

1-4-2019

Hybrid Decoding Algorithm for Low-density Parity-check Codes

Guowei Qu

Yantai Nanshan University, Yantai 265713, China;

Xiaoping Song

Yantai Nanshan University, Yantai 265713, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Hybrid Decoding Algorithm for Low-density Parity-check Codes

Abstract

Abstract: A hybrid decoding algorithm for low-density parity-check (LDPC) codes based on *the soft-decision iterative decoding method and the erasure decoding method is proposed. If a decoding error is detected when the maximum iteration number of the soft-decision iterative decoding is reached, a decision is made on each bit whether it is zero or one or an erasure according to the cumulative reliability of the bit in the iterative process. Then the decision result is decoded with erasure decoding.* Simulation results on random LDPC codes with moderate length *indicate that the proposed hybrid decoding algorithm outperforms the traditional soft-decision iterative decoding algorithm at the expense of little average complexity increases by suitably setting the maximum iteration number of the iterative decoding in the hybrid decoding algorithm.*

Keywords

low-density parity-check (LDPC) codes, hybrid decoding, iterative decoding, erasure decoding

Recommended Citation

Qu Guowei, Song Xiaoping. Hybrid Decoding Algorithm for Low-density Parity-check Codes[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(10): 4009-4013.

低密度奇偶校验码的混合译码算法

曲国伟, 宋晓萍

(烟台南山学院, 山东 烟台 265713)

摘要: 基于低密度奇偶校验(LDPC)码的软判决迭代译码与删除译码方法, 提出了一种混合译码算法。若软判决迭代译码达到最大迭代次数检测到无法纠正的错误, 则根据各比特在迭代译码过程中的累积可靠性, 对各比特进行0、1或者删除的逐一判决, 然后对判决结果进行删除译码。对中等码长的随机 LDPC 码的仿真结果表明, 通过合理设置混合译码算法中迭代译码的最大迭代次数, 可以使得混合译码算法相对于软判决迭代译码算法在增加很少平均复杂度下获得纠错性能的提升。

关键词: 低密度奇偶校验码; 混合译码; 迭代译码; 删除译码

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2018) 10-4009-05

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201810049

Hybrid Decoding Algorithm for Low-density Parity-check Codes

Qu Guowei, Song Xiaoping

(Yantai Nanshan University, Yantai 265713, China)

Abstract: A hybrid decoding algorithm for low-density parity-check (LDPC) codes based on the soft-decision iterative decoding method and the erasure decoding method is proposed. If a decoding error is detected when the maximum iteration number of the soft-decision iterative decoding is reached, a decision is made on each bit whether it is zero or one or an erasure according to the cumulative reliability of the bit in the iterative process. Then the decision result is decoded with erasure decoding. Simulation results on random LDPC codes with moderate length indicate that the proposed hybrid decoding algorithm outperforms the traditional soft-decision iterative decoding algorithm at the expense of little average complexity increases by suitably setting the maximum iteration number of the iterative decoding in the hybrid decoding algorithm.

Keywords: low-density parity-check (LDPC) codes; hybrid decoding; iterative decoding; erasure decoding

引言

低密度奇偶校验(low-density parity-check, LDPC)码是一类由稀疏校验矩阵定义的线性分组码, 由 Gallager 最早提出^[1-2]。由于其优秀的纠错性能, LDPC 码在通信和存储等许多领域得到了广

泛应用。在加性高斯白噪声(additive white Gaussian noise, AWGN)信道下, 码长较长的随机 LDPC 码采用传统的基于置信传播(belief propagation, BP)的软判决迭代译码, 在迭代次数足够大时具有接近香农极限(Shannon limit)的纠错性能^[3-6]。但是, 对于中等码长的 LDPC 码, 当迭代次数达到一定数值后会出现错误平层(error floor)现象, 使得纠错性能随着迭代次数的增加不再有明显改善^[7-8]。由于目前实际中使用的 LDPC 码大多数为中等码长的码, 因此研究其纠错性能的改善是十分必要的。



收稿日期: 2016-08-30 修回日期: 2017-02-15;
基金项目: 山东省教育厅科学研究计划(J16WF44);
作者简介: 曲国伟(1978-), 男, 山东烟台, 本科, 副教授, 研究方向为计算机技术及应用; 宋晓萍(1982-), 女, 山东潍坊, 硕士, 讲师, 研究方向为数字优化仿真技术应用。

<http://www.china-simulation.com>

• 4009 •

混合译码是改进线性分组码的译码性能的一种常用方法。对于 LDPC 码, Kou 等提出了基于软判决译码和硬判决译码结合的混合译码方案^[9], 其核心思想是若软判决迭代译码达到最大迭代次数时仍然不能成功译码, 对其判决结果采用某种硬判决译码算法(例如位翻转算法)继续进行译码。由于硬判决译码的纠错性能与 LDPC 码校验矩阵的列重相关, 因此, 这种混合译码方案仅对列重较大的 LDPC 码(例如采用代数方法构造的 LDPC 码^[10])的性能改善有一定作用。但是, 随机 LDPC 码的列重通常较小, 因此该方案对随机 LDPC 码的性能改善不明显。

删除译码(erase decoding)是线性码在删除信道下的常用译码算法^[11], 其仅涉及二元逻辑运算, 因此具有复杂度低的特点。此外, 删除译码的恢复性能具有理论保证。本文利用删除译码的这些优点, 将基于 BP 的软判决迭代译码与删除译码这两种译码方法相结合, 提出了一种随机 LDPC 码在 AWGN 信道下的混合译码算法, 并且通过仿真和分析证明了提出算法的有效性。

本文第一部分给出基本定义; 第二部分提出了随机 LDPC 码的一种混合译码算法; 第三部分对所提出的混合译码算法进行性能仿真和分析; 第四部分给出结论。

1 基本定义

假定码长为 N 、码率为 $R = K/N$ 的二进制随机 LDPC 码 C 由稀疏校验矩阵 H (或者其对应的 Tanner 图^[12])定义, 其中 K 为码 C 的维数。码 C 中的码字 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)$ 经过二进制相移键控(binary phase shift keying, BPSK)调制后得到双极性序列 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, 其中

$$x_n = 1 - 2c_n \quad (1 \leq n \leq N) \quad (1)$$

序列 \mathbf{x} 在 AWGN 信道下发送, 在接收端解调后得到的序列为 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$, 则有

$$r_n = x_n + z_n \quad (1 \leq n \leq N) \quad (2)$$

其中, z_n 是均值为零, 方差为 σ^2 的高斯随机变量。

对于接收序列 \mathbf{r} , 第 n 比特的先验似然比为

$$\lambda_n^{(0)} = \log \frac{p(c_i = 0 | \mathbf{r})}{p(c_i = 1 | \mathbf{r})} = \frac{2}{\sigma^2} r_n \quad (1 \leq n \leq N) \quad (3)$$

LDPC 码传统的译码算法为基于 BP 的迭代译码。假定 $\lambda_n^{(i)}$ 为第 i 次迭代后第 n 比特的后验似然比(其具体计算方法参见文献[12]), 该比特的后验判决为

$$\hat{c}_n^{(i)} = \begin{cases} 0 & \lambda_n^{(i)} \geq 0 \\ 1 & \lambda_n^{(i)} < 0 \end{cases} \quad (1 \leq n \leq N) \quad (4)$$

对各比特进行逐一判决后, 对判决向量 $\hat{\mathbf{c}}^{(i)}$ 进行校验。若

$$\hat{\mathbf{c}}^{(i)} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0} \quad (5)$$

满足, 则得到发送码字的估计 $\hat{\mathbf{c}}^{(i)}$, 退出迭代过程, 否则继续进行迭代。若迭代达到了预先设定的最大迭代次数 I_{\max} , 式(5)仍然不满足, 则退出迭代过程。此时, 迭代译码检测到无法纠正的错误。

上述 BP 迭代译码算法的本质是根据先验似然比以及矩阵 H 对应的校验约束迭代计算出每个比特的后验似然比, 以提高其判决可靠性。可以证明, 如果矩阵 H 对应的 Tanner 图中不包含环, 那么基于 BP 的迭代译码收敛到最大后验概率译码的估计结果^[13]。但是, 随机 LDPC 码的校验矩阵 \mathbf{c} 对应的 Tanner 图中不可避免地包含环, 从而会对收敛造成影响。对于中等码长的随机 LDPC 码, 当 BP 迭代译码算法的迭代次数达到一定数值后误比特率不再有明显下降^[7-8]。

2 提出的混合译码算法

针对随机 LDPC 码 BP 迭代译码算法的收敛问题, 本文将删除译码与 BP 迭代译码相结合, 提出了一种改进纠错性能的混合译码算法。

2.1 算法描述

本文提出的算法的基本思想是: 首先进行 BP 迭代译码, 若在设定的最大迭代次数内成功译码, 则输出译码结果; 若检测到无法纠正的错误, 则将迭代过程中给定数目的不可靠比特判决为删除(e), 其余比特判决为 0 或者 1, 继续进行删除译码。在选择不可靠比特时, 需要考虑各比特在每一次迭代中的可靠性。对于第 n 比特, 定义

$$\lambda_n = \sum_{i=0}^{l_{\max}} \lambda_n^{(i)} \quad (1 \leq n \leq N) \quad (6)$$

为其在 BP 迭代译码中的累积似然比^[14]。| λ_n | 的数值提供了一种可靠性的度量方式, | λ_n | 越大, 则其对应的比特越可靠, 反之越不可靠。

假定选择的不可靠比特数目为 N_U , 记这些比特构成的集合为 U , 则判决向量 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ 由式(7)给出:

$$y_n = \begin{cases} 0 & n \notin U, \lambda_n \geq 0 \\ 1 & n \notin U, \lambda_n < 0 \\ e & n \in U \end{cases} \quad (1 \leq n \leq N) \quad (7)$$

N_U 的数值根据仿真优化得到。最后, 将判决向量 \mathbf{y} 进行删除译码, 其具体步骤参见文献^[12]。

删除译码具有低复杂度的特点, 并且具有恢复性能保证。若码 \mathbf{C} 的最小汉明距离为 d , 那么任意 $d-1$ 个位置的删除一定可以恢复。此外, 删除译码还可以恢复大部分超过 d 个位置的删除(假定删除位置的数目不超过 $N-K$)。若删除译码成功恢复集合 U 中的所有比特, 则将删除译码的结果作为发送码字的估计, 否则将 BP 迭代译码的结果作为发送码字的估计。

综上所述, 本文提出的混合译码算法的基本步骤如下:

LDPC 码的混合译码算法

输入: 接收序列 \mathbf{r} , 校验矩阵 \mathbf{H} , 参数 N_U

输出: 发送码字的估计 $\hat{\mathbf{c}}$

步 1: 对接收序列 \mathbf{r} 进行 BP 软判决迭代译码;

步 2: 若迭代译码没有检测到无法纠正的错误, 则将译码结果作为 $\hat{\mathbf{c}}$, 转步 7。否则, 转步 3;

步 3: 根据式(6)选择 N_U 个不可靠比特, 构成集合 U ;

步 4: 根据式(7)对各比特进行 0、1 或者删除(e)的逐一判决, 得到判决向量 \mathbf{y} ;

步 5: 对向量 \mathbf{y} 进行删除译码;

步 6: 若删除译码成功, 则将删除译码的结果作为 $\hat{\mathbf{c}}$ 。否则, 将步 1 的结果作为 $\hat{\mathbf{c}}$;

步 7: 结束混合译码过程。

2.2 复杂度分析

由 2.1 节可知, 提出的混合译码算法在 BP 迭代译码检测到无法纠正的错误时, 继续进行删除译码。假定 C_{HY} 为混合译码算法的总体复杂度, C_{BP} 和 C_{ER} 分别为 BP 迭代译码以及删除译码的复杂度, 则 C_{HY} 可以表示为

$$C_{HY} = C_{BP} + \alpha \cdot C_{ER} \quad (8)$$

其中, α 为 BP 迭代译码检测到无法纠正的错误的比例。因此, 与传统的 BP 迭代译码相比, 混合译码需要增加的相对复杂度为

$$\Delta = \frac{C_{HY} - C_{BP}}{C_{BP}} = \alpha \cdot \frac{C_{ER}}{C_{BP}} \quad (9)$$

由于 BP 迭代译码和删除译码所涉及的运算类型不同, 并且 BP 迭代译码在不同信噪比 (signal-to-noise ratio, SNR) 下的平均迭代次数不同, 因此本文通过计算机仿真确定不同信噪比下 C_{ER} / C_{BP} 的值, 相关结果在第 3 节中给出。

3 仿真结果及分析

为了验证本文提出的混合译码算法, 分别采用 2 组中等码长的随机 LDPC 码, 在 AWGN 信道下进行性能仿真。第 1 组 LDPC 码为文献^[15]中的码 204.33.486, 其码长为 204, 维数为 102; 第 2 组 LDPC 码为文献^[15]中的码 252.252.3.252, 其码长为 504, 维数为 252。这 2 组随机 LDPC 码的校验矩阵在文献^[15]中给出, 采用经典的渐进边增长 (Progressive Edge Growth) 算法构造, 通常用于评估随机 LDPC 码译码的性能。

对于 2 组 LDPC 码, BP 迭代译码算法采用归一化最小和算法^[12], 归一化因子设置为 0.75。图 1 和图 2 分别给出了这两组 LDPC 码采用不同算法译码的误比特率 (bit error rate, BER) 性能。从图 1 和图 2 中可以看出, 对于 2 组 LDPC 码, BP 迭代译码算法的最大迭代次数从 30 次增加到 50 次时, BER 性能没有明显改善, 这说明 BP 迭代译码在迭代次数达到一定数值后继续迭代意义不大。

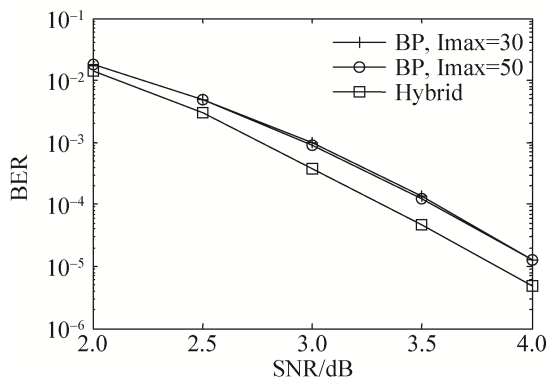


图1 码长204的LDPC码的误比特率性能

Fig. 1 BER performances of an LDPC code with length 204

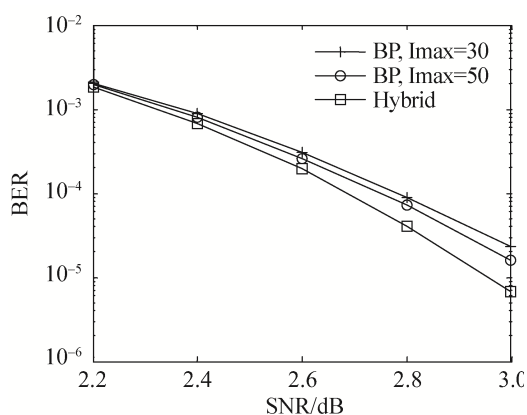


图2 码长504的LDPC码的误比特率性能

Fig. 2 BER performances of an LDPC code with length 504

下面分别仿真2组LDPC码采用本文提出的混合译码算法(Hybrid)的性能。根据上面的仿真结果,2组LDPC码混合译码算法中的BP迭代最大次数均设定为30次。对于码长为204的LDPC码,混合译码算法中的参数 N_U 取值为80,对于码长为504的LDPC码,参数 N_U 取值为160,它们均通过仿真优化得到。从图1和图2中可以看出,提出的混合译码算法的性能相对于仅进行BP迭代译码的性能得到了改善。例如,对于码长为204的LDPC码,在BER约为 2×10^{-5} 的条件下,混合译码算法相对于BP迭代译码获得了约0.3dB的增益。

表1和表2分别给出了2组LDPC码采用混合译码在上述仿真条件下增加的相对复杂度,计算方法由式(9)给出。其中, C_{ER}/C_{BP} 的值通过分别统计删除译码和BP迭代译码的平均计算量得到, α 通过BP迭代译码检测到无法纠正的错误比例得

出。从表1和表2中可以看出,混合译码相对于BP迭代译码增加的相对复杂度较低,特别是在信噪比较高的范围内。此外,删除译码所需要的操作简单易于实现。因此,本文提出的混合译码非常适合实际应用。

表1 码长204的LDPC码混合译码增加的相对复杂度

Tab. 1 Relative complexity increases in the hybrid decoding of LDPC code with length 204

SNR/dB	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
C_{ER}/C_{BP}	1.772	2.053	2.294	2.889	3.421
Δ	0.284	0.109	0.031	0.009	0.003

表2 码长504的LDPC码混合译码增加的相对复杂度

Tab. 2 Relative complexity increases in the hybrid decoding of LDPC code with length 504

SNR/dB	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
C_{ER}/C_{BP}	2.486	2.875	3.172	4.182	5.750
Δ	0.083	0.045	0.028	0.008	0.003

4 结论

改善二进制随机LDPC码的BP迭代译码算法的纠错性能具有重要意义。为此,本文提出了一种混合译码算法。该算法在传统的BP迭代译码检测到无法纠正的错误时,根据各比特在迭代中的累积可靠性进行判决,使得不可靠比特的判决为删除。然后,对判决向量进行删除译码。若删除译码成功恢复所有删除比特,则将删除译码的结果作为发送码字的估计,否则将BP迭代译码的结果作为发送码字的估计。仿真结果表明,提出的混合译码有效地克服了BP迭代译码算法在迭代次数增加到一定数值后性能几乎不再改善的缺点。相对于BP迭代译码,提出的混合译码算法增加的相对复杂度较低,纠错性能有了较大提升,是实用的良好选择。

参考文献:

- [1] Gallager R G. Low-density parity-check codes [J]. IRE Transactions on Information Theory (S0096-1000), 1962, 8(1): 21-28.
- [2] Gallager R G. Low-density parity-check codes [M]. Cambridge, MA, USA: The MIT Press, 1963: 1-5.
- [3] Luby M G, Mitzenmacher M, Shkrollahi M A, et al.

- Improved low-density parity-check codes using irregular graphs [J]. *IEEE Transactions on Information Theory* (S0018-9448), 2001, 47(2): 585-598.
- [4] Chung S Y, Forney G D Jr, Richardson T J, et al. On the Design of Low Density Parity Check Codes Within 0.0045 dB of the Shannon Limit [J]. *IEEE Communications Letters* (S1089-7798), 2001, 5(2): 58-60.
- [5] Smith B, Ardakani M, Yu W, et al. Design of irregular LDPC codes with optimized performance-complexity tradeoff [J]. *IEEE Transactions on Communications* (S0090-6778), 2010, 58(2): 489-499.
- [6] Zheng X, Lau F C M, Tse C K. Performance evaluation of irregular low-density parity-check codes at high signal-to-noise ratio [J]. *IET Communications* (S1751-8628), 2011, 5(11): 1587-1596.
- [7] Lin S, Diao Q, Blake I. Error floor and finite geometries [C]// *Proc. Turbo Codes and Iterative Information Processing (ISTC)*, Bremen, Germany, Aug., 2014. Germany: IEEE, 2014: 42-46.
- [8] Zhang S, Schlegel C. Controlling the error floor in LDPC decoding [J]. *IEEE Transactions on Communications* (S0090-6778), 2013, 61(9): 3566-3575.
- [9] Kou Y, Lin S, Fossorier M P C. Low-density parity-check codes based on finite geometries: a rediscovery and new results [J]. *IEEE Transactions on Information Theory* (S0018-9448), 2001, 47(7): 2711-2736.
- [10] Li J, Lin S, Abdel-Ghaffar K, et al. LDPC code designs, constructions, and unification [M]. New York, USA: Cambridge University Press, 2017: 98-110.
- [11] Paolini E, Liva G, Matuz B, et al. Maximum likelihood erasure decoding of LDPC codes: Pivoting algorithms and code design [J]. *IEEE Transactions on Communications* (S0090-6778), 2012, 60(11): 3209-3220.
- [12] Johnson S. Iterative error correction Turbo, low-density parity-check and repeat-accumulate codes [M]. New York, USA: Cambridge University Press, 2010: 48-70.
- [13] Schlegel C, Pérez L C. Trellis and Turbo coding: Iterative and graph-based error control coding [M]. New York, USA: Wiley-IEEE Press, 2015: 119-122.
- [14] Jiang M, Zhao C, Xu E, et al. Reliability-based iterative decoding of LDPC codes using likelihood accumulation [J]. *IEEE Communications Letters* (S1089-7798), 2007, 11(8): 677-679.
- [15] Mackay D J C. Encyclopedia of sparse graph codes [EB/OL]. (2010-02-23) [2010-02-23] <http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mackay/codes>

(上接第 4008 页)

- [15] 毛君. 机械振动学 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2016.
Mao Jun. Mechanical vibration [M]. Beijing, China: Beijing Institute of Technology Press, 2016.
- [16] 蒋进科, 方宗德, 苏进展. 基于承载传动误差幅值最小的斜齿轮齿面修形优化设计 [J]. *航空动力学报*, 2013, 28(7): 1637-1643.
Jiang Jinke, Fang Zongde, Su Jinzhan. Optimal design of modified helical gear tooth surfaces based on minimum amplitude of loaded transmission error [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2013, 28(7): 1637-1643.
- [17] 邓效忠, 徐爱军, 张静. 基于时标域频谱的齿轮传动误差分析与试验研究 [J]. *机械工程学报*, 2014, 50(1): 85-90.
Deng Xiaozhong, Xu Aijun, Zhang Jing. Analysis and Experimental Research on the Gear Transmission Error Based on Pulse Time Spectrum [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2014, 50(1): 85-90.