Journal of System Simulation

Volume 31 | Issue 5 Article 1

11-20-2019

Modified Sparse Quasi - Newton Algorithm for Electrical Capacitance Tomography System

Chen Yu
College of Information and Computer Engineering of Northeast Forestry University, Harbin 150040, China;

Zongji Xia
College of Information and Computer Engineering of Northeast Forestry University, Harbin 150040, China;

Yujia Zhou
College of Information and Computer Engineering of Northeast Forestry University, Harbin 150040, China;

Modified Sparse Quasi - Newton Algorithm for Electrical Capacitance Tomography System

Abstract

Abstract: To solve the 'soft-field' nature and the ill-posed problem in electrical capacitance tomography technology, a modified sparse quasi - newton algorithm for electrical capacitance tomography is presented. The mathematical model of modified sparse quasi - newton is derived. The final iteration formula of modified sparse quasi - newton used to adjust the inverse problem solving of the capacitance tomography image reconstruction is given. An iterative formula for ECT inverse problem solving is used for digital simulation experiment. The simulation experiment results are compared with the results of LBP, Landweber, CG, SD, and so on. *The results of the analysis show that both precision and speed of the algorithm are very good*.

Keywords

electrical capacitance tomography, modified sparse quasi - newton, image reconstruction, iterative algorithm, convergence

Recommended Citation

Chen Yu, Xia Zongji, Zhou Yujia. Modified Sparse Quasi - Newton Algorithm for Electrical Capacitance Tomography System[J]. Journal of System Simulation, 2019, 31(5): 819-827.

第 31 卷第 5 期 系统仿真学报© Vol. 31 No. 5
2019 年 5 月 Journal of System Simulation May, 2019

基于修正稀疏拟牛顿的电容层析成像重建算法

陈宇，夏宗基，周雨佳
(东北林业大学信息与计算机工程学院，哈尔滨 150040)

摘要：针对电容层析成像(ECT)技术中的“软场”效应和病态问题，提出一种基于修正稀疏拟牛顿的电容层析成像重建算法。推导出基于修正稀疏拟牛顿的数学模型。给出运用该算法的电容层析成像图像重建这一反问题求解的最终迭代公式。将 ECT 反问题求解的迭代公式用于数字仿真模拟实验。将仿真实验结果与经典的 LBP 算法、Landweber 算法、CG 算法、SD 算法等成像结果比较分析，证明*基于修正稀疏拟牛顿重建算法在解决 ECT 图像重建问题上，其图像成像质量与收敛速度，都有很好的保证。*

关键词：电容层析成像；修正稀疏拟牛顿；图像重建；迭代算法；收敛性
中图分类号：TN911.73 文献标识码：A 文章编号：1004-731X (2019) 05-0819-09
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.17-0287

Modified Sparse Quasi - Newton Algorithm for Electrical Capacitance Tomography System

Chen Yu, Xia Zongji, Zhou Yujia
(College of Information and Computer Engineering of Northeast Forestry University, Harbin 150040, China)

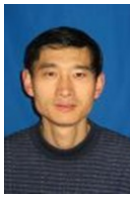
Abstract: To solve the 'soft-field' nature and the ill-posed problem in electrical capacitance tomography technology, a modified sparse quasi - newton algorithm for electrical capacitance tomography is presented. The mathematical model of modified sparse quasi - newton is derived. The final iteration formula of modified sparse quasi - newton used to adjust the inverse problem solving of the capacitance tomography image reconstruction is given. An iterative formula for ECT inverse problem solving is used for digital simulation experiment. The simulation experiment results are compared with the results of LBP, Landweber, CG, SD, and so on. *The results of the analysis show that both precision and speed of the algorithm are very good.*

Keywords: electrical capacitance tomography; modified sparse quasi - newton; image reconstruction; iterative algorithm; convergence

引言

过程层析成像技术简称为 PT(Process Tomography，PT)技术，开始于 20 世纪 80 年代，其包括电容层析成像技术(Electrical Capacitance Tomography，ECT)、电阻层析成像技术(ERT)和电磁层析成像技术(EMT)。它们分别依据测量不同的电学特性，来进行相关信息的重建工作。其中 ECT 技术就是利用传感器测量得到的电容信号，依照某种算法重建出介质内部的介电常数分布情况。

ECT 技术作为 PT 技术的一种，相比其它 PT 技术而言，拥有诸多优点。如成本低、可靠性高、



收稿日期：2017-06-15 修回日期：2017-09-11；
基金项目：国家自然科学基金(31670717)，中央高校基本科研业务费(572017EB09)；
作者简介：陈宇(1975-)，男，黑龙江伊春，博士后，副教授，研究方向为探测与成像，图像处理。

简单易实现等[1-2]。另外 ECT 的非侵入性、高安全性和高速度性使其在解决连续非导电物质的两相流、多相流成像问题中产生很好的效果，从而证明是一种非常适合于两相或多相流成像过程的技术。目前，ECT 技术在许多两相和多相流检测方面得到了广泛应用，比如，能源、冶金、石油化工、制冷、医药、环境保护等领域[3]。

Isaksen O 曾经就对 ECT 的各种图像重建算法进行过一次综合表述[4]。近些年，Tikhonov 正则化方法[5]、Gauss-Newton 正则化方法[6]、快速模拟退火全局优化算法[7]、遗传算法[8]、支持向量机法[9]等一系列新的 ECT 图像重建算法又被提出。目前，对于 ECT 图像重建最常用几种方法有直接算法中的 LBP 法[10]和 Tikhonov 正则化法，迭代算法中的共轭梯度(CG)法[11]和 Landweber 迭代法[12]。

由于 ECT 技术本身的“软场”效应以及非线性的特点，使 ECT 系统的解非常容易随着多项流体的变化而改变，稳定性差，并且很难用具体的数学解析式进行描述。采用针对与该非线性问题“邻近”的线性问题的解法不断逼近要得到的解的这样一种思想是简单而有效的。ECT 技术成功与否的关键在于 ECT 反问题求解的图像精度与收敛速度的优劣。Landweber 迭代算法[13]在改善迭代稳定性，控制噪声方面效果比较明显，从而使成像速度较快，但是该算法需要进行大量迭代才能达到预期效果。模拟退火算法、遗传算法和支持向量机法在某方面的优越性上有所强化，但却以牺牲其它性能作为代价，因此只能在特定领域中有所应用。电容层析成像技术要实现满足工业实际应用需求的目标，紧紧地依赖于 ECT 图像重建算法的效果，所以寻找优秀的 ECT 图像重建算法是值得一直研究的目标。

1970 年，Schubert 将拟牛顿校正推广到不对称稀疏矩阵上，提出了解非线性方程组的稀疏拟牛顿法。再后来，Powell，Toint 和 Schanno 在先后推导出稀疏拟牛顿校正公式。修正稀疏拟牛顿算法存储量小，并且具有较好的收敛性质，适合解决大型问题。例如结构分析，网络理论，电力系统分配，微分方程数值解，数学物理反问题求解以及各种计算机程序设计问题中。

本文在电容层析成像的基础上，提出一种基于修正稀疏拟牛顿算法。该算法可以增强图像重建的稳定性，提高重建图像的质量。通过实验，证明基于修正稀疏拟牛顿算法仿真实验结果证明此算法可以达到研究目的。在与采用 LBP、经典 Landweber、CG 以及 SD 方法的仿真实验的重建图像、误差率和迭代次数进行对比后，可以发现本文提出的基于修正稀疏拟牛顿的电容层析成像图像重建方法显示出了其自身图像成像的优势，为 ECT 技术图像重建领域提供了一种有效可行的新方法。

1 电容层析成像系统及 ECT 技术原理概要

在 ECT 研究中，常用的有 6，8，12，16 电极的 ECT 系统。这里来讨论典型 12 电极的 ECT 系统。12 电极 ECT 系统主要组成部分有：电容传感器、测量与数据采集系统和成像计算机[14-15]，如图 1 所示。

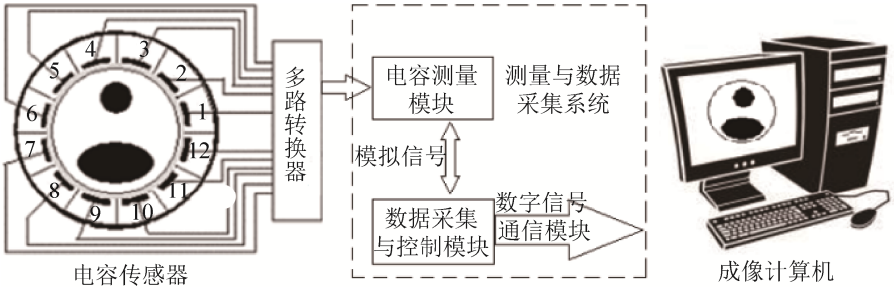


图 1 12 电极 ECT 系统组成
Fig. 1 Composition of 12 electrode ECT system

https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal/vol31/iss5/1
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.17-0287

ECT 技术的原理就是，根据不同相元素介电常数各不相同的特性，用电容传感器上的电极板对被测流体施加电压后，经数据采集系统测得的流体流动产生的变化的电容值，通过 ECT 图像重建算法，得到不同相元素的介电常数的分布，得到被测流体的截面重建图像。

本文分析对象为经典的 12 电极的电容传感器系统。通常，一个 N 电极板构成的传感器可以得到的电容值总数 M 为：

$$M = C_N^2 = N(N-1)/2 \tag{1}$$

测量过程：从 12 个电极板中选择任意一个极板当作起点，给 12 个电极板进行逆时针编号。若选择极板 1 作为公共电极，其余的电极板编号是 2，3,…, 12 的作为检测电极板。将固定电压 U 加在源极板上，测量电容值 1-2，1-3,…, 1-12，测量的前提是没有被使用的电极在测量时都必须接地。依照以上流程实验后把电极板 2 当作公共电极，其余的作为检测电极，按照以上的方法继续检测 2-3，2-4,…, 2-12 极板之间的电容值。如上步骤，最后测量 11-12 极板之间的电容值，测量过程结束。最后总共得到 66 组数据。

如今，大部分的 ECT 图像重建算法都是基于介电常数到电容映射的线性模型。经过离散化、线性化和归一化的模型如式(2)所示：

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{SG} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{C} \in R^m$ 表示归一化电容向量；$\boldsymbol{S} \in R^{m\times n}$ 表示系数矩阵(灵敏度矩阵)；$\boldsymbol{G} \in R^n$ 表示归一化介质分布图像向量。其中，ECT 图像重建的任务就是由给定的电容值 $\boldsymbol{C}$ 最终求解得到介电常数分布 $\boldsymbol{G}$。依据电容值 $\boldsymbol{C}$ 来得出介电常数 $\boldsymbol{G}$ 的空间分布为 ECT 图像重建的核心重点所在。

2 基于修正稀疏拟牛顿的电容层析成像重建算法

2.1 基于稀疏拟牛顿的 ECT 图像重建模型

修正稀疏拟牛顿法[16]要求产生稀疏拟牛顿校正，它满足拟牛顿条件：

$$\boldsymbol{B}_{k+1}\boldsymbol{s}_k = \boldsymbol{y}_k \tag{3}$$

并保持对称性和稀疏性。省略下标，要求一个矩阵 $\overline{\boldsymbol{B}}$：

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{E} \tag{4}$$

其中，E 满足：

$$\boldsymbol{Es} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Bs} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^T \tag{6}$$

$$E_{ij} = 0, (i,j) \in I \tag{7}$$

其中，I 是一个整数对集合，它指出了稀疏性的要求，即当 $(i,j) \in I$ 时，$B_{ij} = 0$。又设 J 是一个不属于 I 的整数对集合，它是 I 的补集，且设对角元不受稀疏性条件的约束，即 $(i,j) \in J$ 时，$\forall i$，又设：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Bs} \tag{8}$$

由于式(5)~(7)并不能完全确定修改矩阵 $\boldsymbol{E}$，为了确定 $\boldsymbol{E}$，要求 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 按照某种范数尽可能的靠近 B，因此，采用 Frobenius 范数，考虑如下极小化问题：

$$\min \frac{1}{2} \| \boldsymbol{E} \|_F^2 \tag{9}$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{Es} = \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^T$$

$$E_{ij} = 0, (i,j) \in I$$

使用 s_j 表示向量 $\boldsymbol{s}$ 的第 j 个分量，定义向量 $s(i)$ 的分量为：

$$s(i)_j = \begin{cases} s_j, (i,j) \in J \\ 0, (i,j) \in I \end{cases} \tag{10}$$

那么公式(9-a)成为：

$$\sum_{j=1}^{n} E_{ij} s(i)_j = r_i, i = 1, \ldots, n \tag{11}$$

令 $\boldsymbol{E}$ 的取值为：

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T) \tag{12}$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不一定满足对称性，于是公式(9)变成求矩阵 $\boldsymbol{A}$，使得 $\min 1/8 \| \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T \|_F$，从而得到：

$$\sum_{j=1}^{n} (A_{ij} + A_{ji}) s(i)_j = 2r_i, i = 1, \ldots, n \tag{13}$$

使得所有不明显出现在约束中的元素变成 0。对式(13)的极小化问题，它的 Lagrange 函数为：

$$\phi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\lambda})=\frac{1}{8}\sum_{i=i}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A_{ij}^2+A_{ji}^2+2A_{ij}A_{ji})-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i[\sum_{j=1}^{n}(A_{ij}+A_{ji})s(i)_j-2r_i] \tag{14}$$

令其导数为 0，得：

$$\frac{\partial\phi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\lambda})}{\partial A_{ij}}=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})-\lambda_i s(i)_j-\lambda_j s(j)_i=0$$
$$i,j=1,2,...,n \tag{15}$$

依据式(12)，式(16)等价于：

$$E_{ij}=\lambda_i s(i)_j+\lambda_j s(j)_i, i,j=1,2,...,n \tag{16}$$

注意到式(13)可以用式(11)来代替，并将式(16)带入，则式(11)可以表示为：

$$\sum_{j=1}^{n}[\lambda_i s(i)_j+\lambda_j s(j)_i]s(i)_j=r_i, i=1,2,...,n \tag{17}$$

此即：

$$\lambda_i\sum_{j=1}^{n}[s(i)_j]^2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j s(j)_i s(i)_j=r_i,$$
$$i=1,2,...,n \tag{18}$$

这样，就可以得到校正公式：

$$\overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i[\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{s}(i)^T+\boldsymbol{s}(i)\boldsymbol{e}_i^T] \tag{19}$$

式中：$\boldsymbol{e}_i$ 表示第 i 列单位向量；$\boldsymbol{\lambda}$ 是 Lagrange 乘子；满足关系：

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{s}(i)^T\boldsymbol{s}\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}(i))\boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{r} \tag{20}$$

考虑稀疏拟牛顿校正，给出校正公式为：

$$\overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}+\frac{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T}{\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{y}}-\frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{s}} \tag{21}$$

这里假设 $\boldsymbol{B}$ 具有某种稀疏性结构，由式(21)定义的 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 不具有这种稀疏性结构，为了修改 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 使其具有这种稀疏性结构，我们定义：

$$\hat{\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{B}}+\boldsymbol{E} \tag{22}$$

考虑极小化问题：

$$\min\|\boldsymbol{E}\|_F=\frac{1}{2}Tr(\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}) \tag{23}$$

使得：

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{s}=0 \tag{24}$$

$$E_{ij}=-\overline{B}_{ij},(i,j)\in I \tag{25}$$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^T \tag{26}$$

这样，式(23)的解具有所需要的稀疏性结构，并且在 Frobenius 范数意义上是最靠近稀疏拟牛顿校正的稀疏矩阵。为了求解式(23)，定义 Lagrange 函数 ϕ 为：

$$\phi(\boldsymbol{E},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\lambda})=\frac{1}{2}Tr(\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})-Tr(\boldsymbol{E}\boldsymbol{s}\boldsymbol{u}^T)-Tr(\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^T))-\sum_{(i,j)\in I}\lambda_{ij}Tr(\boldsymbol{\Delta}^T(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}))\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i^T=\frac{1}{2}Tr(\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})-Tr(\boldsymbol{E}\boldsymbol{s}\boldsymbol{u}^T)-Tr(\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^T))-Tr(\boldsymbol{\Delta}^T(\boldsymbol{E}+\overline{\boldsymbol{B}})) \tag{27}$$

式中：$\boldsymbol{\Delta}$ 是一个矩阵；当 $(i,j)\in I$ 时，它的元素为 λ_{ij}，当 $(i,j)\in J$ 时，它的元素为 0。将式(27)进行微分，解得：

$$\frac{\partial\phi}{\partial E}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{s}\boldsymbol{u}^T-\boldsymbol{\Lambda}^T+\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Delta}=0 \tag{28}$$

也就是：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{s}\boldsymbol{u}^T+\boldsymbol{\Delta}-\boldsymbol{\Lambda}^T+\boldsymbol{\Lambda} \tag{29}$$

$$\boldsymbol{E}^T=\boldsymbol{u}\boldsymbol{s}^T+\boldsymbol{\Delta}^T+\boldsymbol{\Lambda}^T-\boldsymbol{\Lambda} \tag{30}$$

利用式(24)，得：

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^T=\boldsymbol{s}\boldsymbol{u}^T-\boldsymbol{u}\boldsymbol{s}^T+\boldsymbol{\Delta}-\boldsymbol{\Delta}^T+2(\boldsymbol{\Lambda}^T-\boldsymbol{\Lambda})=0 \tag{31}$$

也就是：

$$\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}^T=\frac{1}{2}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{u}^T-\boldsymbol{u}\boldsymbol{s}^T+\boldsymbol{\Delta}-\boldsymbol{\Delta}^T) \tag{32}$$

结合式(29)和(32)，得：

$$e_i^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{e}_j=\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{e}_j+\lambda_{ij}+\lambda_{ji})=-\overline{B}_{ij} \tag{33}$$

进而可得：

$$\lambda_{ij}+\lambda_{ji}=-2\overline{B}_{ij}-\boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{e}_j,(i,j)\in I \tag{34}$$

从而式(31)可以写成：

$$\boldsymbol{\Delta}+\boldsymbol{\Delta}^T=-2\overline{B}_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^T(\boldsymbol{u}\hat{\boldsymbol{s}}(i)^T+\boldsymbol{s}\hat{\boldsymbol{u}}(i)^T) \tag{35}$$

其中：$\overline{B}_{ij}^{(I)}=\begin{cases}\overline{B}_{ij},(i,j)\in I\\0,(i,j)\in J\end{cases}$；$\hat{s}(i)_j=\begin{cases}s_j,(i,j)\in I\\0,(i,j)\in J\end{cases}$；$\hat{u}(i)_j=\begin{cases}u_j,(i,j)\in I\\0,(i,j)\in J\end{cases}$。

根据式(32)，可以得：

https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal/vol31/iss5/1
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.17-0287

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^T(\boldsymbol{u}\boldsymbol{s}^T+\boldsymbol{s}\boldsymbol{u}^T)-2\overline{\boldsymbol{B}}^{(I)}-\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^T(\boldsymbol{u}\hat{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{i})^T)+\boldsymbol{s}\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{i})^T]=\frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^T(\boldsymbol{u}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{i})^T+\boldsymbol{s}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{i})^T)-2\overline{\boldsymbol{B}}^{(I)}] \quad (36)$$

其中，$u(i)_j=\begin{cases}u_i,(i,j)\in J\\0,(i,j)\in I\end{cases}$，再由式(24)可得出公式：

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n}e_ie_i^T(\boldsymbol{u}s(i)^T+\boldsymbol{s}u(i)^T)-2\overline{\boldsymbol{B}}^{(I)}]\boldsymbol{s}=0 \quad (37)$$

从而得到：

$$\sum_{i=1}^{n}e_ie_i^T(\boldsymbol{u}s(i)^T\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}u(i)^T\boldsymbol{s})=2\overline{\boldsymbol{B}}^{(I)}\boldsymbol{s} \quad (38)$$

这样，可以通过式(35)求解出 u_i，便可得到公式：

$$\hat{\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{B}}^{(I)}+\sum_{i=1}^{n}u_i(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{s}(i)^T+\boldsymbol{s}(i)\boldsymbol{e}_i^T) \quad (39)$$

其中，$\overline{\boldsymbol{B}}^{(I)}$ 由式(19)定义，并满足稀疏性。这个校正公式称为基于稀疏拟牛顿校正公式。

2.2 基于修正稀疏拟牛顿的算法步骤

基于修正稀疏拟牛顿算法的计算步骤如下：

给出初始正定矩阵 $\boldsymbol{B}_0$，初始点 $\boldsymbol{G}_0$，k=0。

步骤 1：$0<u<1$，选取初始点 $\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{x}_1\in R^n$，$k:=1,\varepsilon>0$。

步骤 2：若 $\|\boldsymbol{y}_k\|<\varepsilon$，则停，否则转步骤 3。

步骤 3：求解 $\min\limits_{B_k\in P_+}\|\boldsymbol{B}_{k+1}\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{s}_k\|_2^2$ 得 B_k，令 $\boldsymbol{d}_k=-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{y}_k$。

步骤 4：$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{\alpha}_k\boldsymbol{d}_k$，$\alpha_k$ 为 $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},....\}$ 中满足公式 $f(x_k)-f(x_k+\alpha d_k)\geqslant\ -\alpha^u g_k^T d_k$ 中最大的数。

步骤 5：$k:=k+1$，转步骤 1。

对于步骤 4 所采用的迭代公式，根据 ECT 反问题的不适定性以及自身的病态性，如果直接使用基于稀疏拟牛顿算法求解，会造成解的不稳定的现象，从而导致 ECT 图像重建的效果变的不理想。根据上面的稀疏拟牛顿算法，对于本次问题，我们采用在正定矩阵 $\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s}$ 后面加入一个单位矩阵，并使用系数 λ_k 来进行修正，使得迭代式拥有很好的正则化性质，从而得到修正后的稀疏拟牛顿算法公式。这样即使当 s 灵敏度矩阵奇异时，避免了迭代公式收敛到一个非驻点的情况。本篇文章修正后的最终的迭代公式如下：

$$\boldsymbol{G}_{k+1}=\boldsymbol{G}_k+(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}+\boldsymbol{B}_k+\boldsymbol{\lambda}_k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{S}\boldsymbol{G}_k) \quad (40)$$

2.3 基于修正稀疏拟牛顿的 ECT 图像重建算法的收敛性分析

下面对本文的校正算法的收敛性进行分析：

对于式(40)做如下标记：

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}+\boldsymbol{B}_k+\boldsymbol{\lambda}_k\boldsymbol{I} \quad (41)$$

这里 $\boldsymbol{W}$ 为正定矩阵，采用精确线性搜索时，作假设如下：

$$\boldsymbol{H}_{i+1}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_i=\Delta\boldsymbol{G}_i \quad (42)$$

$$\Delta\boldsymbol{G}_i^T\boldsymbol{W}\Delta\boldsymbol{G}_i=0 \quad (43)$$

当 $i=0$ 时，式(39)和式(40)成立，假定对于 i 成立，对于 $\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{S}\boldsymbol{G}_k)\neq\boldsymbol{0}$，当 $j\leqslant i$ 时，有式(44)：

$$\boldsymbol{g}_{i+1}^T\Delta\boldsymbol{G}_j=\boldsymbol{g}_{j+1}^T\Delta\boldsymbol{G}_j+\sum_{k=j+1}^{i}(\boldsymbol{g}_{k+1}-\boldsymbol{g}_k)^T\Delta\boldsymbol{G}_j=0 \quad (44)$$

由式(42)与式(44)得出：

$$\Delta\boldsymbol{G}_{i+1}^T\boldsymbol{W}\Delta\boldsymbol{G}_i=-\boldsymbol{\alpha}_{i+1}\boldsymbol{g}_{i+1}^T\boldsymbol{H}_{i+1}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_j=0 \quad (45)$$

由 $g(x)\approx g_{k+1}+Q_{k+1}(x-x_{k+1})$ 得：

$$\boldsymbol{H}_{i+2}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_{i+1}=\Delta\boldsymbol{G}_{i+1} \quad (46)$$

对于 $j\leqslant i$，由式(39)和式(42)，得到：

$$(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_{i+1})^T\boldsymbol{H}_{i+1}(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_{i+1})=\Delta\boldsymbol{G}_{i+1}^T\boldsymbol{W}\Delta\boldsymbol{G}_{i+1}=\boldsymbol{0} \quad (47)$$

$$\Delta\boldsymbol{G}_{i+1}^T\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_j=\Delta\boldsymbol{G}_{i+1}^T\boldsymbol{W}\Delta\boldsymbol{G}_j=\boldsymbol{0} \quad (48)$$

进一步有：

$$\boldsymbol{H}_{i+2}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_j=\boldsymbol{H}_{i+1}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_j+\frac{\Delta\boldsymbol{G}_{i+1}\Delta\boldsymbol{G}_{i+1}^T\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_j}{\Delta\boldsymbol{G}_{i+1}^T\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_{i+1}}--\frac{\boldsymbol{H}_{i+1}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_{i+1}(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_{i+1})^T\boldsymbol{H}_{i+1}(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_j)}{(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_{i+1})^T\boldsymbol{H}_{i+1}(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{G}_{i+1})}=\Delta\boldsymbol{G}_j \quad (49)$$

这样表明式(42)在 $j=0,1,\cdots,i+1$ 时成立，基于修正稀疏拟牛顿算法具有遗传性质和二次终止性，迭代步在 $m+1\leqslant n$ 步后终止，从而得证算法收敛。

3 仿真与实验结果

上文中给出了一系列的理论以及公式为下面的针对 ECT 图像重建的反问题提供基础。本次仿真实验的硬件有：12 电极的 ECT 系统，测试管道的横截面被分成 32×32 小型像素点。分析处理数据的计算机，配置为 Intel(R) Core(TM) i7-6700 @ 3.4 GHz 处理器，安装内存 8.0 GB，64 位操作系统。本次实验使用的图像处理软件为 MATLAB，进行后期图像的成像与分析。

本次实验主要针对低位层流，中位层流，小半径核心流以及方柱状流型这 4 种进行预先设定，采用 SD(最速下降)法，CG(共轭梯度)法，LBP(线性反投影)法，经典 Landweber 算法以及本文所研究的基于修正稀疏拟牛顿算法(XSBF)进分别进行图像的重建，将基于修正稀疏拟牛顿算法与其他算法的图像结果进行对比分析。

判定 ECT 技术能否成功应用的关键在于 ECT 反问题求解有良好的精确度以及合理的收敛速度，本仿真实验的实验精确度的判断标准是空间误差，通过计算出的空间误差来衡量成像质量的优劣。空间误差的计算公式为：

$$\varepsilon=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|g_{i(img)}-g_{i(init)}\right|}{\sum_{i=1}^{n}g_{i(init)}} \tag{50}$$

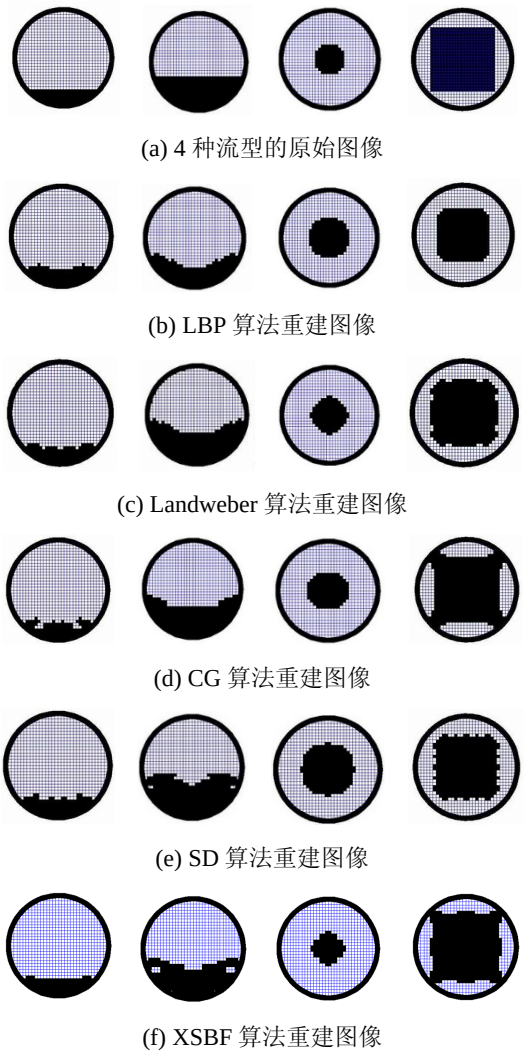
式中：n 表示成像区域单元总数；g_{img} 表示重建图像向量；g_{init} 表示介质分布原型图像向量；i 表示成像区域剖分单元索引。

实验中迭代次数多少是判断此次实验速度优劣的判定标准。迭代次数 N 越大，表示 ECT 图像重建的时间所花时间越长当实验的迭代误差达到一定值的时候就停止迭代，停止迭代的公式如下：

$$\left\|\boldsymbol{SG_k}-\boldsymbol{C}\right\|<\xi \tag{51}$$

如果满足式(51)的时候就停止迭代。

结合图 2 中 5 种算法的最佳重建图像对比分析，可明显发现基于修正稀疏拟牛顿算法的成像最为接近原流型。对于低位层流，基于修正稀疏拟牛顿算法的成像平滑，优于 CG 算法和 Landweber 算法，与 LBP 算法一样，成像比较平滑，较为接近原图像。对于中位层流，成像与原始图像有些差距，但也优于 SD 算法以及 LBP 算法。核心流型中，基于修正稀疏拟牛顿算法成像大小十分接近原流型。核心流型中，基于修正稀疏拟牛顿算法优于 Landweber 和 SD 算法，图像比较接近原图像。



(a) 4 种流型的原始图像

(b) LBP 算法重建图像

(c) Landweber 算法重建图像

(d) CG 算法重建图像

(e) SD 算法重建图像

(f) XSBF 算法重建图像

图 2 目标算法与其它算法重建图像结果对比
Fig. 2 Comparison of reconstructed tomograms

表 1 是 5 种算法的重建图像的误差的数字比较，本文所提出的基于修正稀疏拟牛顿算法成像误

https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal/vol31/iss5/1
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.17-0287

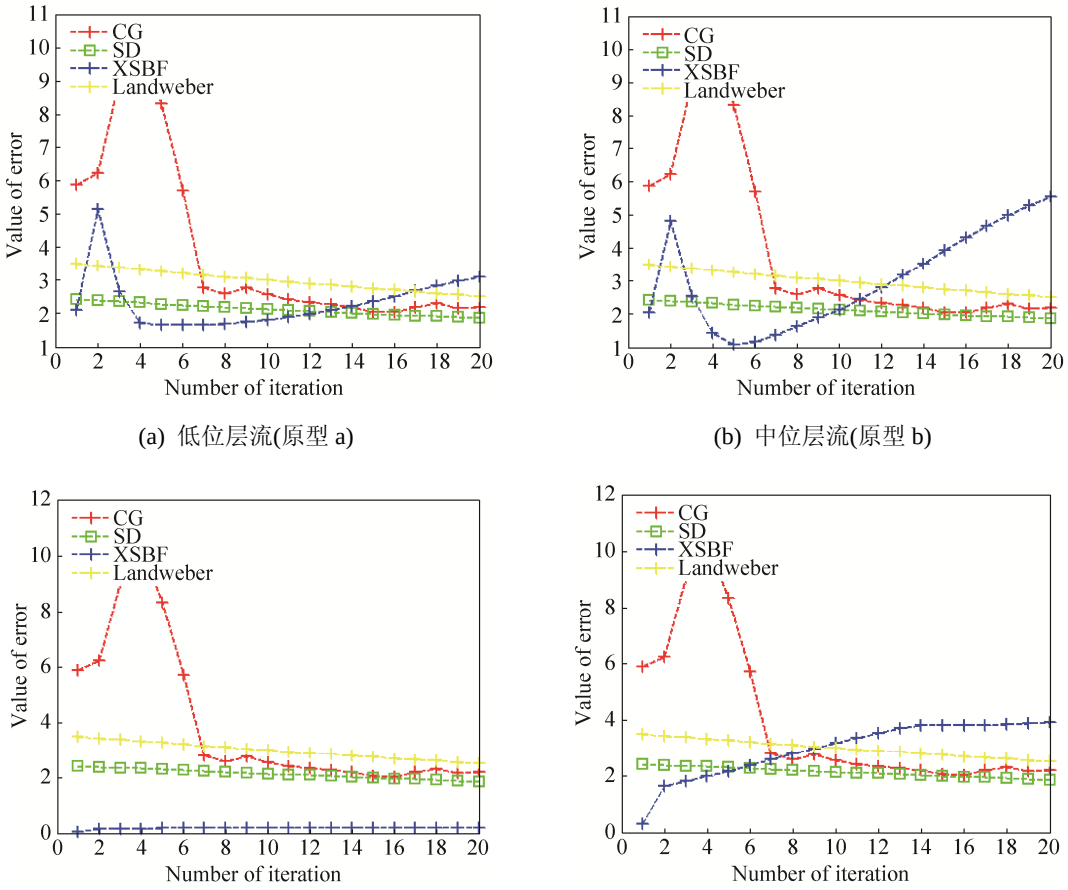
差对比与其他的 4 种算法的成像误差综合表现良好。可以直观的看出，在低位层流中，CG 算法的误差最大，基于修正稀疏拟牛顿算法的误差最小。在中位层流中，LBP 算法的成像误差最大，基于修正稀疏拟牛顿算法的误差最小。对于核心流型，SD 算法的成像误差最大，LBP 算法和本文提到的算法的误差较小。在方形流中，表现最好的是基于修正稀疏拟牛顿算法以及 CG 算法。综上所述，本文所提出的算法在误差方面表现良好。

表 1　图像误差比较
Tab. 1　Image error comparison　/%

算法	原型 a	原型 b	原型 c	原型 d
LBP	34.15	40.32	86.38	59.64
Landweber	29.27	27.22	45.45	42.56
CG	48.78	26.61	63.63	33.51
SD	36.59	34.67	172.73	44.63
XSBF	28.87	25.00	32.27	34.93

目标算法与其他算法的范数残量误差比较如图 3 所示。

图 3 分别针对于以上实验的 4 种流型，来对经典 Land-weber、SD、CG 及基于修正稀疏拟牛顿算法的 0~20 步迭代的 2 范数残量误差进行比较，其中蓝色曲线表示基于修正稀疏拟牛顿算法(XSBF)的范数残量误差曲线。由图 3 中信息可得知，对于低位层流和中层流这两个流型，基于修正稀疏拟牛顿方法在迭代约第 4 步的时候就已经得到最好的范数残量误差，并且在此步时基于修正稀疏拟牛顿方法的范数残量误差小于剩下的 3 种算法的误差；但是对于柱形流型的图像重建中，残量误差属于一直增加的状况，但是在第 14 次迭代以后趋于平稳；对于核心流型，残量误差对比与其他几种经典算法稳定且误差很小。



(a) 低位层流(原型 a)　(b) 中位层流(原型 b)

(c) 核心流(原型 c)　(d) 柱状流(原型 d)

图 3　算法的范数残量误差对比
Fig. 3　Comparison of norm residual error for four algorithms

表 2 中是几种算法在成像时的范数的最小的误差值的对比。表 3 是 5 种算法在达到最优成像时所需的迭代的步数。通过分析可以很明显的看出，基于修正稀疏拟牛顿算法所需要的迭代步数适中，比较集中在十几步至二十几步之间。迭代步数劣于 LBP 算法和 CG 算法，但是优于 SD 算法以及 Landweber 算法。

综合以上分析，可以知道采用基于修正稀疏拟牛顿方法来进行 ECT 图像重建是一种值得考虑的方法。其在图像重建的精度与速度上均有其优势。

表 2 4 种算法的范数残量值
Tab. 3 Values of norm residual error for 4 algorithms/%

算法	原型 a	原型 b	原型 c	原型 d
CG	2.27	4.06	0.03	2.20
SD	2.57	2.64	0.25	1.86
Landweber	3.74	2.26	0.07	2.51
XSBF	1.65	1.06	0.04	0.29

表 3 迭代步数
Tab. 3 Numbers of iteration

算法	原型 a	原型 b	原型 c	原型 d
LBP	0	0	0	0
Landweber	21	21	15	37
CG	7	7	6	15
SD	26	19	24	40
XSBF	13	17	12	24

4 结论

本文提出了一种基于修正稀疏拟牛顿迭代电容层析成像算法，在分析 ECT 反问题病态性的基础上，推导了该问题的校正公式，并利用数学归纳法分析了修正稀疏拟牛顿算法的收敛性。该算法程序简单、矩阵计算量小、成像精度高，存储量低，迭代过程具备二次终止条件。数值实验结果表明修正稀疏拟牛顿算法的重建图像效果十分理想，且成像质量好于 SD、LBP、Landweber 和 CG 算法，为 ECT 图像重建领域提供了一种有效可行的新方法。

参考文献：

[1] 吴新杰，何在刚，李惠强，等. 利用多准则 Hopfield 网络对 ECT 进行图像重建[J]. 电机与控制学报，2016, 20(8): 98-104.
Wu Xinjie, He Zaigang, Li Huiqiang, et al. Image Reconstruction by using Multi-criteria of Hopfield Network for ECT[J]. Electric Machines and Control, 2016, 20(8): 98-104.

[2] 陈德运，高明，李伟，等. 新型 ECT 数据采集系统设计与实现[J]. 电机与控制学报, 2013, 17(5): 87-92.
Chen Deyun, Gao Ming, Li Wei, et al. Design and implementation of data acquisition system for the electrical capacitance tomography[J]. Electric Machines and Control, 2013, 17(5): 87-92.

[3] 田海军，周云龙. 电容层析成像技术研究进展[J]. 化工自动化及仪表, 2012, 39(11): 1387-1392.
Tian Haijun, Zhou Yunlong. Progress in Capacitance Tomography Technology Research[J]. Control and Instruments in Chemical Industry, 2012, 39(11): 1387-1392.

[4] Isaksen O. A Review of Reconstruction Techniques for Capacitance Tomography[J]. Measurement Science and Technology(S0957-0233), 1996, 7(3): 325-337.

[5] 崔岩，王彦飞. 基于初至波走时层析成像的 Tikhonov 正则化与梯度优化算法[J]. 地球物理学报，2015, 58(4): 1367-1377.
Cui Yan, Wang Yanfei. Tikhonov regularization and gradient descent algorithms for tomography using first-arrival seismic traveltimes[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2015, 58(4): 1367-1377.

[6] 蒲荣. 改进的模拟退火算法求全局优化问题的最优解[J]. 宜宾学院学报, 2013, 13(6): 78-81.
Pu Rong. Improved Simulated Snnealing Algorithm for Global Optimization Problem of Optimal Solution[J]. Journal of Yibin University, 2013, 13(6): 78-81.

[7] 郭志恒，律德才，邵富群. 基于差分灵敏度模型的电容层析成像图像重建方法[J]. 中国电机工程学报，2012, 32(23): 75-82.
Guo Zhiheng, Lü Decai, Shao Fuqun. Image Reconstruction Method for Electrical Capacitance Tomography Based on the Difference Sensitivity Model[J]. Electric Machines and Control, 2012, 32(23): 75-82.

[8] 陈德运，郑贵滨，于晓洋，等. 基于遗传算法电容层析成像图像重建算法的研究[J]. 电机与控制学报，2003, 7(3): 207-211.
Chen Deyun, Zheng Guibing, Yu Xiaoyang, et al. Image reconstruction algorithm based on genetic algorithms for two-phase flow electrical capacitance tomography system[J]. Electric Machines and Control, 2003, 7(3):

https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal/vol31/iss5/1
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.17-0287

207-211.

[9] 宋超, 郭智奇, 鹿琪, 等. 基于支持向量机法识别砂岩中流体类型[J]. 地球物理学进展, 2015, 30(2): 616-620.
Song Chao, Guo Zhiqi, Lu Qi, et al. Fluid type identification of sandstone based on support vector machine[J]. Progress in Geophysics, 2015, 30(2): 616-620.

[10] 刘豪, 杨永全, 郭仙草, 等. 用于纹理特征提取的改进的 LBP 算法[J]. 计算机工程与应用, 2014, 50(6): 182-185, 245.
Liu Hao, Yang Yongquan, Guo Xiancao, et al. Improved LBP used for texture feature extraction[J]. Computer Engineering and Applications, 2014, 50(6): 182-185, 245.

[11] YANG W Q, PENG L H. Image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography[J]. Measurement Science and Technology(S0957-0233), 2003, 14(1): R1-R3.

[12] 王莉莉, 陈德运, 于晓洋, 等. 电容层析成像系统传感器优化设计[J]. 仪器仪表学报, 2015, 36(3): 515-522.
Wang Lili, Chen Deyun, Yu Xiaoyang, et al. Sensor optimization design in electrical capacitance tomography system[J]. Chinese Journal of Sciencific Instrument, 2015, 36(3): 515-522.

[13] 孙犇渊, 王化祥, 王丕涛. 基于内部阵列电极的电容层析成像系统[J]. 传感技术学报, 2013, 26(6): 820-824.
Sun BenYuan, Wang Huaxiang, Wang Peitao. An Electrical Capacitance Tomography Based on Internal Array Electrodes[J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2013, 26(6): 820-824.

[14] 曹海燕, 王化祥. 电容层析成像系统传感器仿真研究[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(15): 207-211.
Cao Haiyan, Wang Huaxiang. Simulation study of sensor of Electrical Capacitance Tomography system [J]. Computer Engineering and Applications, 2012, 48(15): 207-211.

[15] 陈宇, 陈德运. 基于改进 Runge-Kutta 型 landweber 的电容层析成像图像重建算法[J]. 电机与控制学报, 2014, 18(7): 107-112.
Chen Yu, Chen Deyun. Improved Runge-Kutta type landweber image reconstruction algorithm for electrical capacitance tomography system[J]. Electrical Machines And Control, 2014, 18(7): 107-112.

[16] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 北京科学出版社, 1997: 219-259.
Yuan Yaxiang, Sun Wenyu. Optimization theory and method[M]. Beijing: Beijing Science Press, 1997: 219-259.