

1-4-2019

Economic Design of VSI ARMA Charts

Zhang Li

Zhengzhou Institute of Aeronautics, Zhengzhou 450046, China;

Xiaoyang Dong

Zhengzhou Institute of Aeronautics, Zhengzhou 450046, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Economic Design of VSI ARMA Charts

Abstract

Abstract: To improve the sensitivity of statistical process control reducing costs for process monitoring at the same time, the economic design of autoregressive moving average control chart with variable sampling interval (VSI ARMA) was discussed. *The economic model of autoregressive moving average control chart with variable sampling interval (VSI ARMA) was established based on Lorenzen and Vance's model, in which Markov chain was used to calculate the average time to signal (ATS) through constructing a three dimensional random vector.* Using genetic algorithm to search for the optimal combination of seven parameters of VSI ARMA model made the cost of economic model at unit time to be minimum at the same time. Meanwhile, FSI ARMA control chart was used to monitor the same process, and the economic design of FSI ARMA control chart is also carried out. The results of the two models are compared, which indicates that the loss cost of VSI ARMA control charts is consistently lower than that of the FSI scheme when the design parameter is identical.

Keywords

ARMA control chart, Markov chain, variable sampling interval, economic design

Recommended Citation

Zhang Li, Dong Xiaoyang. Economic Design of VSI ARMA Charts[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(10): 3869-3874.

可变抽样区间 ARMA 控制图经济设计

张黎, 董晓阳

(郑州航空工业管理学院, 河南 郑州 450046)

摘要: 为提高统计过程监控灵敏度并减少监控费用, 研究了可变抽样区间自回归移动平均(VSI ARMA)控制图的经济设计问题。构建了 VSI 和 FSI (Fixed Sampling Interval) ARMA 控制图的经济设计模型, 通过构建三维向量利用马尔科夫链的方法计算该控制图的平均运行时间(ATS)。针对具体算例模型, 利用遗传算法对该模型进行求解, 并通过仿真分析比较了 FSI ARMA 控制图与 VSI ARMA 控制图的经济性能, 结果表明, 在模型设计参数相同的情况下 VSI 控制图比 FSI 控制图的费用低。证明 VSI ARMA 控制图比 FSI ARMA 控制图更能低成本的监控自相关过程。

关键词: ARMA 控制图; 马尔科夫链; 可变抽样区间; 经济设计

中图分类号: O213.1

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2018) 10-3869-06

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201810033

Economic Design of VSI ARMA Charts

Zhang Li, Dong Xiaoyang

(Zhengzhou Institute of Aeronautics, Zhengzhou 450046, China)

Abstract: To improve the sensitivity of statistical process control reducing costs for process monitoring at the same time, the economic design of autoregressive moving average control chart with variable sampling interval (VSI ARMA) was discussed. *The economic model of autoregressive moving average control chart with variable sampling interval (VSI ARMA) was established based on Lorenzen and Vance's model, in which Markov chain was used to calculate the average time to signal (ATS) through constructing a three dimensional random vector.* Using genetic algorithm to search for the optimal combination of seven parameters of VSI ARMA model made the cost of economic model at unit time to be minimum at the same time. Meanwhile, FSI ARMA control chart was used to monitor the same process, and the economic design of FSI ARMA control chart is also carried out. The results of the two models are compared, which indicates that the loss cost of VSI ARMA control charts is consistently lower than that of the FSI scheme when the design parameter is identical.

Keywords: ARMA control chart; Markov chain; variable sampling interval; economic design

引言

统计过程控制(SPC)是对生产过程进行监控,



收稿日期: 2016-07-14 修回日期: 2016-10-27;
基金项目: 国家自然科学基金(U1404702), 河南省高等学校重点科研项目(17A630069), 河南省科技攻关项目(172102210078), 郑州航空工业管理学院研究生创新基金(2016CX014);
作者简介: 张黎(1963-), 女, 河南郑州, 博士, 教授, 研究方向为质量管理与质量工程。

以保证生产过程处于统计受控状态的一种质量管理技术。而控制图是 SPC 的主要工具。传统的控制图设计仅考虑控制图的统计性能, 其评价指标是平均运行长度(ARL), 即过程受控时 ARL 越长越好, 过程失控时, ARL 越短越好。但是这样的设计往往造成控制图的使用费用过高。因此 Duncan^[1]提出控制图的经济设计, 目的是减少控制图的使用

<http://www.china-simulation.com>

• 3869 •

费用。随后, Lorenzen^[2]等提出了一个更一般的控制图经济设计模型, 后续控制图经济设计模型的研究多根据以此模型为基础。Lupo^[3]根据 Lorenzen 的模型提出了针对 c 控制图的多目标经济设计方法。Shams^[4]等利用费用方程来确定 T^2 控制图的参数设计, 并用这个控制图监控了依斯曼过程。胡雪龙等^[5]采用带有辅助样本的 \bar{X} (SSX) 控制图同时监控过程质量特性的均值和方差, 研究了 SSX 控制图的经济性能。

然而, 在经济设计的研究中, 多是对固定抽样间隔(FSI)控制图进行的经济设计, 但另一些学者对可变抽样区间(VSI)控制图进行了经济设计。可变抽样区间 X 控制图由 Reynolds 等^[6]提出。Lee 等^[7]对双样本容量和和可变抽样区间的 X 控制图进行经济设计, 并对这个模型进行了灵敏度分析。众多研究表明, 可变抽样区间(VSI)控制图比传统的控制图更快的检测到过程偏移, 且比传统的控制图的费用更低^[8-9]。

传统的控制图假设质量特性值是独立同分布的。20世纪80年代之后, 随着混合性工业过程的大量涌现, 使过程输出数据普遍表现为自相关, 违背了数据独立性的假设, 此时受控时的 ARL 大大缩短, 控制图产生误警报的频率增大, 因而使相关成本增大。对于自相关过程监控方式的研究分为两类: 一类是利用残差做控制图, 如 Montgomery^[10]提出的 EWMA 控制图。另一类是直接利用现有的控制图调整控制限直接用于监控自相关过程。但这两种方法都会因为过程的自相关程度不同而产生显著变化。因此 Jiang 等^[11]提出了自回归移动平均 (ARMA) 控制图。Lin 等^[12]构建了 ARMA 控制图经济设计模型, 选择合适的设计参数, 使期望的单位时间费用最小, 并对该模型进行了灵敏度分析。众多研究表明, ARMA 控制图是监控自相关过程的有效工具。

因此本文对 VSI ARMA 控制图进行经济设计。首先建立 VSI ARMA 控制图的经济设计模型, 其次通过一个具体算例对该模型进行求解, 在计算模

型中控制图的 ATS 时利用马尔可夫链的方法, 最后把 VSI ARMA 控制图与 FSI ARMA 控制图进行了比较, 发现在成本参数相同的情况下, VSI ARMA 控制图的成本与 FSI ARMA 控制图的成本相比明显降低。

1 VSI ARMA 控制图经济设计

1.1 ARMA 控制图

考虑控制图的一般设计原理, 构建 ARMA 控制图, 首先要计算统计量的方差 σ_Z 。假设 ARMA 控制图监控自相关过程为 ARMA(1,1): $X_t = uX_{t-1} + a_t - va_{t-1}$ 时, 观测值的方差为:

$$\sigma_X^2 = \frac{1 - 2uv + v^2}{1 - u^2} \sigma_a^2 \quad \#$$

再根据 ARMA 控制图的统计量 $Z_t = \theta_0 X_t + \phi \theta_0 X_{t-1} - \theta X_{t-1}$, 其中 $\theta_0 = 1 + \theta - \phi$ 。 ϕ 为回归系数, θ 表示平均偏移参数, 则

$$\sigma_Z^2 = \left\{ \theta_0^2 + \frac{\alpha^2}{1 - \phi^2} + 2 \left(\theta_0 \alpha + \frac{\phi \alpha^2}{1 - \phi^2} \right) \frac{\rho(1)}{1 - \phi u} \right\} \sigma_X^2$$

因此, 若设样本均值为 μ_0 , 控制图控制线系数为 k , 样本容量为 n , 样本容量的平均方差为 $\sigma_{\bar{X}}$, 则 ARMA(1,1) 的控制图界限由下列方程式表示:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \mu_0 + k \left(\frac{\sqrt{\theta_0^2 + \frac{\alpha^2}{1 - \phi^2} + 2 \left(\theta_0 \alpha + \frac{\phi \alpha^2}{1 - \phi^2} \right) \frac{\rho(1)}{1 - \phi u}}}{\sqrt{n}} \right) \sigma_{\bar{X}} \\ \text{CL} &= \mu_0 \\ \text{UCL} &= \mu_0 - k \left(\frac{\sqrt{\theta_0^2 + \frac{\alpha^2}{1 - \phi^2} + 2 \left(\theta_0 \alpha + \frac{\phi \alpha^2}{1 - \phi^2} \right) \frac{\rho(1)}{1 - \phi u}}}{\sqrt{n}} \right) \sigma_{\bar{X}} \end{aligned}$$

1.2 FSI ARMA 控制图经济设计模型

假设: (1) 过程特殊原因的发生服从参数为 λ 的指数分布, 则过程受控时间为 $1/\lambda$; (2) 质量特性值的均值 μ , 标准差为 σ , 当过程受控时, $\mu = \mu_0$, $\sigma = \sigma_0$, 其中 μ_0 和 σ_0 分别为均值和方差的目标值。当过程失控时, 过程的方差不变, 均值变为

$$\mu = \mu_0 + \delta\sigma。$$

如图 1 所示, 一个周期的运行时间包括过程受控的时间、过程失控到控制图发出警报的时间、抽样所需时间以及查找和修复特殊原因所需的时间, 运行的总费用包括生产时期的质量费用, 误警告的费用, 抽样和检验的费用, 寻找特殊原因和修复过程的费用。基于 Lorenzen 和 Vance 的经济模型, 建立 FSI ARMA 控制图经济设计模型, 其目标函数为单位时间的期望费用 C_1

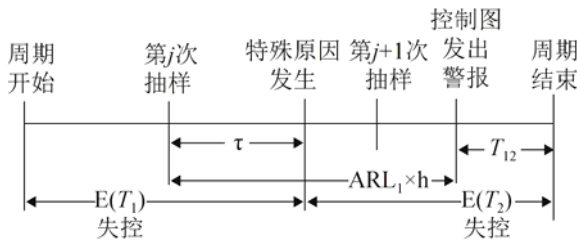


图 1 周期过程示意图

Fig. 1 Schematic diagram of periodic process

$$C_1 = \frac{c_1 / \lambda + c_2 [-\tau + nd + h(ARL_1) + T_1] + sg / ARL_0 + m}{1 / \lambda - \tau + nd + h(ARL_1) + T_1} + \frac{a + bn}{h}$$

式中: c_1 为过程受控时单位时间的质量费用; c_2 为过程失控时单位时间的质量费用; T_1 为寻找和修复特殊原因的时间; s 为过程受控时抽样的期望值; g 为误警报的费用; $ANSS_0$ 为过程受控时控制图报警所需的样本数; m 为查找和修复特殊原因的费用; d 为每次抽样和作图的时间; ARL_1 为从过程失控到控制图发出警报平均时间; ARL_0 为过程在受控状态下的平均报警时间; a 为每次抽样的固定费用; b 为单位抽样的费用; h 为抽样间隔; τ 为过程受控时两个样本之间异常原因发生时间的期望值,

$$\tau = \frac{1 - (1 + \lambda h)e^{-\lambda h}}{\lambda(1 - e^{-\lambda h})}。$$

1.3 VSI ARMA 控制图经济设计模型

可变抽样区间控制图是指抽样间隔不固定的控制图。其设计原理是, 如果样本落在远离中心线却没有出控制线, 下一次的抽样区间将会减小, 来

看是否下一个点会出界, 如果没有这个趋势, 抽样区间增大。一般取两个抽样区间, 在固定抽样间隔控制图的基础上增加了上下警戒线:

$$UWL = \mu_0 + \varpi\sigma_Z,$$

$$LWL = \mu_0 - \varpi\sigma_Z,$$

其中: ϖ 是控制图的警戒线系数, 且 $0 < \varpi < k$ 。选取两个抽样区间长度 h_1 和 h_2 , 且 $h_1 > h_2 > 0$ 。若样本点落在安全域, 则下一个抽样区间为 h_1 , 若样本点落在警戒域, 则下一个抽样区间为 h_2 , 若样本点超出控制线, 则报警。警戒域和安全域详见图 2。

基于 Lorenzen 和 Vance 的经济模型, 建立 VSI ARMA 控制图经济设计模型, 其目标函数为单位时间的期望费用 C

$$C = \frac{c_1 / \lambda + c_2 [-\tau + nd + ATS_1 + T_1] + sg / ANSS_0 + m}{1 / \lambda - \tau + nd + ATS_1 + T_1} + \frac{a + bn}{h_0}$$

式中: $ANSS_0$ 为过程受控时控制图报警所需的样本数; ATS_1 为从过程失控到控制图发出警报平均时间; h_0 为平均的平均抽样间隔, $h_0 = ATS_0 / ANSS_0$ 。

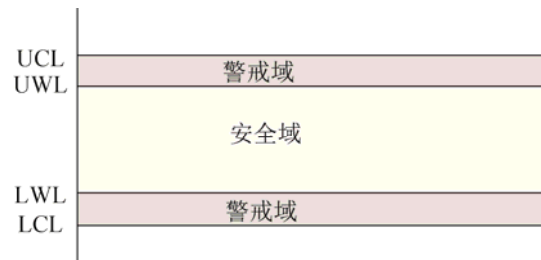


图 2 可变抽样区间示意图

Fig. 2 Schematic diagram of variable sampling interval

2 算例

2.1 ATS 和 ARL 的计算

控制图的评价指标一般是平均运行长度 (ARL), 但是在可变抽样区间控制图中的抽样区间不固定, 故使用平均报警时间 (ATS) 进行评价。ARL 的计算方法仍可用于计算 ATS。ARL 的计算有 3 种方法: 马尔科夫链法、积分方程法和蒙特卡罗方法。本文采用马尔科夫链法计算 ATS。马尔科夫链

方法计算 ARL 最早由 Brook and Evans 于 1972 年提出, 它的主要思想是把检测统计量近似成一个状态有限的马尔科夫链, 而把统计量的各个取值区间对应成马尔科夫链的各个状态空间, 然后写出进一步转移概率矩阵。很多学者利用马尔科夫链的方法计算控制图的 ARL。ARMA 控制图在监控 ARMA(1,1)过程的统计量不具有马尔科夫链性。所以 Jiang^[13]等提出在监控独立同分布的观测值时, 可以通过构建具有马尔可夫链性的二维向量来计算转移概率矩阵, 把受控区域离散化为一个个矩形, 把矩形分成 $(2m+1) \times (2m+1)$ 份, 每一份表示一个状态。后续学者验证了该理论的正确性^[14-15]。本研究根据 Jiang 提出的三维向量 $W_t = (Z_t, X_t, a_t)'$ 来计算 ARMA 控制图的 ATS:

$$\begin{pmatrix} Z_t \\ X_t \\ a_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi & \theta_0 u_1 - \theta & -\theta_0 v_1 \\ 0 & u_1 & -v_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{t-1} \\ X_{t-1} \\ a_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} a_t$$

在受控状态下, 设 X_t 、 a_t 的控制限 L_X 、 L_a , 把受控区域看成一个三维空间, $[-L_Z, L_Z] \times [-L_X, L_X] \times [-L_a, L_a]$, 并把该三维空间分成 $M = (2m+1) \times (2m+1)$ 份, 每个空间的长度为 $(2\delta_1) \times (2\delta_2) \times (2\delta_3)$ 。

当过程受控时, 假设变量 $W_t = (Z_t, X_t, a_t)'$ 表示在时间 i 时 d 的状态, 将要转换到状态 j , 如果 $SZ_j - \delta_1 < Z_i \leq SZ_j + \delta_1$, $SX_j - \delta_2 < X_i \leq SX_j + \delta_2$, $Sa_j - \delta_3 < a_i \leq Sa_j + \delta_3$, 其中 SZ_j , SX_j , Sa_j 是每个小区间的中心线。那么转移矩阵 P 为

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} SZ_j - \delta_1 < Z_t \leq SZ_j + \delta_1 & Z_{t-1} = SZ_i \\ SX_j - \delta_2 < X_t \leq SX_j + \delta_2 & X_{t-1} = SX_i \\ Sa_j - \delta_3 < a_t \leq Sa_j + \delta_3 & a_{t-1} = Sa_i \end{cases} =$$

$$\Pr \begin{cases} SZ_j - \delta_1 < \phi SZ_i + (\theta_0 u - \theta) SX_i - \theta_0 v Sa_i + \theta_0 a_i \\ \theta_0 a_i \leq SZ_j + \delta_1 \\ SX_j - \delta_2 < u SX_i - v Sa_i + a_i \\ Sa_j - \delta_3 < a_i \leq Sa_j + \delta_3 \end{cases} =$$

$$\Pr \begin{cases} BL < a_t \leq BU \\ CL < a_t \leq CU \\ DL < a_t \leq DU \end{cases} =$$

$$\Pr \{ \max(DL, \min(DU, \max(BL, \min(BU, CU)))) < a_t \leq \min(DU, \max(DL, \min(BU, \max(BL, CL)))) \}$$

$$\text{其中: } BL = \frac{(SZ_j - \phi SZ_i - (\theta_0 u - \theta) SX_i + \theta_0 v Sa_i - \delta_1)}{\theta_0};$$

$$BU = \frac{(SZ_j - \phi SZ_i - (\theta_0 u - \theta) SX_i + \theta_0 v Sa_i + \delta_1)}{\theta_0};$$

$$CL = SX_j - u SX_i + v Sa_i - \delta_2;$$

$$CU = SX_j - u SX_i + v Sa_i + \delta_2;$$

$$DL = Sa_j - \delta_3;$$

$$DU = Sa_j + \delta_3;$$

同理失控状态下的转移概率矩阵 P 为:

$$p_{ij}^{(1)} = \begin{cases} SZ_j - \delta_1 < Z_t \leq SZ_j + \delta_1 & Z_{t-1} = SZ_i \\ SX_j - \delta_2 < X_t \leq SX_j + \delta_2 & X_{t-1} = SX_i \\ Sa_j - \delta_3 < a_t \leq Sa_j + \delta_3 & a_{t-1} = Sa_i \end{cases} =$$

$$\Pr \begin{cases} SZ_j - \delta_1 < \phi SZ_i + (\theta_0 u - \theta) SX_i - \theta_0 v Sa_i + \theta_0 a_i + \theta_0 (1-u)\mu \leq SZ_j + \delta_1 \\ SX_j - \delta_2 < u SX_i - v Sa_i + a_i + (1-u)\mu \leq SX_j + \delta_2 \\ Sa_j - \delta_3 < a_i \leq Sa_j + \delta_3 \end{cases} \#$$

令 $Q = (I - P)^{-1} = c_{ij}$, 则过程受控和失控状态下的 ARL 为: $ARL = \sum_{j=1}^{2m+1} c_{m+1,j} \cdot h$, 则过程受控和失控

状态下的 ATS 为: $ATS = \sum_{j=1}^{2m+1} c_{m+1,j} \cdot b_j$, 其中 b_j 表

示 $t=j$ 时的抽样区间, 若状态 Z_j 的中心点位于安全域, 则 $b_j = h_2$, 若状态 Z_j 的中心点位于警戒域, 则 $b_j = h_1$ 。

利用以上方法求出目标方程即式(3)中的 ATS_0 和 ATS_1 后, 式(3)是关于参数 $[k_1, k_2, n, d_1, d_2, \theta, \phi]$ 的函数, VSI ARMA 控制图的经济设计就是确定这七个参数的最优组合, 使目标函数最小。本文使用遗传算法来确定七个参数的最优组合。

2.2 遗传算法

遗传算法是一种宏观意义下的仿生算法。它是通过模拟达尔文生物进化论的自然选择和遗传学机理而编制的随机优化的搜索方法。其特点是直接对结构对象进行操作, 对求解大规模搜索的最优化问题很有效。遗传算法已经被成功地应用于许多领

域。下面说明如何利用遗传算法来求解 VSI ARMA 控制图的经济设计模型。

某一生产过程的质量特性值呈自相关, 可以用 ARMA(1,1) 进行拟合, 拟合结果为 $X_t = 0.5X_{t-1} + a_t - 0.3a_{t-1}$, 可以用 VSI ARMA 控制图进行监控。

1) 本例中的费用参数和模型参数如下:

$$\lambda = 0.01, c_1 = 20, c_2 = 100, d = 0.05, t_1 = 2,$$

$$t_2 = 2, g = 50, m = 20, a = 0.5, b = 0.1, \delta = 3;$$

2) 利用 matlab 2012a 编程, 采用马尔可夫链法计算控制图的 ATS_0 和 ATS_1 并建立费用函数;

3) 设定遗传算法参数为初始解个数 40 个, 交配率 0.8, 突变率 0.1; 以费用函数为适用性函数;

4) 设定控制图参数 $[k_1, k_2, n, d_1, d_2, \theta, \phi]$ 的搜索范围: 最小值 $[1 \ 0.01 \ 1 \ 0.01 \ 1 \ 0.01 \ 0.01]$, 最大值 $[4 \ 3 \ 20 \ 1 \ 3.5 \ 1 \ 1]$, 并有约束样本容量 n 为整数, 且 $k_1 \geq k_2$;

5) 利用遗传算法选择, 交叉, 变异, 重复进行, 直至运行到 100 代, 算法停止;

6) 过程结束, 输出计算结果。

2.3 求解结果

经过 5 次求解, 求得最优参数组合以及最低的总费用结果如表 1 所示。

表 1 算例求解结果表
Tab. 1 The result of calculation example

编号	k_1	k_2	n	d_1	d_2	θ	ϕ	总费用
1	1.525	1.525	1	0.708	3.337	0.902	1	34.062
2	2.403	0.162	1	1	3.412	0.094	0.874	34.854
3	4	0.028	1	0.953	3.472	0.495	0.43	29.409
4	3.184	0.013	1	1	3.305	0.145	0.671	34.766
5	4	0.01	1	0.982	3.412	0.042	0.04	29.383

通过对以上结果的分析, 得出经济设计模型的最小总费用以及其参数组合为:

$$\text{总费用}(k_1, k_2, n, d_1, d_2, \theta, \phi) =$$

$$\text{总费用}(4, 0.01, 1, 0.982, 3.412, 0.042, 0.04) = 29.383$$

3 最优性检验

利用 FSI ARMA 控制图监控 3.2 的过程, 则经济设计的成本参数与模型参数, 与以上模型相同。同样利用遗传算法对该模型进行求解, 结果如表 2 所示。

表 2 VSI ARMA 与 FSI ARMA 控制图经济设计的比较
Tab. 2 Comparison of economic design of VSI ARMA and FSI ARMA control chart

编号	k_1	k_2	n	d_1	d_2	θ	ϕ	总费用	比率
1	4	0.01	1	0.98	3.41	0.04	0.04	29.38	43.18%
2	0.931	1	0.93	0.02	0.75	68.04	100%		

从表 2 可以得出, 在成本参数相同的情况下, VSI ARMA 控制图的费用是 FSI ARMA 控制图的 43.18%。VSI ARMA 控制图与 FSI ARMA 控制图的经济设计相比, 平均费用有较大降低。

4 结论

为有效监控自相关过程, 建立可变抽样区间 ARMA 控制图经济设计模型, 采用马尔可夫链的方法计算 ATS。并针对一个实际案例, 利用遗传算法对模型进行求解。最后把 VSI ARMA 控制图与 FSI ARMA 控制图进行了比较, 发现在成本参数相同的情况下, VSI ARMA 控制图的成本与 FSI ARMA 控制图的成本相比明显降低。另可变抽样区间 ARMA 控制图经济统计设计也是值得进一步研究的问题。

参考文献:

- [1] Ducan A J. The economic design of X-bar charts used to maintain current control of a process [J]. Journal of American Statistical Association (S0162-1459), 1956, 51(274): 228-242.
- [2] Lorenzen T J, Vance L C. The economic design of control charts: a unified approach [J]. Technometrics (S0040-1706), 1986, 28(1): 3-10.
- [3] Lupo T. A Multi-Objective Design Approach for the c Chart Considering Taguchi Loss Function [J]. Quality and Reliability Engineering International (S0748-8017), 2014, 30(8): 1179-1190.
- [4] Shams M B, Elkamel A, Moorthy K, et al. Optimal

