \quad (3)$$

由公式(3)可看出, 当分数阶阶次  $\alpha = 1$  时, 分数阶傅里叶变换即为整数阶傅里叶变换。因此, 分数阶傅里叶变换是传统傅里叶变换的拓展。

在信号的时频表示中, 通常使用一个平面的两个正交轴分别表示时间和频率, 如图 1 所示。如果用  $t$  轴来表示信号  $x(t)$ ,  $\omega$  轴表示信号的傅立叶变换  $X(\omega)$ , 那么就可以将傅立叶变换看作是将信号从  $t$  轴按逆时针方向旋转  $\pi/2$  弧度到  $\omega$  轴。而分数阶傅里叶变换则是将信号从  $t$  轴按逆时针方向旋转  $\beta$  弧度到  $\mu$  轴<sup>[16]</sup>。

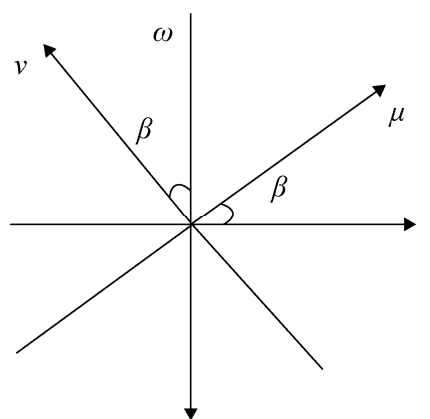


图 1 分数阶傅里叶变换域

Fig. 1 Fractional-order Fourier transform domain

由图 1 可以看出, 当  $\beta = 0$  时  $\alpha = 0$ , 傅立叶变换  $X_0(\mu) = x(t)$ , 即原始信号。当  $\beta = \pi/2$  时  $\alpha = 1$ ,

$X_1(\mu) = X(\omega)$ , 即信号的整数阶傅里叶变换。当  $\beta = \pi$  时  $\alpha = 2$ ,  $X_2(\mu) = x(-t)$ , 表示信号经过两次旋转  $\pi/2$  弧度变换到  $-t$  轴。当  $\beta = 3\pi/2$  时  $\alpha = 3$ ,  $X_3(\mu) = X(-\omega)$ , 表示信号经过旋转  $3\pi/2$  弧度变换到  $-\omega$  轴。当  $\beta = 2\pi$  时  $\alpha = 4$ ,  $X_4(\mu) = x(t)$ , 说明经过一个周期的变换后, 傅立叶变换的结果又成为了原始信号。因此, 分数阶阶次  $\alpha$  的周期为 4, 变量  $\beta$  的弧度变化周期为  $2\pi$ 。

在数字信号处理中, 只能采用离散的数据来计算信号的分阶傅立叶变换结果。因此, 离散分阶傅里叶变换(DFRFT)的计算方法决定了它的计算效率。离散分阶傅里叶变换的计算方法有多种, 应用较为广泛的是 Ozaktas 采样型 DFRFT 算法。Ozaktas 采样型 DFRFT 算法根据连续分阶傅里叶变换的积分定义式, 将分阶傅里叶变换的复杂积分变换分解成若干简单的计算步骤, 然后经过离散化处理得到一个卷积表达式, 最后使用快速傅里叶变换的算法来计算分阶傅里叶变换的结果<sup>[17]</sup>。该算法几乎与快速傅里叶变换算法的计算速度一样, 而且它还具有精度高的特点, 因此, 本文采用 Ozaktas 采样型 DFRFT 算法对分阶流控忆感器的幅频响应特性进行分析和研究。

## 2 分数阶流控忆感器模型

蔡少棠教授等人在忆阻器的基础上拓展出了忆感器和忆容器的概念。随后, Biolek 等根据忆感器的定义推导出了忆感器的数学模型, 并受惠普实验室物理模型的启发提出了一种流控忆感器的物理模型<sup>[10]</sup>。在 Biolek 等所提出的整数阶流控忆感器模型的基础上研究一种带有非线性窗函数的分阶流控忆感器模型, 并对它的幅频特性进行分析。

本文所研究的带有非线性窗函数的分阶流控忆感器模型可以用 3 个公式表示。公式(4)表示忆感器的状态方程, 公式(5)和(6)分别表示忆感器的忆感值和磁通量。

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = i(t)kf(x), \quad f(x) = \frac{n}{x} \quad (4)$$

$$L_m = \left[ \sqrt{L_{\min}} + x(\sqrt{L_{\max}} - \sqrt{L_{\min}}) \right]^2 \quad (5)$$

$$\phi = L_m i(t) \quad (6)$$

在该模型中,  $i(t)$  表示流过忆感器的电流,  $k$  为滑动比例因子, 是一个取决于忆感器材料的常量。 $x$  为忆感器的状态变量,  $f(x)$  是一个非线性窗函数,  $n$  为非线性窗函数中的控制参数,  $L_m$  为忆感器的忆感值,  $L_{\min}$  为忆感器的最小忆感值,  $L_{\max}$  为忆感器的最大忆感值,  $\phi$  为忆感器的磁通量。

对忆感器的状态方程进行分阶积分运算, 并求解该方程, 可以得到状态变量  $x$  的表达式为:

$$x = [\alpha(\alpha+1)nk \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} i(\tau) d\tau + x_0^{\alpha+1}]^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (7)$$

式中:  $x_0$  为  $x$  在  $t=0$  时的初始值。将公式(7)代入公式(5)中即可得到分阶流控忆感器的忆感值表达式, 如公式(8)所示:

$$L_m = \left[ \sqrt{L_{\min}} + [\alpha(\alpha+1)nk \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} i(\tau) d\tau + x_0^{\alpha+1}]^{\frac{1}{1+\alpha}} (\sqrt{L_{\max}} - \sqrt{L_{\min}}) \right]^2 \quad (8)$$

公式(8)就是带有非线性窗函数  $f(x) = n/x$  的分阶流控忆感器模型在电流信号  $i(t)$  作用下的忆感值表达式。 $L_m$  是一个以  $\alpha, n, i$  为参数的函数, 其中,  $\alpha$  和  $n$  是影响忆感器忆感值的最主要参数。当电流信号的类型不同时,  $L_m$  会有如表 1 所示的不同类型的显式表达式。

## 3 实验结果

为了分析分阶流控忆感器的幅频特性, 本节将对不同电流信号激励下分阶流控忆感器的磁通量进行分阶傅里叶变换, 以分析和研究分阶流控忆感器的幅频响应特性。所有实验都是在 Matlab R2010b 仿真环境下完成的。

### 3.1 忆感器在阶跃信号激励下的幅频响应特性

给忆感器两端施加如公式(9)所示的阶跃电流

$$\text{信号} \quad i(t) = I_{DC} \cdot u(t) \quad (9)$$

式中： $u(t)$ 为单位阶跃函数， $I_{DC}$ 为幅值。由公式(9)和公式(8)可以得到忆感器在阶跃信号激励下的忆感值表达式，如公式(10)所示。

$$L_m = \left[ \sqrt{L_{\min}} + \left[ \left[ (\alpha + 1)nkI_{DC}t^\alpha + x_0^{\alpha+1} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \right] \left( \sqrt{L_{\max}} - \sqrt{L_{\min}} \right) \right]^2 \quad (10)$$

因此，忆感器磁通量的表达式如式(11)所示：

$$\phi = I_{DC} \cdot u(t) \left[ \sqrt{L_{\min}} + \left[ \left[ (\alpha + 1)nkI_{DC}t^\alpha + x_0^{\alpha+1} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \right] \left( \sqrt{L_{\max}} - \sqrt{L_{\min}} \right) \right]^2 \quad (11)$$

由公式(11)可知，在阶跃信号激励下分数阶流控忆感器的磁通量 $\phi$ 是一个以 $\alpha, n$ 为参数的函数。对磁通量 $\phi$ 进行离散分数阶傅里叶变换即可以得到它的幅频响应特性曲线，下面通过实验来观察分数阶流控忆感器磁通量的幅频响应特性。

首先研究分数阶阶次 $\alpha$ 对分数阶流控忆感器

磁通量幅频特性的影响。实验所用参数如下： $x_0=0.25, k=10, L_{\min}=1 \text{ mH}, I_{DC}=50 \text{ mA}, L_{\max}=20 \text{ mH}, n=1$ 。当 $\alpha$ 取不同值时，分数阶流控忆感器磁通量 $\phi$ 的幅频特性曲线如图2所示。

由图(2)可以看出，分数阶流控忆感器磁通量的频谱中不仅含有直流分量，而且还含有其他频率的交流分量。当 $\alpha=1$ 时，也就是整数阶时，在忆感器磁通量频谱中，直流分量的幅值最大，从频率 $f=1 \text{ Hz}$ 的交流分量开始，各个频率分量的幅值随着频率的增加单调递减。随着分数阶阶次 $\alpha$ 的减小，分数阶流控忆感器磁通量频谱中高频分量的幅值逐渐增大，在频谱中的权重逐渐加大。

其次研究非线性窗函数的控制参数 $n$ 对分数阶流控忆感器磁通量幅频特性的影响。实验所用参数如下： $x_0=0.25, k=10, L_{\min}=1 \text{ mH}, L_{\max}=20 \text{ mH}, I_{DC}=50 \text{ mA}, \alpha=0.8$ 。当 $n$ 取不同值时，分数阶流控忆感器磁通量的幅频特性曲线如图3所示。

表1 电流信号 $i(t)$ 作用下 $L_m$ 的显式表达式

Tab. 1 Explicit expressions of  $L_m$  under different current signals  $i(t)$

电流信号 $i(t)$	$L_m$ 显式表达式
$i(t) = I_{DC} \cdot u(t)$	$L_m = \left[ \sqrt{L_{\min}} + \left[ \left[ (\alpha + 1)nkI_{DC}t^\alpha + x_0^{\alpha+1} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \right] \left( \sqrt{L_{\max}} - \sqrt{L_{\min}} \right) \right]^2$
$i(t) = I \sin(2\pi ft)$	$L_m = \left[ \sqrt{L_{\min}} + \left( x_0^{\alpha+1} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2\pi f)^\alpha} Ink \sin\left(2\pi ft - \frac{\pi}{2}\alpha\right) \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \left( \sqrt{L_{\max}} - \sqrt{L_{\min}} \right) \right]^2$
$i(t) = \begin{cases} I_{01} & 0 < \tau \leq \beta T \\ I_{02} & \beta T < \tau \leq T \end{cases} \quad 0 \leq \beta \leq 1$	$L_m = \left[ \sqrt{L_{\min}} + \left( \sqrt{L_{\max}} - \sqrt{L_{\min}} \right) * \begin{cases} \left( x_0^{\alpha+1} + (\alpha + 1)nkI_{01}\tau^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} & 0 < \tau \leq \beta T \\ \left( x_0^{\alpha+1} + (\alpha + 1)nk \left( I_{01}(\beta T)^\alpha + I_{02}(\tau^\alpha - (\beta T)^\alpha) \right) \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} & \beta T < \tau \leq T \end{cases} \right]^2$

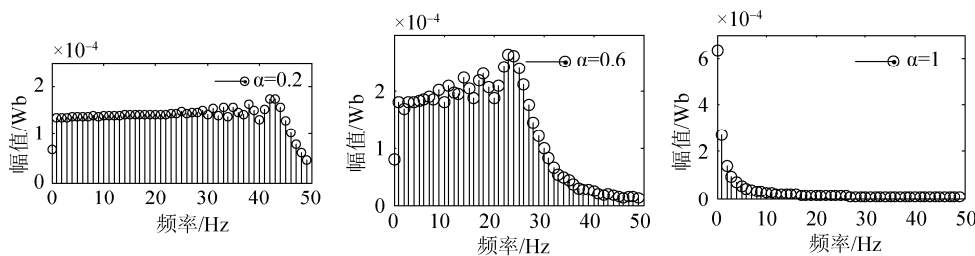


图2  $\alpha$ 取不同值时分数阶流控忆感器的磁通量 $\phi$ 在阶跃信号激励下的幅频特性曲线

Fig. 2 Amplitude-frequency characteristic curves under step signal excitation of magnetic flux  $\phi$  of the fractional-order current-controlled meminductor with different orders  $\alpha$

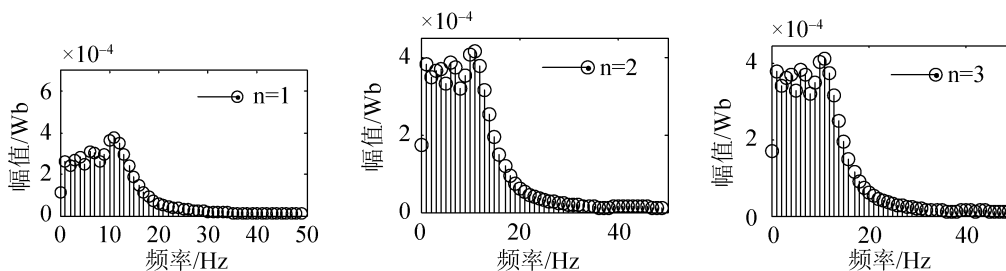


图 3  $n$  取不同值时分数阶流控忆感器的磁通量  $\phi$  在阶跃信号激励下的幅频特性曲线  
Fig. 3 Amplitude-frequency characteristic curves under step signal excitation of magnetic flux  $\phi$  of the fractional-order current-controlled meminductor with different control parameters  $n$

由图 3 可以得出结论, 分数阶流控忆感器磁通量的频谱中不仅含有直流分量, 而且还含有其他频率的交流分量, 频率为 1 Hz 的交流分量的幅值比基波幅值大。随着非线性窗函数中控制参数  $n$  的增大, 忆感器磁通量频谱中高频分量的幅值逐渐增大, 在频谱中的权重逐渐加大。而直流分量的幅值变化不大。

### 3.2 忆感器在正弦信号激励下的幅频响应特性

上一小节研究了带有非线性窗函数的分数阶流控忆感器在阶跃信号激励下的幅频响应特性, 本小节将研究分数阶流控忆感器在正弦信号激励下的幅频响应特性。

在忆感器两端施加如式(12)所示正弦电流信号

$$i(t) = I \sin(2\pi ft) \tag{12}$$

由公式(8)和(12)可以得到忆感值的表达式, 如公式(13)所示。

$$L_m = \left[ \sqrt{L_{\min}} + \left( x_0^{\alpha+1} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2\pi f)^\alpha} Ink \sin\left(2\pi ft - \frac{\pi}{2}\alpha\right) \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} (\sqrt{L_{\max}} - \sqrt{L_{\min}}) \right]^2 \tag{13}$$

因此, 分数阶流控忆感器在正弦信号激励下磁通量的表达式如公式(14)所示。

$$\phi = I \sin(2\pi ft) \left[ \sqrt{L_{\min}} + \left( x_0^{\alpha+1} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2\pi f)^\alpha} Ink \sin\left(2\pi ft - \frac{\pi}{2}\alpha\right) \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} (\sqrt{L_{\max}} - \sqrt{L_{\min}}) \right]^2 \tag{14}$$

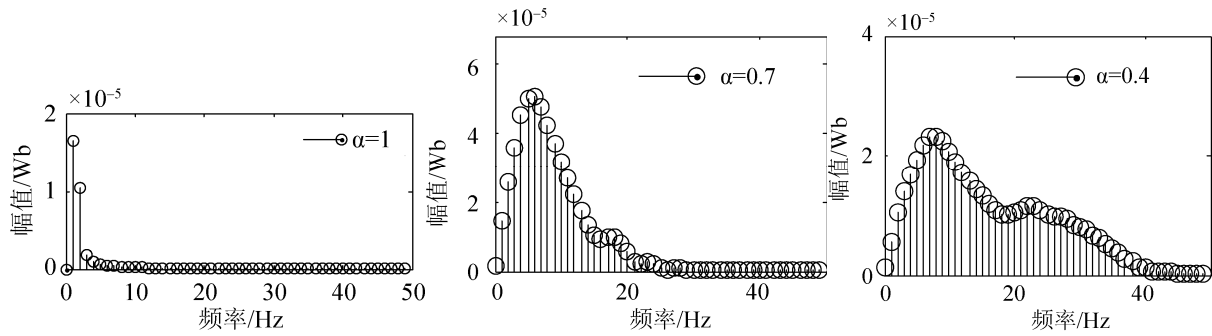
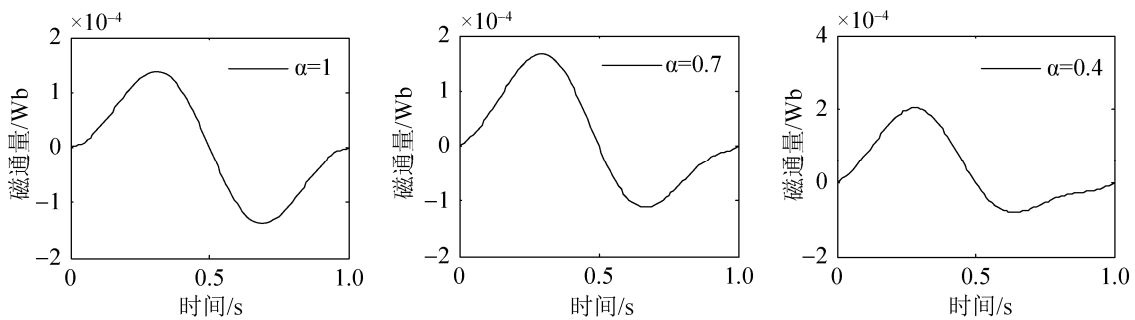
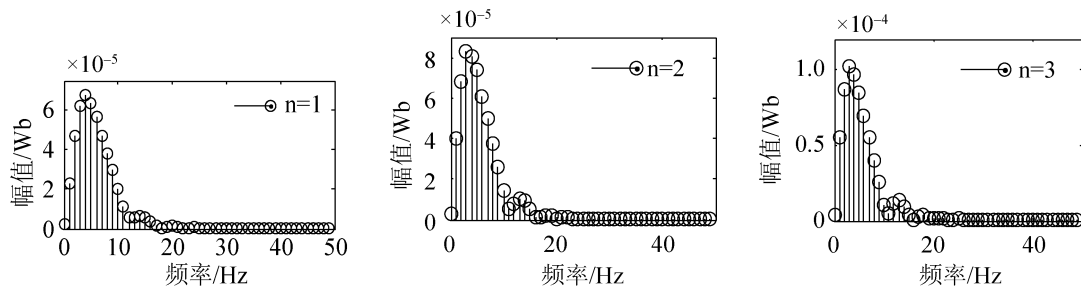
由公式(14)可知, 在正弦信号激励下分数阶流控忆感器的磁通量  $\phi$  是一个以  $\alpha, n$  为参数的函数。对磁通量  $\phi$  进行离散分数阶傅里叶变换即可得到其幅频特性曲线, 下面通过实验来观察分数阶流控忆感器磁通量的幅频特性。

首先研究分数阶阶次  $\alpha$  对分数阶流控忆感器磁通量幅频特性的影响。实验所用参数如下:  $f=1$  Hz,  $x_0=0.25$ ,  $k=10$ ,  $L_{\min}=1$ mH,  $L_{\max}=20$ mH, 激励信号  $i(t) = 50 \sin(2\pi ft)$  mA,  $n=1$ 。当  $\alpha$  取不同值时, 分数阶忆感器磁通量的幅频特性曲线如图 4 所示。

由图 4 可以看出, 当  $\alpha=1$ , 也就是整数阶时, 基波的幅值最大, 高次谐波的幅值随着谐波阶次的增加而减小, 其幅频特性曲线与整数阶傅立叶变换的结果相吻合, 这也说明了分数阶傅立叶变换是整数阶傅立叶变换的扩展。随着分数阶阶次  $\alpha$  的减小, 忆感器磁通量频谱中高次谐波的幅值逐渐增大, 频谱形状与图 5 所示的时域曲线形状相比较, 在低频段越来越相似, 忆感器磁通量频谱中幅值最大的谐波分量也相应地变为更高次的谐波。

其次观察控制参数  $n$  对分数阶流控忆感器磁通量幅频特性的影响。实验参数如下  $f=1$  Hz,  $x_0=0.25$ ,  $k=10$ ,  $L_{\min}=1$  mH,  $L_{\max}=20$  mH, 激励信号  $i(t) = 50 \sin(2\pi ft)$  mA,  $\alpha=0.8$ 。当  $n$  取不同值时, 分数阶流控忆感器磁通量的幅频特性曲线见图 6。

由图 6 可以看出, 阶次一定,  $n$  取不同值时, 忆感器磁通量频谱的形状十分相似。随着控制参数  $n$  的增大, 分数阶流控忆感器磁通量频谱中高次谐波的幅值逐渐增大。

图4  $\alpha$ 取不同值时分数阶流控忆感器的磁通量 $\phi$ 在正弦信号激励下的幅频特性曲线Fig. 4 Amplitude-frequency characteristic curves under sinusoidal signal excitation of magnetic flux  $\phi$  of the fractional-order current-controlled meminductor with different orders  $\alpha$ 图5  $\alpha$ 取不同值时分数阶流控忆感器的磁通量 $\phi$ 在正弦信号激励下的时域特性曲线Fig. 5 Time domain characteristic curves under sinusoidal signal excitation of magnetic flux  $\phi$  of the fractional-order current-controlled meminductor with different orders  $\alpha$ 图6  $n$ 取不同值时分数阶流控忆感器的磁通量 $\phi$ 在正弦信号激励下的幅频特性曲线Fig. 6 Amplitude-frequency characteristic curves under sinusoidal signal excitation of magnetic flux  $\phi$  of the fractional-order current-controlled meminductor with different control parameters  $n$ 

### 3.3 忆感器在非正弦周期信号激励下的幅频响应特性

对分数阶流控忆感器施加如公式(15)所示的方波激励信号,

$$i(t) = \begin{cases} I_{01} & 0 < \tau \leq \beta T \\ I_{02} & \beta T < \tau \leq T \end{cases} \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (15)$$

式中:  $T$ 为信号周期;  $\tau = \text{mod}(t, T)$ 。

将公式(15)代入公式(8)可以得到分数阶流控

忆感器在方波信号激励下的忆感值表达式,如公式(16)所示。

$$L_m = \left[ \sqrt{L_{\min}} + \left( \sqrt{L_{\max}} - \sqrt{L_{\min}} \right) \left( \left( x_0^{\alpha+1} + (\alpha+1)nkI_{01}\tau^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right. \right. \\ \left. \left. \begin{cases} 0 < \tau \leq \beta T \\ \left( x_0^{\alpha+1} + (\alpha+1)nk \left( I_{01}(\beta T)^\alpha + I_{02}(\tau^\alpha - (\beta T)^\alpha) \right) \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \\ \beta T < \tau \leq T \end{cases} \right)^2 \right] \quad (16)$$



因此, 分数阶流控忆感器在方波信号激励下磁通量的表达式如公式(17)所示:

$$\phi = \begin{cases} \left[ \sqrt{L_{\min}} + (\sqrt{L_{\max}} - \sqrt{L_{\min}}) \left( x_0^{\alpha+1} + (\alpha+1)nkI_{01}\tau^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right]^2 I_{01} & 0 < \tau \leq \beta T \\ \left[ \sqrt{L_{\min}} + (\sqrt{L_{\max}} - \sqrt{L_{\min}}) \left( x_0^{\alpha+1} + (\alpha+1)nk \left( I_{01}(\beta T)^\alpha + I_{02}(\tau^\alpha - (\beta T)^\alpha) \right) \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right]^2 I_{02} & \beta T < \tau \leq T \end{cases} \quad (17)$$

由公式(16)可知, 在非正弦周期信号激励下分数阶流控忆感器的忆感值是一个以  $\alpha, n, T, i(t)$  为参数的函数。由于电流激励信号  $i(t)$  在正负之间交替变化, 因此, 分数阶忆感器的忆感值随着电流的变化周期性地增大、减小。下面通过实验来观察分数阶流控忆感器的忆感值变化特性。

实验参数如下:  $x_0=0.25, k=10, L_{\min}=1 \text{ mH}, L_{\max}=20 \text{ mH}, I_{01}=-I_{02}=4\text{mA}, T=2 \text{ s}, n=1, \alpha=0.8, \beta=0.5$ 。分数阶流控忆感器忆感值的时域特性曲线如图 7 所示。由图(7)可以看出分数阶忆感器的忆感值随着电流的变化周期性地增大、减小。

由公式(17)可知, 在非正弦周期信号激励下分数阶流控忆感器的磁通量  $\phi$  是一个以  $\alpha, n$  为参数的函数。对磁通量  $\phi$  进行离散分数阶傅里叶变换即可以得到其幅频特性曲线, 下面通过实验来观察分数阶流控忆感器的幅频特性。

实验参数如下:  $x_0=0.25, k=10, L_{\min}=1 \text{ mH}, L_{\max}=20 \text{ mH}, I_{01}=-I_{02}=5 \text{ mA}, T=1 \text{ s}, n=1, \beta=0.5$ 。当分数阶阶次  $\alpha$  取不同值时, 分数阶流控

忆感器磁通量的幅频特性曲线如图 8 所示。

由图(8)可以看出, 当  $\alpha=1$  时, 忆感器磁通量频谱中基波的幅值最大, 随着分数阶阶次  $\alpha$  的减小, 忆感器磁通量频谱中直流和低次谐波的幅值减小而高次谐波的幅值逐渐增大, 其频谱曲线的形状与时域波形相比较在低频段越来越相似。

其次观察控制参数  $n$  对分数阶流控忆感器磁通量幅频特性的影响。实验参数如下,  $x_0=0.25, k=10, L_{\min}=1 \text{ mH}, L_{\max}=20 \text{ mH}, \alpha=0.8, I_{01}=-I_{02}=5 \text{ mA}, T=1 \text{ s}, \beta=0.5$ 。

由图 9 可以看出, 当  $\alpha=0.8, n$  取不同值时, 忆感器磁通量频谱中十次谐波的幅值最大, 其频谱波形相似。随着控制参数  $n$  的增大, 忆感器磁通量频谱中低次谐波分量的幅值逐渐减小, 而高次谐波分量的幅值逐渐增大。

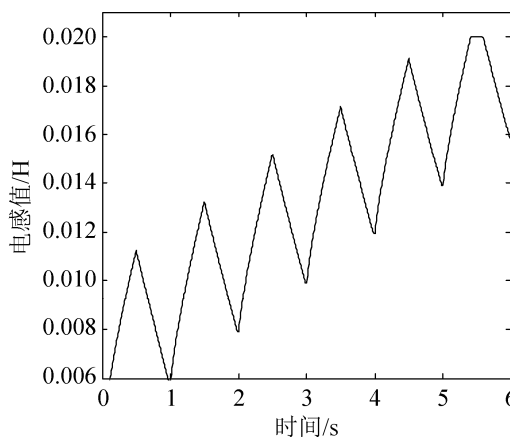


图 7 分数阶流控忆感器的忆感值在非正弦周期信号激励下的时域曲线

Fig. 7 Time domain curve of meminductance of fractional-order current-controlled meminductor under nonsinusoidal periodic signal excitation

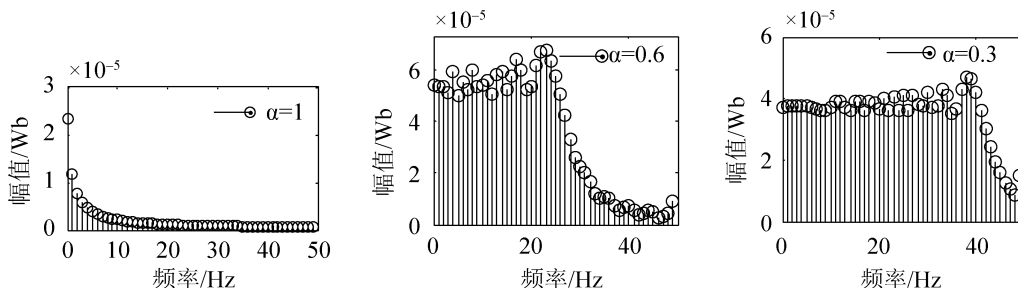


图 8  $\alpha$  取不同值时分数阶流控忆感器的磁通量  $\phi$  在非正弦周期信号激励下的幅频特性曲线

Fig. 8 Amplitude-frequency characteristic curves under non sinusoidal signal periodic excitation of magnetic flux  $\phi$  of the fractional-order current-controlled meminductor with different orders  $\alpha$

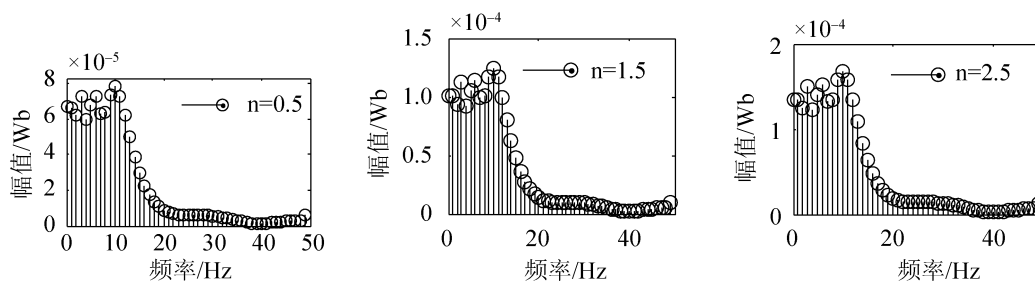


图9  $n$ 取不同值时分数阶流控忆感器的磁通量 $\phi$ 在非正弦周期信号激励下的幅频特性曲线

Fig. 9 Amplitude-frequency characteristic curves under non sinusoidal signal periodic excitation of magnetic flux  $\phi$  of the fractional-order current-controlled meminductor with different control parameters  $n$

## 4 结论

本文介绍了分数阶傅里叶变换的基本理论,在现有整数阶流控忆感器模型的基础上研究了一种带有非线性窗函数的分数阶流控忆感器的幅频特性。详细分析了分数阶流控忆感器的磁通量在阶跃信号、正弦和非正弦周期信号激励下的幅频响应特性,并归纳总结了分数阶阶次和非线性窗函数的控制参数对分数阶流控忆感器幅频特性影响的规律。研究发现,非线性窗函数的控制参数一定时,随着分数阶阶次的减小,分数阶流控忆感器磁通量高频分量的幅值逐渐增大。当分数阶阶次一定时,随着非线性窗函数控制参数的增大,分数阶流控忆感器磁通量高频分量的幅值逐渐增大。这对忆感器频域特性的分析与研究具有一定的指导意义。

## 参考文献:

- [1] Chua L O. Memristor-The missing circuit element[J]. IEEE Transactions on Circuit Theory (S0018-9324), 1971, 18(5): 507-519.
- [2] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, et al. The missing memristor found[J]. Nature (S0028-0836), 2008, 453(7191): 80-83.
- [3] Jinde CAO, Ruoxia LI. Fixed-time synchronization of delayed memristor-based recurrent neural networks[J]. Science China (Information Sciences), 2017, 60(3): 108-122.
- [4] 王伟, 曾以成, 孙睿婷. 含三个忆阻器的六阶混沌电路研究[J]. 物理学报, 2017, 66(4): 29-39.  
Wang Wei, Zeng Yicheng, Sun Ruiting. Research on a six-order chaotic circuit with three memristors[J]. Acta Phys. Sin. 2017, 66(4): 29-39.
- [5] 闵富红, 王珠林, 王恩荣, 等. 新型忆阻器混沌电路及其在图像加密中的应用[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(10): 2681-2688.  
Min Fuhong, Wang Zhulin, Wang Enrong, et al. New Memristor Chaotic Circuit and Its Application to Image Encryption[J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2016, 38(10): 2681-2688.
- [6] Zhu S, Wang L, Duan S. Memristive pulse coupled neural network with applications in medical image processing[J]. Neurocomputing (S0925-2312), 2017, 227(1): 149-157.
- [7] Duan S K, Hu X F, Wang L D, et al. Memristor-based RRAM with applications[J]. Science China Information Sciences (S1674-733X), 2012, 55(6): 1446-1460.
- [8] Ho P W C, Almurib H A F, Kumar TN. Memristive SRAM cell of seven transistors and one memristor[J]. Journal of Semiconductors (S1674-4926), 2016, 37(10): 56-59.
- [9] Ventra M D, Pershin Y V, Chua L O. Circuit elements with memory: memristors, memcapacitors and meminductors [J]. Proc IEEE (S0018-9219), 2009, 97(10): 1717-1724.
- [10] Fouda M E, Radwan A G. Memristor-less current- and voltage-controlled meminductor emulators[C]. IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems. IEEE, 2014: 279-282.
- [11] Birolek D, Birolek Z, Biolkova V. PSPICE modeling of meminductor[J]. Analog Integrated Circuits and Signal Processing (S0925-1030), 2011, 66(1): 129-137.
- [12] Fouda M E, Radwan A G. Meminductor Response Under Periodic Current Excitations[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing (S0278-081X), 2014, 33(5): 1573-1583.
- [13] Biolkov, Viera, Birolek D, et al. Fourier analysis of memristor excited by sinusoidal signal[C]. International Conference on Mathematical MODELS for Engineering Science, and Proceedings of the, International Conference

- on Development, Energy, Environment, Economics, and Proceedings of the, International Conference on Communication and Management in Technological Innovation and Academic Globalization. World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), 2011: 154-159.
- [14] 邵岩. 分数阶傅里叶变换算法的应用研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2016.
- Shao Yan. The Application of Fractional Fourier Transform in Signal Analysis[D]. Harbin: Harbin University of Science and Technology, 2016
- [15] Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing (S1053-587X), 1994, 42(11): 3804-3091.
- [16] 陶然. 分数阶傅里叶变换及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
- Tao Ran. Fractional fourier transform and its applications[M]. Beijing: TsingHua University Press, 2009.
- [17] Ozaktas H M, Arikan O, Kutay M A, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform [J]. IEEE Transactions on Signal Processing (S1053-587X), 1996, 44(9): 2141-2150.