

1-8-2019

A Review of Rare Event Simulation

Liping Wang

Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

Wenhui Fan

Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research](#), [Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

A Review of Rare Event Simulation

Abstract

Abstract: Rare-event has a great significance for its lower probability of occurrence and greater harmfulness, the traditional Monte Carlo method is difficult to analyze it effectively. Rare-event simulation technique which is developed quickly and applied in many areas can sample the rare-event effectively with variance reduction methods and can estimate the occurrence probability of rare-event. *The research status of rare-event simulation technique is summarized firstly; the principles, problems and progress of the main methods are analyzed and concluded secondly; after that the application fields of the technique are elaborated and summarized; the future development tendency of rare event simulation technique is discussed finally.*

Keywords

rare event simulation, importance, MCMC, multi-level splitting

Recommended Citation

Wang Liping, Fan Wenhui. A Review of Rare Event Simulation[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(9): 3249-3254.

稀有事件仿真算法综述

王丽萍, 范文慧

(清华大学自动化系, 北京 100084)

摘要: 稀有事件因其发生概率很低、危害性较大而具有较高的研究价值, 传统的蒙特卡洛方法很难对这一问题进行有效分析, 稀有事件仿真技术可以通过方差缩减方法实现稀有事件的快速采样, 进而对稀有事件发生的概率进行高效估计。近年来, 该技术得到了快速的发展并广泛应用于多个领域, 基于此, 对稀有事件仿真算法的研究现状进行综述; 概括、分析了主流算法的基本原理、存在的问题及研究进展; 同时阐述和总结了算法的应用领域; 探讨了稀有事件仿真技术未来的发展趋势。

关键词: 稀有事件; 重要性抽样; MCMC; 多分裂算法

中图分类号: TP391.9

文献标识码: B

文章编号: 1004-731X (2018) 09-3249-07

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201809003

A Review of Rare Event Simulation

Wang Liping, Fan Wenhui

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Rare-event has a great significance for its lower probability of occurrence and greater harmfulness, the traditional Monte Carlo method is difficult to analyze it effectively. Rare-event simulation technique which is developed quickly and applied in many areas can sample the rare-event effectively with variance reduction methods and can estimate the occurrence probability of rare-event. The research status of rare-event simulation technique is summarized firstly; the principles, problems and progress of the main methods are analyzed and concluded secondly; after that the application fields of the technique are elaborated and summarized; the future development tendency of rare event simulation technique is discussed finally.

Keywords: rare event simulation; importance; MCMC; multi-level splitting

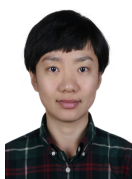
引言

稀有事件(rare event)是指发生概率小于 10^{-9} 的事件, 其发生的概率称为稀有事件概率(rare event probability)^[1]。稀有事件发生的概率虽然很低, 但是其造成的后果却不容小觑, 如各种极端自然灾害以及金融危机等。处理稀有事件的一个难点在于如

何对其进行量化分析。将仿真技术应用于稀有事件的评估中可以很好地解决这一难题, 这一技术便被称为稀有事件仿真(rare event simulation, RES)。

最早用于稀有事件仿真的方法为蒙特卡洛仿真方法^[2], 但因计算效率较低、所需样本量较大等原因, 并不能很好地满足稀有事件概率估计的要求。针对蒙特卡洛方法在处理稀有事件时存在的不足, 后续相继出现了许多快速仿真方法。

目前, 国外对于稀有事件仿真技术的研究机构主要有澳大利亚新南威尔士大学^[3], 加拿大蒙特利尔大学^[4], 法国国家信息与自动化研究所^[5], 澳大



收稿日期: 2016-05-11

修回日期: 2016-08-26;

作者简介: 王丽萍(1984-), 女, 吉林四平, 博士生, 研究方向为复杂系统仿真; 范文慧(1966-), 男, 吉林松原, 博士后, 教授, 研究方向为多学科协同仿真与优化。

<http://www.china-simulation.com>

• 3249 •

利亚昆士兰大学^[6], 荷兰屯特大学等^[7], 国内从事该领域及其相关技术研究的机构较少, 主要包括武汉大学等^[8]。

1 重要性抽样

1.1 重要性抽样算法基本原理

重要性抽样(Importance Sampling, IS)算法起源于上世纪50年代, 由Marshall提出^[9], 旨在通过测度变换达到方差缩减的目的, 从而使稀有事件频繁发生以加速仿真运行, 其基本思想是通过一个相对简单的概率密度函数代替目标概率密度函数, 称为重要性抽样密度函数(Importance Sampling Density), 并对其随机加权平均来近似计算目标函数的数学期望, 算法中的权重为目标概率密度函数与重要性抽样密度函数的似然比, 同时也保证了估计量的无偏性^[10-11]。IS算法的核心问题是重要性抽样密度函数的确定, 根据不同的优化标准, 衍生出了两种判定重要性抽样密度函数的方法: 交叉熵法(Cross-Entropy, CE)^[12]和极小化方差法(Variance Minimization, VM)^[13], 这两种方法是两类通用的自适应IS算法, 并且都旨在寻找最优的重要性抽样密度函数。

IS 算法虽然能够加速仿真的运行, 但同时也有着一些缺陷, 例如: 重要性抽样密度函数的选取较为主观且没有标准形式。同时, 对于较为复杂的系统, 最优重要性抽样密度函数很难以解析的方式或者自适应的方式获得, 而重要性抽样密度函数的选取则直接关系到仿真方法的效率, 如果重要性抽样密度函数选取不好, 将会大大减低算法的效率及准确率。除此之外, 当目标函数的维度较高时, IS 算法中的似然比会发生退化, 从而使算法的稳定性和可靠性大大降低。

1.2 重要性抽样算法优化策略

重要性抽样密度函数的选取是 IS 算法的核心, 在与稀有事件仿真相关的文献中, 对该问题的讨论也是经久不息。例如, Bucklew, J. A.^[14]基于大

偏差理论派生出最优重要性抽样密度函数。Rubinstein R.^[15]和 Zhang P.^[16]分别根据参数化和非参数化方法对重要性抽样密度函数进行分析, Sadowsky 等^[17]使用混合分布作为重要性抽样分布函数。

针对 IS 算法存在的似然比退化问题, Chan, J.C.C.等^[18]使用改进的交叉熵方法获取重要性采样密度函数。另一方面, Tim J. Brereton 等^[19]在其基础上, 提出了一种用于寻找混合 IS 分布的方法。另外, Zdravko I. Botev 等^[3]采用了分裂技术中的嵌套思想, 将稀有事件的求解过程划分为多个水平, 并得出相应的条件概率, 同时使用乘积法则对稀有事件发生概率进行有效估计, 在某种程度上确保从最小化方差的重要性抽样密度函数中实现精确采样。

2 马尔科夫链蒙特卡洛方法

2.1 马尔科夫链蒙特卡洛方法基本原理

马尔科夫链蒙特卡洛(Markov chain Monte Carlo, MCMC)方法是基于贝叶斯统计的采样方法, 由Metropolis等^[20]提出的, 将马尔科夫过程与蒙特卡洛仿真方法相结合, 也被称为动态蒙特卡洛积分法, 旨在从复杂的目标密度函数中抽取样本。该方法的核心思想是构造一马尔科夫链, 其达到稳态时的转移概率函数即为所求的零方差概率密度函数。

MCMC算法相较于IS算法的优势在于: 从稳态的马尔科夫链中连续取值, 其极限分布可以将复杂的高维问题分解为一系列维度相对较低的事件, 不要求似然函数和先验分布函数之间存在共轭结构。但在处理稀有事件时还存在所需的归一化常数较难估计及算法中涉及多个马尔科夫链, 难以度量各估计量间的依赖性以及方差等问题。

2.2 MCMC 算法优化策略

在采用MCMC方法处理稀有事件的基础上, 已有文献中相继出现了多种改进算法, 其改进策略

包括:

(1) 同IS算法相结合。Zdravko I. Botev等^[21]提出了马尔科夫链重要性抽样算法(Markov chain Importance Sampling, MCIS)方法, 旨在通过一步转移概率构建马尔科夫链并从中抽样。MCIS方法的基本思想为: 首先, 使用MCMC方法构造一马尔科夫链, 并将其稳态分布作为IS算法中的零方差分布函数。在此基础上, 生成独立同分布的样本以及生成相应的IS无偏估计量。

(2) 基于逆向分析。YUYA SUZUKI等^[22]考虑了具有重尾增量的随机和问题, 使用MCMC方法对其中的稀有事件进行仿真。相对于给定阈值估计相应稀有事件发生概率的方法, 文章采用逆向思维, 即根据给定的概率值估计相应的分位数。

(3) 基于马尔科夫过程。C. Kollman^[23]提出了线性模型方法、Pierre L'Ecuyer^[4]提出了步长逼近法以及T. P. Imthias Ahamed^[24]提出了转移核函数变换法。这三种方法均对马尔科夫过程中存在的预期总体成本进行分析, 并通过不同的策略对进行估计, 以实现从近似零方差重要性抽样密度函数抽样。但是, 从算法的执行效率上看, 转移核函数变换法更加高效。

3 分裂算法

分裂算法(splitting method)作为自然的启发式算法起源于上世纪50年代, 由Kahn和Harris^[25]最先将这种仿真技术应用于物理学的粒子传输过程中, 旨在将系统的状态空间分割成一系列嵌套的子系统, 并将待求的稀有事件看成是这一系列嵌套事件的交集。上世纪70年代, Bayes^[26]针对该算法, 考虑了一个简单的马尔科夫过程和单一阈值的情况。此后, 相继出现了多种多分裂算法。

3.1 RESTART 算法

M. Villén-Altamirano等^[27]于上世纪90年代, 在Bays算法的基础上, 提出了RESTART(REpetitive Simulation Trials After Reaching Thresholds)算法,

其基本思想是: 根据重要性函数和一系列嵌套的状态集将随机过程的状态空间分割成各个具有不同重要度的区域。定义与状态集相关的阈值, 当随机过程进入到状态空间中重要度更高的子区域中时, 照预定的分裂率执行相应次数的仿真重复试验。标准的RESTART算法要求在粒子到达每个阈值时所分裂出的子路径的数量是固定的, 并且在每一个时间步长内, 粒子不能穿越多个分裂阈值^[28]。应用RESTART方法的前提是需要确定一个合适的重要性函数, 如果其选择不当, 将会导致仿真失败^[29]。

3.2 基于 DPR 的分裂算法

另一种较为典型的多分裂算法是由Haraszti和Townsend^[30]提出的, 基于DPR理论提出了一种轨迹分裂仿真算法, 其基本思想是通过子集指标函数将系统的状态空间分割成一系列子集, 并对每个子集分配一个过采样因子, 以实现自由缩放有限状态马尔科夫链的稳态概率函数。相较于经典的分裂算法, 基于DPR的仿真技术的主要优势在于: (1)不对状态转换进行限制, 同时, 即使在对稀有事件划分存在多个重叠分区的条件下, 其提供的估计量仍然是近似无偏的。(2)允许对状态空间进行任意分区, 并允许任意两个子集之间进行转换, 使得DPR算法在系统运行过程中可以穿越一个或多个阈值。另外, 基于DPR的分裂算法允许稀有事件划分的多个子集之间存在交叠。但是, 该算法并不适用于连续时间过程。

3.3 RESTART/LRE 算法

此外, F. Schreiber^[31]将统计评估方法LRE(Limited Relative Error)^[32]同RESTART方法相结合, 提出了RESTART/LRE算法, 该算法是一种多步仿真方法, 通过逐步进行的方式确定仿真参数, 可以将仿真运行时间降低若干个数量级。在RESTART/LRE算法中, LRE算法作为随机仿真系统的一部分, 主要用于将小于或大于给定值的数值映射成两节点的马尔科夫链, 并将该链的一阶相关

系数定义成依赖于点 x 的本地相关函数,并对相应序列的稳态互补分布函数进行评估,同时还用于执行仿真的运行时间控制。该函数可分析待求随机变量的相关系数结构,以及度量仿真过程中的错误率,并可以极大的简化复杂的评估任务。目前,已有文献中对RESTART/LRE算法的研究较为有限,其应用也多集中在M/M/N排队系统中。

3.4 多分裂算法改进策略

对于经典分裂算法中存在的问题,后续相继出现了一些改进的多分裂算法,其主要思想可分为两大类:其一是基于大偏差理论、逆向分析等方法^[33]对重要性函数进行分析;其二是摒弃了标准算法中在算法开始前对各参数进行固定设置的做法,而是选择在算法运行的过程中,以自适应的方式确定分裂水平和分裂子路径数,以便更加适应在实际应用过程中,庞大而复杂的应用模型的需求。

4 稀有事件仿真算法应用

稀有事件仿真技术最早应用于粒子传输中,后续随着算法的多样性以及人们对其关注度的不断提高,稀有事件仿真技术也得到了更广泛的应用,主要包括:排队系统缓冲区溢出概率估计、动态网络及静态网络的可靠性估计以及高可靠性系统评估等问题,本文对该技术的部分应用领域进行了总结。

(1) 排队系统

稀有事件仿真技术在排队系统中的应用较为广泛,常用于解决带有反馈的两节点网络中出现排队溢出的概率估计^[34]、通信网络中的典型问题--有效分析计算极低的延迟阈值概率估计^[35]以及有限缓冲容量的SSM/M/1/B自相似排队网络的缓冲溢出概率估计^[36]等问题。

(2) 马尔科夫过程分析

稀有事件仿真技术针对马尔科夫过程的分析主要包括两个方面,其一,是可靠性估计问题,采用的方法主要包括改进的交叉熵方法^[37]以及基于

MCMC方法自适应生成状态依赖的重要性抽样密度函数等方法^[6];其二,是路径转移概率估计问题,采用的方法主要包括基于路径的重要性抽样算法^[38]以及将多分裂技术同分支和交互粒子系统相结合^[39]等方法。

(3) 静态网络可靠性估计

稀有事件仿真技术在静态网络中的应用主要为对其可靠性进行评估,主要方法包括基于动态重要性抽样的蒙特卡洛方法^[4]、基于粗糙近似的自适应IS算法^[5]以及将置换蒙特卡洛方法同广义分裂算法相结合^[40]等方法。

此外,稀有事件仿真技术在计数问题^[41]、光波通信系统^[42]、系统生物学^[43]以及货代风险评估等^[44]领域也有着较好的应用。

5 稀有事件仿真算法研究趋势展望

稀有事件仿真技术经过几十年的不断优化与拓展,已经越来越趋于成熟,可以很好的对多领域中存在的稀有事件的发生概率进行估计,随着其不断发展,未来仍有很好的发展前景。本文对这一领域中存在的一些问题进行了分析,为今后的研究方向提供参考。

(1) 关键参数的选取

在稀有事件仿真技术中,无论是IS算法还是多分裂算法,都存在着非常重要但是又悬而未决的关键函数的选择问题。其一是,IS算法中的最优重要性抽样密度函数的标准化选取;其二是多分裂算法中的重要性函数的标准化选取。这两个函数的选取都直接关系到各自算法中相应估计量方差的大小,虽然已有多种优化方法,但是其应用范围仍然有限,不具有普遍性。同时,对于多分裂算法,分裂数和分裂阈值的选取也是需要进一步深化研究的问题。

(2) 算法评价准则

算法的鲁棒性和工作归一化方差是评价稀有事件仿真算法的基本准则,然而该两项标准的精度并不能满足所有算法的需求,后续出现了对数渐进

相关错误率以及对数渐进工作规范化相关错误率等评价准则。如何不断优化算法的评价准则也是未来值得考虑的问题之一。

(3) 维度灾难

稀有事件仿真算法同样存在维度灾难问题,例如,在标准的IS算法中,待计算的维度会成指数倍增加,从而并不适用于较复杂的大型系统。对于该问题,部分文章采用对重要性抽样密度函数进行优化等方法,但是,仍然无法彻底避免维度灾难问题。

(4) 计算复杂度和准确率

在经典稀有事件仿真算法的基础上,相继出现了各种不同的优化算法,旨在在算法推进的过程中以自适应的方式确定各关键参数。这种方式可以很好的减弱了算法的主观性,但同时部分算法的复杂度也因此而增加,进而增加了计算成本。此外,部分自适应算法采用渐进的方式逼近目标参数,结果导致最终的估计量是有偏的,所以,如何在合理的计算成本范围内提高算法的精度也是值得探讨的问题。

(5) 算法的通用性

已有的稀有事件仿真算法,均通过实例验证了算法的有效性,但是,同时存在算法的通用性有待提高的问题。例如,部分文章给出的验证实例较少,大多是针对若干节点的网络、单个或多个服务器队列的排队系统或较为简单的可靠性系统进行验证,未对算法进行深入推广,并且大部分算法只适用于同种类型的网络或系统,而并不适用于解决其他类型的问题。另外,大多数仿真算法均是基于理论层面对相关问题进行分析,如何将理论成果进行实际化应用,使其更加适用于较复杂的大型系统及网络中的稀有事件概率估计问题也是亟待解决的问题之一。

6 结论

稀有事件仿真技术作为估计各领域稀有事件发生概率的有效工具,在日常的生产生活中发挥着至关重要的作用。目前,稀有事件仿真技术得到了

长足的发展,诸多领域的应用也证明了这一技术有着不可替代的应用价值,其发展前景十分广阔。对于稀有仿真技术而言,如何对相关算法进行深层优化、完善,提高算法的应用价值,有效预测现实生活中的各种技术风险以及灾难,是该技术未来的主要发展方向之一。本文在分析了经典算法及其存在的主要问题的基础上,介绍了稀有事件仿真算法的研究现状及进展,并讨论了今后的发展方向,希望能够为相关领域的研究人员提供参考。

参考文献:

- [1] S Asmussen, P W Glynn. Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis[M]. Springer, New York, 2007.
- [2] Christian P Robert, George Casella. Monte Carlo Statistical Methods[M]. Springer, New York, 2004.
- [3] Zdravko I Botev, Dirk P Kroese. An Efficient Algorithm for Rare-event Probability Estimation, Combinatorial Optimization, and Counting[J]. Methodol Comput Appl Probab (S1387-5841), 2008, 10(4): 471-505.
- [4] L'Ecuyer P, B Tuffin. Approximating zero- variance importance sampling in a reliability setting[J]. Annals of Operations Research (S0254-5330), 2011, 189(1): 277-297.
- [5] Bruno Tuffin, Saggadi S, Pierre L'Ecuyer. An adaptive zero-variance importance sampling approximation for static network dependability evaluation[J]. Computers and Operations Research (S0305-0548), 2014, 45(45): 51-59.
- [6] Grace A W, Kroese D P, Sandmann W. Automated state-dependent importance sampling for Markov jump processes via sampling from the zero-variance distribution[J]. Journal of Applied Probability (S0021-9002), 2014, 51(3): 741-755.
- [7] Marnix J J Garvels. The splitting method in rare event simulation[D]. PhD thesis, University Twente, 2000.
- [8] Gao Fuqing. Moderate deviations and large deviations for kernel density estimators[J]. Journal of Theoretical Probability (S0894-9840), 2003, 16(2): 401-418.
- [9] A W Marshall. The use of multi-stage sampling schemes in Monte Carlo computations[J]. Symposium on Monte Carlo Methods. New York: Wiley (S0162-1459), 1956: 123-140.
- [10] S Asmussen, P W Glynn. Stochastic Simulation[M]. New York: Springer-Verlag, 2007.
- [11] G Rubino, B Tuffin, Eds. Rare Event Simulation using

- Monte Carlo Methods[M]. John Wiley & Sons, 2009.
- [12] Rubinstein R Y, Kroese D P. The Cross-Entropy Method [J]. *Technometrics* (S0040-1706), 2008, 50(1): 92-92.
- [13] Qiu Yue. An Importance Sampling Method Based on Variance Minimization with Applications to Credit Risk [J]. *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference* (S1531-5878), 2010, 3(3): 3176-3179.
- [14] Bucklew J A. *Large Deviation Techniques in Decision, Simulation and Estimation*[M]. New York, Wiley, 1990.
- [15] Rubinstein R. Optimization of computer simulation models with rare events[J]. *European Journal of Operational Research* (S0377-2217), 1997, 99(1): 89-112.
- [16] Zhang P. Nonparametric importance sampling[J]. *Journal of the American Statistical Association* (S0162-1459), 1996, 91: 1245-1253.
- [17] Sadowsky J, J Bucklew. On large deviations theory and asymptotically efficient Monte Carlo estimation[J]. *IEEE transactions on Information Theory* (S0018-9448), 1990, 36(3): 579-588.
- [18] Chan J C C, Dirk P Kroese. Improved cross-entropy method for estimation[J]. *Statistics and Computing* (S0960-3174). 2012, 22(5): 1031-1040.
- [19] Tim J Brereton, Joshua C.C Chan, Dirk P Kroese. Fitting Mixture Importance Sampling Distributions via Improved Cross-Entropy[J]. *Proceedings of the 2011 Winter Simulation Conference* (S0891-7736), 2012, 2(4): 422-428.
- [20] Metropolis N, Rosenbluth A W, Rosenbluth M N, et al. Equations of state calculations by fast computing machines[J]. *J. Chem. Phys* (S0021-9606), 1953, 21(6): 1087-1092.
- [21] Botev Z I, L'Ecuyer P, Tuffin B. Markov chain importance sampling with applications to rare event probability estimation[J]. *Stat Comput* (S0960-3174), 2013, 23(2): 271-285.
- [22] YUYA SUZUKI. Rare-event Simulation with Markov Chain Monte Carlo[D]. MA thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2013.
- [23] C Kollman, K Baggerly, D Cox, et al. Adaptive importance sampling on discrete Markov chains[J]. *Annals of Applied Probability* (S1050-5164), 1999, 9(2): 391-412.
- [24] T P Imthias Ahamed, V S Borkar, S Juneja. Adaptive Importance Sampling Technique for Markov Chains Using Stochastic Approximation[J]. *Operations Research* (S1109-2858), 2006, 54(3): 489-504.
- [25] H Kahn, T E Harris. Estimation of particle transmission by random sampling[J]. *National Bureau of Standards Appl. Math. Series*, 1951, 12: 27-30.
- [26] Bayes A J. Statistical techniques for simulation models[J]. *The Australian Computer Journal* (S0004-8917), 1970, 2(4): 180-184.
- [27] Villén-Altamirano M, Villén-Altamirano J. RESTART: A straightforward method for fast simulation of rare events[J]. *Proceedings of the 26th Winter simulation conference* (S0891-7736), 1995, 79(6): 282-289.
- [28] Villen-Altamirano M, Villen-Altamirano J. Analysis of restart simulation: Theoretical basis and sensitivity study[J]. *European Transactions on Telecommunications* (S1124-318X), 2002, 13(4): 373-385.
- [29] Glasserman P, Heidelberger P, Shahabuddin P, et al. Multilevel splitting for estimating rare event probabilities[J]. *Operation Research* (S0030-364X), 1996, 47(4): 585-600.
- [30] Haraszti Z, Townsend J K. The theory of direct probability redistribution and its application to rare event simulation[J]. *Proc. of the IEEE international conference on communications* (S0090-6778), 1999, 9(2): 1443-1450.
- [31] F Schreiber, C Görg. Rare event simulation: a modified RESTART method using the LRE algorithm[J]. *Pr-oceedings 14th ITC, Antibes, France, June 6-10, Elsevier, North Holland* (S1388-3437), 1994, 1: 787-796.
- [32] F Schreiber. Effective control of simulation runs by a new evaluation algorithm for correlated random sequences[J]. *AEÜ* (S1434-8411), 1988, 42(6): 347-354.
- [33] Garvels M J J, Ommeren J K C W, Kroese D P. On the importance function in splitting simulation[J]. *European Transaction on Telecommunications* (S1124-318X), 2002, 13(4): 363-371.
- [34] Paul Dupuis, Ali Devin Sezer, Hui Wang. Dynamic importance sampling for queueing networks[J]. *The Annals of Applied Probability* (S1050-5164), 2007, 17(4): 1306-1346.
- [35] Haraszti Z, Townsend J K. The theory of direct probability redistribution and its application to rare event simulation[J]. *ACM Transactions on Modelling and Computer Simulation* (S1558-1195), 1999, 9(2): 1443-1450.
- [36] Izabella Lokshina, Evan Schiele. Buffer Overflow Simulation in Self-Similar Queuing Networks with Finite Buffer Capacity Accelerated Using RESTART/LRE[J]. *Wireless Telecommunications Symposium (WTS)* (S1006-7043), 2015, 5(3): 1-7.