

1-8-2019

Detection Method of Weak Signal with Multi-stable Stochastic Resonance Under Color Noise

Zhang Gang

1. Chongqing Key Laboratory of Signal and Information Processing, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China;;

Yi Tian

1. Chongqing Key Laboratory of Signal and Information Processing, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China;;

Li'na He

2. Chongqing College of Electronic Engineering, Chongqing 401331, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Detection Method of Weak Signal with Multi-stable Stochastic Resonance Under Color Noise

Abstract

Abstract: The color noise is combined with a multi-stable stochastic resonance system. The characteristics of stochastic resonance in multi-stable system are analyzed deeply under color noise which is more close to reality, and the signal-to-noise ratio gain is regarded as the measurement index. *The self-adaptive method is used to study multi-stable stochastic resonance system parameters a , b , c and intensity amplification factor D on the resonant output. Based on the above analysis, different signals are detected. Multi-stable system is applied in rolling bearing fault diagnosis.* Experimental results demonstrate that the parameters induced multi-stable system has significant detection effect on weak signals, and the SNR of single frequency signal can increase 12 dB in the case of SNR of -20 dB.

Keywords

multi-stable system, color noise, self-adaptive methods, stochastic resonance, signal-to-noise ratio gain

Recommended Citation

Zhang Gang, Yi Tian, He Li'na. Detection Method of Weak Signal with Multi-stable Stochastic Resonance Under Color Noise[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(9): 3420-3428.

色噪声下多稳态随机共振的微弱信号检测方法

张刚¹, 易甜¹, 贺利娜²

(1.重庆邮电大学信号与信息处理重庆市重点实验室, 重庆 400065; 2.重庆电子工程职业学院, 重庆 401331)

摘要: 将与实际更为接近的色噪声和多稳态随机共振系统相结合, 采用信噪比增益作为测度指标, 对多稳态随机共振特性进行了深入的研究。采用自适应的方法探究了色噪声下多稳态随机共振的系统参数 a , b , c 以及噪声放大系数 D 对信噪比增益和系统输出的影响。进一步研究了多稳态随机共振对不同信号的检测性能。将多稳态系统应用于轴承故障诊断。实验结果表明: 多稳态系统对微弱信号模型具有良好的检测效果, 单频信号信噪比为 -20 dB 情况下有 12 dB 的提高。

关键词: 多稳态系统; 色噪声; 自适应; 随机共振; 信噪比增益

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2018) 09-3420-09

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201809024

Detection Method of Weak Signal with Multi-stable Stochastic Resonance Under Color Noise

Zhang Gang¹, Yi Tian¹, He Li'na²

(1.Chongqing Key Laboratory of Signal and Information Processing, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China; 2. Chongqing College of Electronic Engineering, Chongqing 401331, China)

Abstract: The color noise is combined with a multi-stable stochastic resonance system. The characteristics of stochastic resonance in multi-stable system are analyzed deeply under color noise which is more close to reality, and the signal-to-noise ratio gain is regarded as the measurement index. The self-adaptive method is used to study multi-stable stochastic resonance system parameters a , b , c and intensity amplification facto D on the resonant output. Based on the above analysis, different signals are detected. Multi-stable system is applied in rolling bearing fault diagnosis. Experimental results demonstrate that the parameters induced multi-stable system has significant detection effect on weak signals, and the SNR of single frequency signal can increase 12 dB in the case of SNR of -20 dB.

Keywords: multi-stable system; color noise; self-adaptive methods; stochastic resonance; signal-to-noise ratio gain

引言

R.Benzi 等学者在探究古气象冰川问题时提出了随机共振的概念^[1]。随后 20 世纪 90 年代, Collins 将信息论和随机共振相结合, 提出一种非周期随机

共振理论^[2]。此后, 研究人员不仅在实验中观察到随机共振现象而且不断的提出新的随机共振理论, 拓宽了随机共振在微弱信号检测的应用领域。

随机共振是众多非线性系统中由噪声驱动的一种普遍现象。在输入信号, 噪声和非线性系统三者的协同作用下, 一部分噪声的能量转移到信号上, 使得局部输出信噪比得到大幅增加, 增强了信号的显现, 产生随机共振^[3]。在利用随机共振检测微弱信号的研究中, 众多学者以经典的双稳系统为



收稿日期: 2017-01-03 修回日期: 2017-02-17;
基金项目: 国家自然科学基金(61671095, 61371164, 61275099), 重庆市教育委员会科研项目(KJ1600427, KJ1600429);
作者简介: 张刚(1976-), 男, 重庆, 博士, 副教授, 研究方向为混沌保密通信、微弱信号检测。

<http://www.china-simulation.com>

• 3420 •

基础, 不断地改进提出新的随机共振系统。由于多稳态系统在噪声利用率方面比双稳系统好, 近年来多稳态系统引起极大关注, 各种不同的多稳系统被提出。冷永刚等研究了三稳系统的动态响应及随机共振^[4]; 贺利芳等研究了 levy 噪声下三稳随机共振特性分析^[5]; 李月等研究了色噪声背景下运用混沌检测微弱信号^[6]; 周丙常等提出了关联噪声下的非对称双稳系统的随机共振^[7]; 焦自健等研究了乘性加性噪声下非对称双稳系统的随机共振^[8]。在系统参数一致的前提下, 不同噪声背景产生的随机共振条件也不同, 从而引起输出信噪比的变化。所以研究不同噪声对随机共振的影响也是广大学者的研究方向。

论文研究了色噪声背景下多稳态随机共振系统。色噪声指有限带宽, 且在任意两个时刻有一定的相关性, 这有别于白噪声。而且大多数数据采集设备本身就有带限效应, 研究色噪声背景下的随机共振现象就更加具有应用价值。论文首先分析色噪声理论, 波形及频谱分布, 其次运用自适应算法研究了不同系统参数 a, b, c 和噪声放大系数 D 诱导系统产生随机共振的范围及对信噪比增益的变化规律, 最后对同一参数下高、低频(多频)和周期方波信号进行实验验证并且将多稳态随机共振系统应用于轴承故障诊断。实验结果表明多稳态随机共振微弱信号检测理论在轴承故障检测, 水声检测, 信号处理技术中的研究和发展起着促进作用, 具有较好的理论与实际应用价值。

1 多稳态系统基本理论

朗之万方程最初是用来描述布朗粒子的运动轨迹, 它给出了布朗粒子的速度, 加速度和随机力三者之间的关系。当布朗粒子受到外场力作用时, 朗之万方程可写为^[9]:

$$x'' + rx' = f(x) + \xi(t) \quad (1)$$

势函数 $U(x)$ 的不同, 可以得到不同稳态的随机共振系统^[10]。在不考虑方程二阶微分项的影响下(过阻尼), 可以得到噪声和微弱信号共同作用的

多稳态系统有如式(2)。

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dU(x)}{dx} = s(t) + D\xi(t) \quad (2)$$

式中: $s(t) = A\sin(2\pi ft)$ 为输入信号; A 为输入信号的幅度; f 为待测信号的频率; $\xi(t)$ 为高斯色噪声且满足:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad (3)$$

$$\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = \frac{D}{\tau_0} \exp\left[-\frac{|t-s|}{\tau_0}\right] \quad (4)$$

式中: D 代表噪声放大系数。

$U(x)$ 为多稳态系统的势函数如图 1 所示, 其表达式为:

$$U(x) = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{6}cx^6 \quad (5)$$

式中: $a, b, c > 0$ 。

令 $U'(x) = 0$ 可以得到两个不稳定点和三个稳定点

$$x_{\max} = \pm \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}} \quad (6)$$

$$x_{\min} = 0, \pm \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}} \quad (7)$$

将其代入势函数 $U(x)$, 可得中间的势垒高度为 ΔU_1 , 两边的势垒高度为 ΔU_2 。

$$\Delta U_1 = U(x_{\max}) - U(0) = \frac{1}{24c^2}[(b^2 - 4ac)^{\frac{3}{2}} + b(b^2 - 6ac)] \quad (8)$$

$$\Delta U_2 = U(x_{\max}) - U(x_{\min}) = \frac{1}{12c^2}(b^2 - 4ac)^{\frac{3}{2}} \quad (9)$$

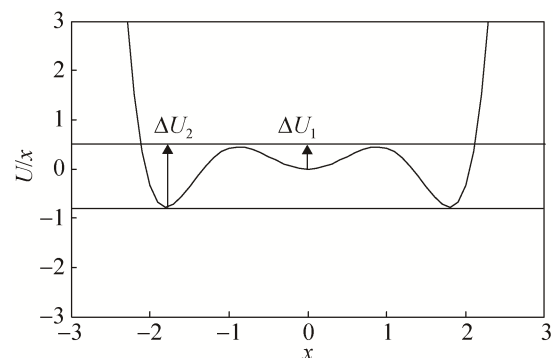


图 1 多稳态系统势函数
Fig. 1 Multi-stable potential function

当布朗粒子处于左侧势垒点时, 受到任意微小

的外界扰动时，粒子都会落入其中任意一个势阱内，如果粒子落入 ΔU_2 的势阱内，那么粒子难以跃过势垒，即只能停留在势阱内振动并逐渐趋于稳定状态；如果粒子落入 ΔU_1 的势阱内，则粒子较容易跃过势垒，而最终未能返回初始势阱。当外界输入增强时，粒子能量足以跃过任何一个势垒实现连续阱间跃迁。

2 基于参数调节的自适应算法

周期信号的随机共振的性能测度指标包括功率谱、信噪比、信噪比增益、驻留时间等等^[11]。大多数文献都是以信噪比来评价检测的效果，但是信噪比的计算需要知道准确的频率信息，而这一点在工程应用中很难做到，而且信噪比会随输入信号的变化而变化，比较不固定，只能表示单个信号的输入或输出情况，而无法表示输入输出的相对关系。所以论文选取更为合适的信噪比增益(signal-to-noise ratio gain, SNRgain)作为测度指标，它可以反映出随机共振系统在多大程度上加强信号的能量。而且更加直观的反应输入和输出的变化关系，其定义为^[12]：

$$SNR = 10 \log_{10}(S/N) \quad (10)$$

$$SNR_{gain} = \frac{S_{out}(\omega)/N_{out}(\omega)}{S_{in}(\omega)/N_{in}(\omega)} \quad (11)$$

式中： S 为信号的能量； N 为噪声的能量。

显然信噪比增益越大信号的检测效果越好，但是系统参数调节一直是随机共振的难点，适当的参数会使信噪比增益大于 1，即经过随机共振后，在增强了有用信号的同时也提高了输出信噪比。如何调节系统参数或噪声放大系数实现随机共振也缺少有效的指导，大部分的学者都是依靠经验和大量实验，这在很大程度上限制了随机共振的应用，所以自适应随机共振应运而生。自适应算法是通过某种规律，使设定的测度指标达到最优的过程，所以论文采用自适应算法调节多稳态系统参数，使系统达到最佳的共振效果。首先设定噪声放大系数 D ， b ， c 让系统参数 a 在一定的范围内选取不同的值，

以此值作为系统参数，通过计算系统信噪比增益衡量系统性能，从而自适应的寻找出系统最佳参数。其他参数按照同样的方法调节，基本流程见图 2。

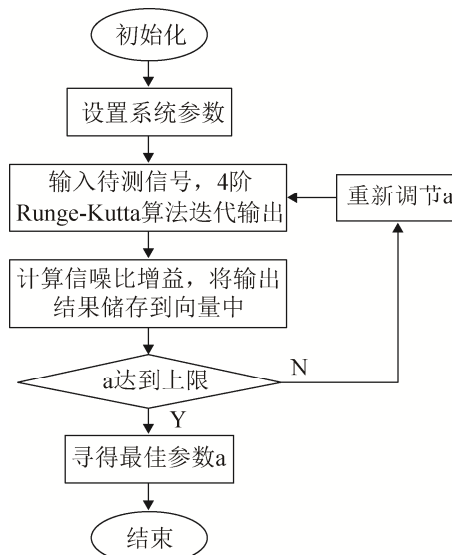


图2 自适应算法流程图

Fig. 2 Flow chart of adaptive algorithm

具体步骤为：

- 1、初始化各系统参数 b ， c 和噪声放大系数 D ，设置系统参数 a 的搜索范围以及系统迭代步长。
- 2、将微弱信号输入多稳态系统，采用四阶龙格库塔法求解非线性朗之万方程。
- 3、计算系统信噪比增益并根据仿真结果记录数据，其最大值为对应的最佳参数。
- 4、寻得最佳参数 a 达到最佳随机共振状态。

3 数值仿真实验

在随机共振的研究中，大部分文献都选用高斯白噪声作为背景噪声，理想白噪声功率谱密度是均匀分布且不同时刻互不相关的，这有利于信号的提取。但在实际中是不存在这种噪声的，因为需要发射功率为无穷大。为了使研究更接近实际，采用色噪声模型，其功率谱密度为^[11]：

$$S(\omega) = \int e^{-j\omega\tau} \frac{D}{\tau_0} e^{-|\tau|/\tau_0} d\tau = \frac{D}{1 + \tau_0^2 \omega^2} \quad (12)$$

呈洛伦兹(Lorenz)分布。 $s(\omega)$ 在低频处分布均匀，而在高频处则以 $2D/\omega^2\tau^2$ 的形式趋于 0。所以色噪

声的功率谱不是在 $(-\infty, +\infty)$ 区间内均匀分布, 而是在 $\omega=0$ 为中心的 $(-1/\tau, 1/\tau)$ 内均匀分布^[11]。所以色噪声时域波形及功率谱如图 3 所示。由于数据采集设备本身就有带限效应, 所以研究噪声的有限相关时间具有实际的意义, 而研究色噪声背景下的多稳态随机共振问题就更加具有应用前景。

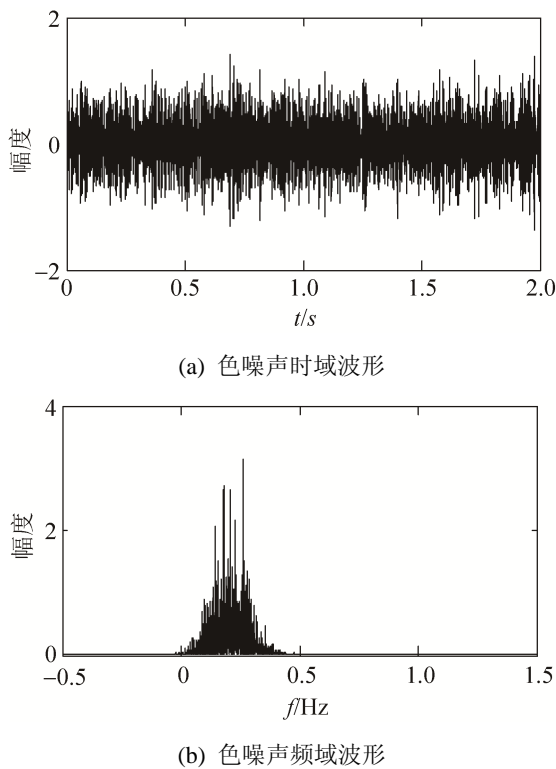


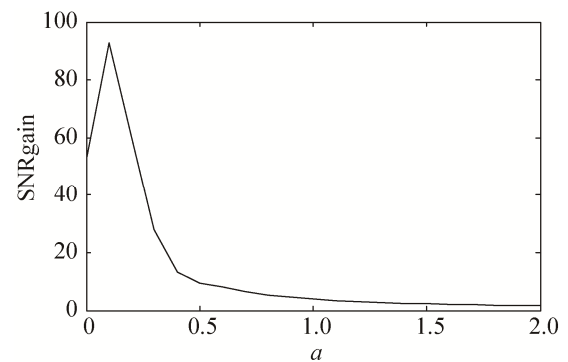
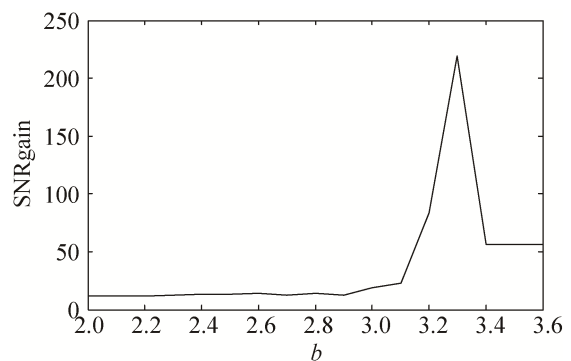
图3 色噪声时域波形及频谱

Fig. 3 Color noise time domain waveform and spectrum

下面将深入研究色噪声下不同多稳态随机共振系统参数 a , b , c 以及噪声放大系数 D 对信噪比增益的作用规律。采用四阶龙格库塔 (Runge-Kutta) 对方程(2)进行数值计算, 采样频率 $F_s = 5 \text{ Hz}$, 相应的迭代步长 $h = 1/F_s = 0.2 \text{ s}$, 计算点数为 10 000。当系统参数为 $b = 2.6$, $c = 2.8$, $D = 0.15$ 时, 由图 4(a)可知, 输入信号频率为 $f = 0.01 \text{ Hz}$, 幅度为 $A = 0.04$ 。当 $a \in [0, 0.4]$ 时, 信噪比增益随参数 a 先急剧增加后减小, 在 0.1 左右取得最大信噪比增益值。当 $a \in [0.4, 2]$ 时, 信噪比增益逐渐趋于零, 说明粒子无法越过势垒高度产生随机共振。由图 4(b)可知, 保持其他参数不变的

情况改变参数 b , 当 b 在区间 $[0, 3.1)$ 时信噪比增益趋于平稳说明粒子无法越过势垒高度, 此时无法产生随机共振。当 $b \geq 3.1$ 时信噪比增益先增大后减小, 呈单峰值变化。由图 4(c)可知, 当 $a = 0.2$, $b = 3.5$ 其他参数保持不变, 参数 c 在 2 左右取得最大值。由图 4(d)可知, 信噪比增益曲线出现了双峰, 这是因为多稳态系统发生随机共振与双稳的不同引起的, 多稳态系统中间势阱和两侧势阱有可能同时发生随机共振, 信噪比增益曲线中比较大的峰值是由粒子在两侧势阱中跳跃引发的, 较小的峰值是由粒子在中间势阱中跳跃引发的。由以上分析可知, 噪声放大系数 D 的变化对系统输出性能的影响显著。

在研究色噪声下参数诱导的随机共振现象时, 仿真输入信号为 $s = A \sin(2\pi ft)$, 其中输入信号幅度为 $A = 0.04$, 频率为 $f = 0.01 \text{ Hz}$ 。将待测信号加噪声输入到随机共振系统, 利用自适应调整系统参数达到最佳随机共振状态, 其中 $a = 0.2$, $b = 2.6$, $c = 2.8$ 。

(a) 信噪比增益随系统参数 a 的变化曲线(b) 信噪比增益随系统参数 b 的变化曲线

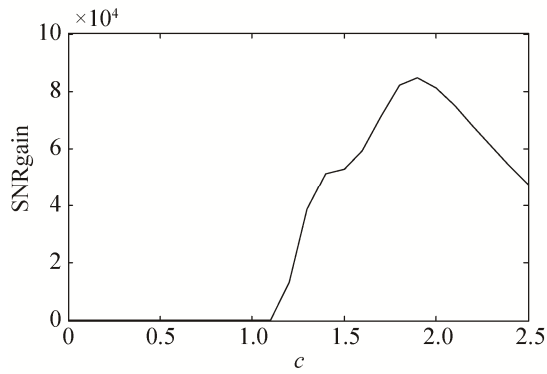
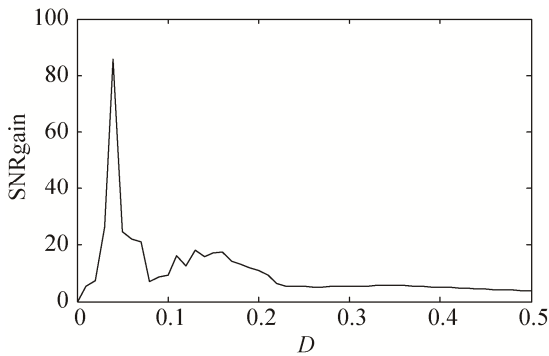
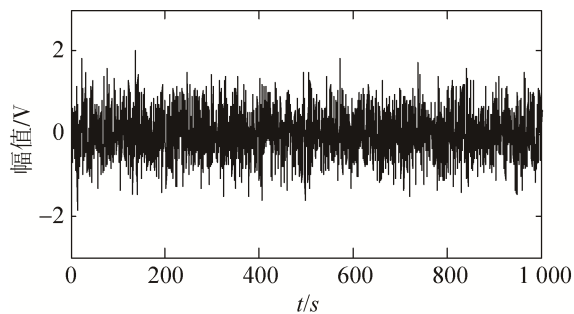
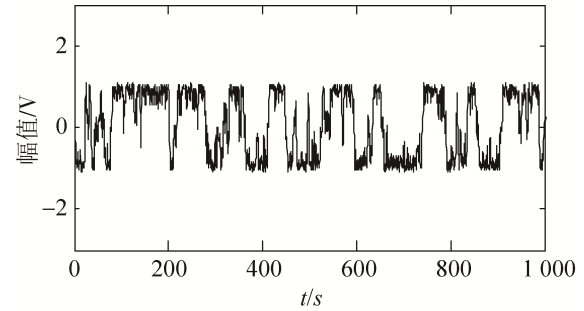
(c) 信噪比增益随系统参数 c 的变化曲线(d) 信噪比增益随系统参数 D 的变化曲线图4 参数 a 、 b 、 c 、 D 随信噪比增益的变化曲线
Fig. 4 SNR gain changing with a 、 b 、 c 、 D

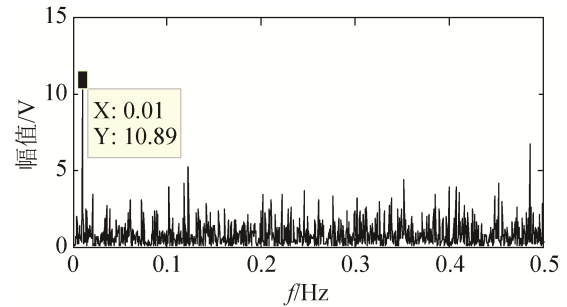
图5(a)~(b)为输入输出信号的时域图,由图5(a)可以看出有用信号完全被噪声淹没,看不出任何信号的特征。由图5(b)可知输出信号来回交替,呈现出周期状态。图5(c)~(d)为系统输入输出的频域。从图中可以看出,随机共振系统 $f=0.01\text{ Hz}$ 处有一明显的尖峰,频谱幅度从10.89增加到427.1,信噪比从 -20.689 dB 提高到 -8.786 dB ,并且高频噪声能量向低频转移呈现洛伦茨分布。



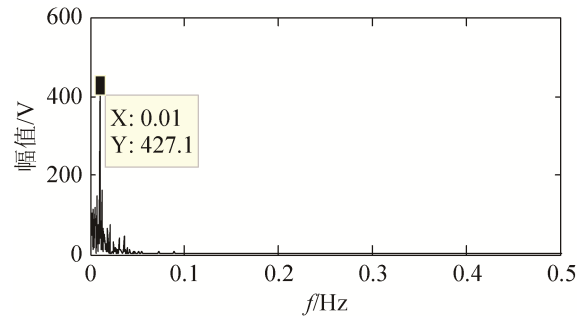
(a) 多稳态输入信号波形



(b) 多稳态输出信号波形



(c) 多稳态输入信号频谱



(d) 多稳态输出信号频谱

图5 多稳态系统输入输出时域、频域波形

Fig. 5 Time domain and frequency domain waveform of multi-stable system input and output

下面将多稳态系统与双稳系统作对比,当双稳系统只受到正弦信号作用时,布朗粒子就被限制在某一势阱内。如果加入适当的色噪声,布朗粒子便在两个势阱之间来回运动。而多稳态系统拥有三个势阱,势垒高度也不一样,色噪声的加入更能引起布朗粒子跃迁到不同的势阱中。设置双稳系统参数 $a=1$, $b=1$, $D=0.03$ 输入信号为 $s=A\sin(2\pi ft)$, 信号幅度为 $A=0.04$, 频率为 $f=0.01\text{ Hz}$ 。信号经过双稳系统频谱幅度从12.27增加到324.6,输入双稳系统前信噪比为 -24.769 dB ,系统输出的信噪比为 -13.901 dB ,可知信噪比增益为10.868 dB。多

稳态系统不论是在频谱幅度的提高方面, 还是信噪比增益方面都要比双稳系统好, 实验表明多稳态系统在噪声利用率方面要比双稳系统高。

由图 5 和图 6 可知系统对单频率信号的检测效果比较明显, 所以进一步验证多稳态系统对多频信号是否具有同样的检测效果。由于大参数信号直接通过随机共振系统不满足绝热近似理论, 所以需对信号进行二次采样处理。二次采样定理^[12-15]的实质是系统先将实测采集的数据再经过第二次采样, 将高频信号进行线性压缩变为低频信号, 然后将低频信号输入随机共振系统, 最后按照二次采样的压缩比 $R = F_s / F_{sr}$ 恢复待测信号。设置信号频率分别为 $f_1 = 5 \text{ Hz}$, $f_2 = 15 \text{ Hz}$, $f_3 = 25 \text{ Hz}$, 采样频率为 $F_s = 5000 \text{ Hz}$, 二次采样频率为 $F_{sr} = 50 \text{ Hz}$, 迭代步长为 $h = 0.2$, 噪声放大系数 $D = 0.15$, 信号幅度 $A_1 = A_2 = A_3 = 0.04$ 仿真实验设置输入信号为 $s = 0.04 \sin(10\pi t) + 0.04 \sin(30\pi t) + 0.04 \sin(50\pi t)$ 。多稳态系统参数为 $a = 0.4$, $b = 2.6$, $c = 2.8$ 。

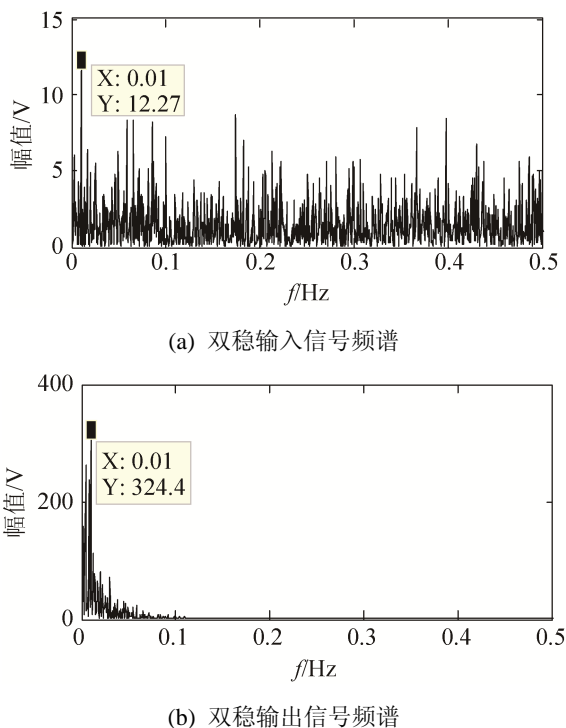


图 6 双稳系统输入输出频域波形

Fig. 6 Input and output frequency domain waveform of bistable system

如图 7 可知待测信号频率处都出现了明显的

峰值, 特征频率为 5 Hz 的幅度从 3.983 增加到 153.2 , 10 Hz 的幅度从 5.887 增加到 147.7 , 15 Hz 的幅度从 3.334 增加到 53.68 。 15 Hz 后的频谱毛刺也有所减低, 说明多稳态系统对多频信号也具有同样的检测效果。

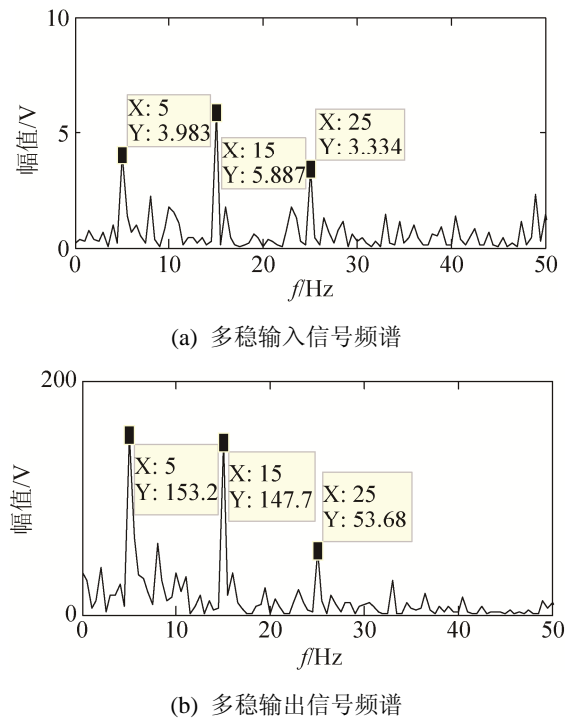
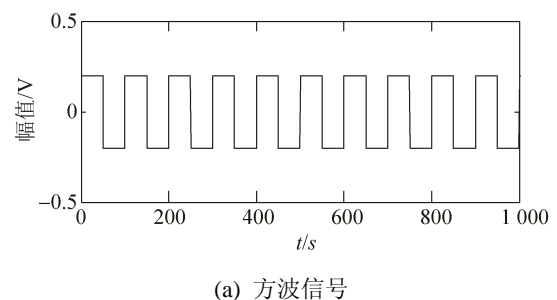


图 7 多频信号输出频域波形

Fig. 7 Multi-frequency signal output frequency domain waveform

以上都是对正弦信号进行讨论, 在实际问题中正弦信号要经过调制携带一定的信息。而且单个频率的正弦信号携带不了信息, 所以论文将随机共振推广到数字通信中, 其中的信号模型大部分都是方波, 将方波输入到多稳态系统。图 8(a)是输入的方波信号, 图 8(b)是输入方波加噪声, 图 8(c)是经过多稳态随机共振系统输出。



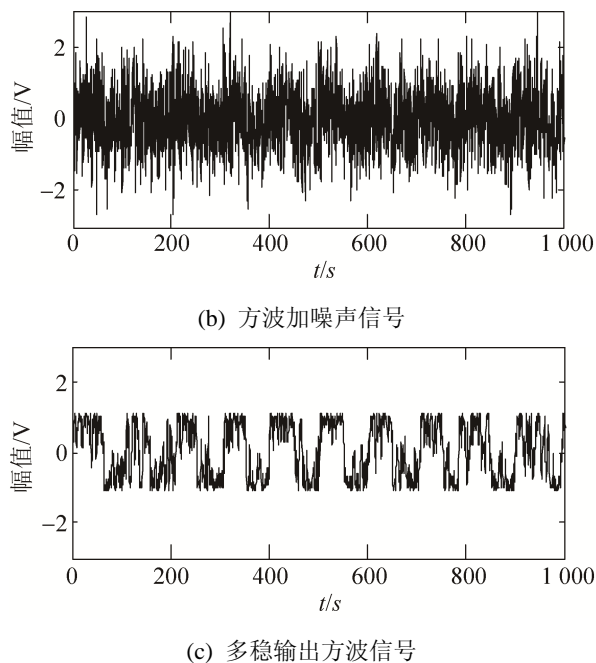


图8 方波信号的输入输出波形
Fig. 8 Input and output of square wave

实验表明多稳态系统很好的检测出方波, 预示着随机共振在通信中有着潜在的应用价值。

4 轴承故障应用

为了验证多稳态系统在轴承故障检测中的有效性, 论文分别对轴承的内圈和外圈数据进行诊断分析。轴承数据来自凯斯西储大学(Case Western Reserve University, CWRU)电气工程实验室, 深沟球轴承型号为 6205-2RS JEM SKF。轴承故障的数据以每秒 12 000 个点来采集, 转速为 $r = 1797 r / \text{min}$, 轴承的尺寸如表 1 所示。

表1 6205-2RS JEM SKF 轴承参数
Tab. 1 Bearing parameter of 6205-2RS JEM SKF

内圈直径 /mm	外圈直径 /mm	滚珠直径 /mm	节径 /mm	滚珠个数
25.00	52.00	7.94	39.04	9

根据表中的数据可以计算出轴承外圈故障频率为 $f_{\text{out}} = 107.3 \text{ Hz}$, 内圈故障频率为 $f_{\text{in}} = 162.2 \text{ Hz}$ 。图 9(a)为原始故障信号的时域图, 可以看到明显的周期冲击, 由于噪声强度太大导致故障信号的特征频率无法识别, 图 9(b)为故障信号的频谱, 从图中

可以看出此时故障频率在高频带中, 这是因为受到轴承转动频率调制的原因。

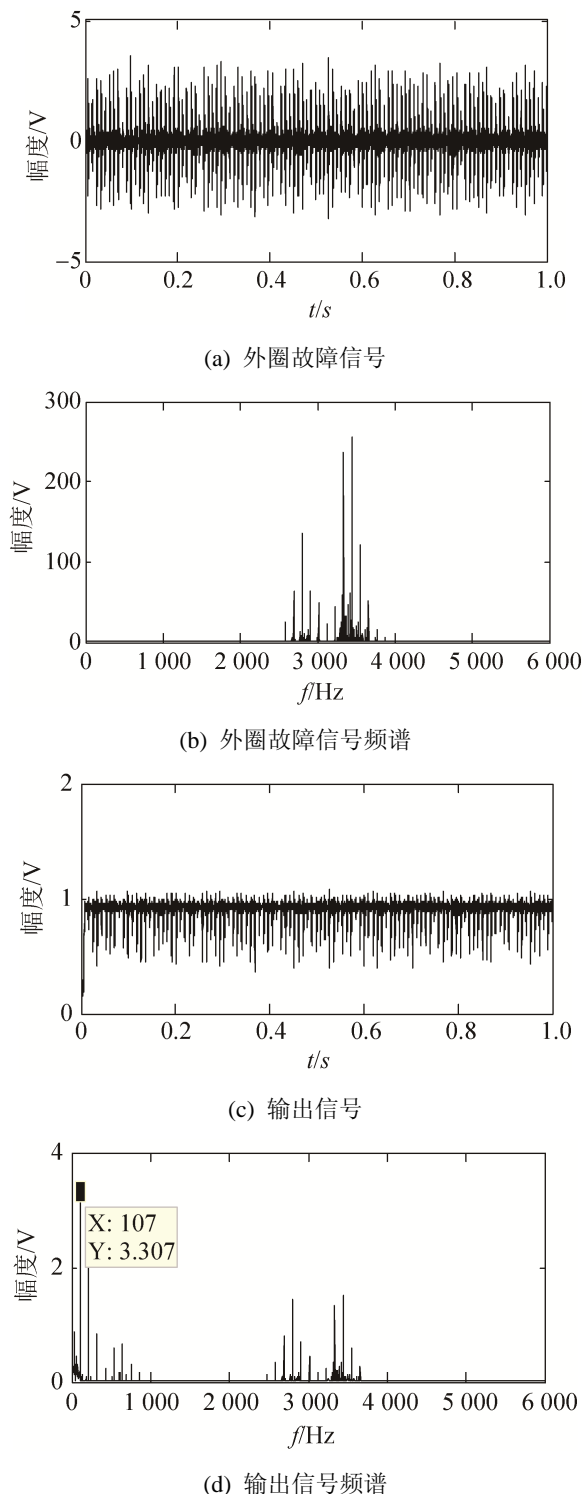
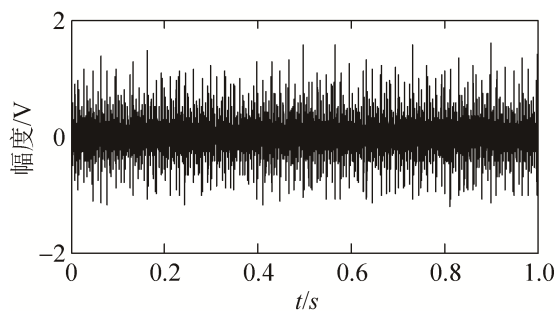


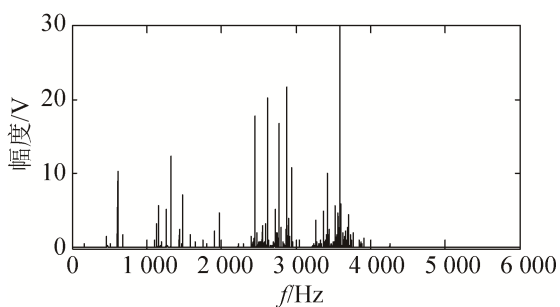
图9 多稳态系统输入、输出信号及频谱
Fig. 9 Input, output signal and frequency spectrum of multi-stable system

将外圈数据输入多稳态系统, 设置系统参数为 $a = 2.8$, $b = 2.6$, $c = 0.2$, 二次采样频率 $f_{sr} = 5$ Hz, 采样点数 12 000, 输出信号及频谱如图 9 所示。

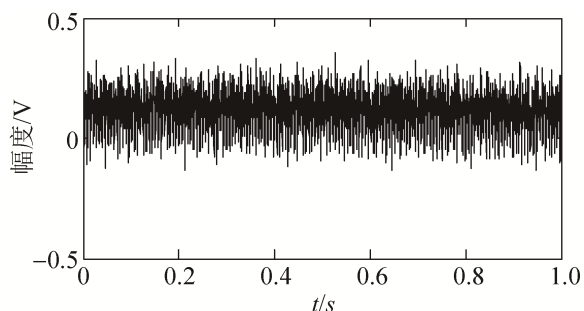
在图 9(c) 中信号的噪声大量减少, 并且很好的保留了故障信号的特征, 图 9(d) 中可见频谱在 $f = 107$ Hz 处出现了尖峰, 信号的高频成分被大大削减, 由前面所计算的外圈故障频率 $f_{out} = 107.3$ Hz 可以初步判定存在故障。同样将内圈数据输入多稳态系统, 得到如图 10 所示。从图 10(d) 中可见频谱在 $f = 161$ Hz 处出现了尖峰, 但是在 600 Hz 左右也出现了尖峰, 虽然这会对待检测的故障频率产生干扰, 但是依然可以判定存在故障。



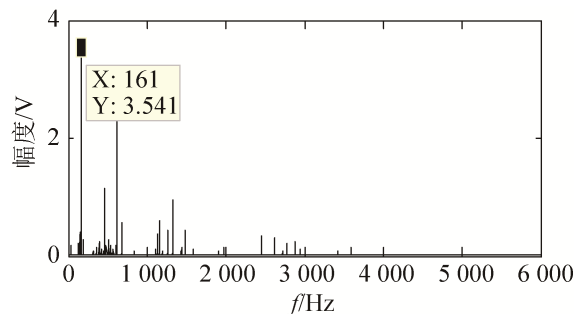
(a) 内圈故障信号



(b) 内圈故障信号频谱



(c) 输出信号



(d) 输出信号频谱

图 10 多稳态系统输入、输出信号及频谱

Fig. 10 Input, output signal and frequency spectrum of multi-stable system

5 结论

论文研究了色噪声背景下多稳态系统的随机共振现象。通过仿真分别分析了系统参数 a , b , c , 噪声放大系数 D 对信噪比增益的作用规律, 微弱信号的检测效果以及轴承故障的诊断。得到以下结论: 1) 在噪声放大系数 D 一定时, 信噪比增益随系统参数 a , b , c , 呈现出单调变化, 即先增大后减小, 最后趋于稳定; 2) 噪声放大系数 D 较小时信噪比增益出现峰值且随着 D 的增大信噪比增益逐渐减小并最终趋于稳定; 3) 在高, 低频(多频)微弱信号检测时, 单频信号信噪比有 12 dB 的提高, 多频信号 5 Hz 的幅度从 3.983 增加到 153.2, 15 Hz 的幅度从 3.334 增加到 53.68; 4) 在轴承故障诊断中, 多稳态系统准确的检测出轴承故障频率, 为设备安全可靠运行和预测性维修提供了技术保障。以上结论为更好地研究色噪声下多稳态随机共振系统在微弱信号检测, 数字通信等领域提供了有力保障, 为工程应用中故障诊断提供了新方法。

参考文献:

- [1] Beniz R, Sutura A, Vulpiani A. The Mechanism of Stochastic Resonance[J]. The Journal of Physical A (S1361-6447), 1981, 14(5): 453-457.
- [2] Chen Z S, Yang Y G. Stochastic Resonance Mechanism for Wideband and Low Frequency Vibration Energy Harvesting Based on Piezoelectric Cantilever Beams[J]. Acta Physica Sinica (S1000-3290), 2011, 7(7): 430-436.
- [3] 胡岗. 随机力与非线性系统[M]. 上海: 上海科技教育

- 出版社, 1994.
- Hu Gang. *Advanced Series in Nonlinear Science Stochastic Forces and Nonlinear Systems*[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1994.
- [4] 赖志慧, 冷永刚. 三稳系统的动态响应及随机共振[J]. 物理学报, 2015, 64(20): 77-88.
- Lai Zhihui, Leng Yonggang. *Dynamic Response and Stochastic Resonance of a Tri-stable System*[J]. *Acta Phys.*, 2015, 64(20) 77-88.
- [5] He L F, Cui Y Y, Zhang T Q, et al. Analysis of Weak Signal Detection Based on Tri-stable System Under Levy Noise[J]. *Chinese Physics B*, 2016, 25(6): 060501.
- [6] 李月, 杨宝俊, 石要武. 色噪声背景下微弱正弦信号的混沌检测[J]. 物理学报, 2003, 52(3): 526-530.
- Li Yue, Yang Baojun, Shi Yaowu. *Chaos-based Weak Sinusoidal Signal Detection Approach Under Colored Noise Background*[J]. *Acta Phys. Sin.*, 2003, 52(3): 526-530.
- [7] 周丙常, 徐伟. 关联噪声驱动的非对称双稳系统的随机共振[J]. 物理学报, 2008, 57(4): 2035-2040.
- Zhou Bingchang, Xu Wei. *Stochastic Resonance in an Asymmetric Bistable System Driven by Correlated Noise*[J]. *Acta Phys. Sin.*, 2008, 57(4): 2035-2040.
- [8] Qiao Z, Lei Y, Lin J, et al. Stochastic Resonance Subject to Multiplicative and Additive Noise: The Influence of Potential Asymmetries[J]. *Phys. Rev. E*, 2016, 94(5): 2214-2217.
- [9] 陆思良. 基于随机共振的微弱信号检测模型及应用研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2015: 27-56.
- Lu Siliang. *Models and Applications of Stochastic Resonance-based Weak Signal Detection*[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2015: 27-56.
- [10] 田艳, 何桂添, 罗懋康. 具有非线性阻尼涨落的线性谐振子的随机共振[J]. 物理学报, 2016, 65(6): 31-40.
- Tian Yan, He Guitian, Luo Maokang. *Stochastic Resonance of a Linear Harmonic Oscillator with Non-linear Damping Fluctuation*[J]. *Acta Phys.*, 2016, 65(6): 31-40.
- [11] 郑仕谱. 基于随机共振的弱信号提取方法研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2014: 36-48.
- Zheng Shipu. *Study on Weak Signal Extraction Technology Using Stochastic Resonance*[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2014: 36-48.
- [12] Yuan Q, SHEN Y, CHEN L. Virtual Instrument for Weak Signal Detecting on Monostable Stochastic Resonance[J]. *Advanced Materials Research (S1662-8985)*, 2011, 279: 361-366.
- [13] Zheng T, Li S P, Cheng S J, et al. The Research of Related Parameters in Twice Sampling Stochastic Resonance Used in Weak Signal Detection[J]. *Acta Metrologica Sinica (S1000-1158)*, 2015, 36(3): 313-317.
- [14] 冷永刚, 王太勇, 郭焱, 等. 二次采样随机共振的工程应用研究[J]. 中国机械工程, 2004, 15(20): 1847-1852.
- Leng Yonggang, Wang Taiyong, Guo Yan, et al. *Engineering Application Study of Twice Sampling Stochastic Resonance*[J]. *China Mechanical Engineering*, 2004, 15(20): 1847-1852.
- [15] 张晓燕, 徐伟, 周丙常. 周期矩形信号作用下时滞非对称单稳系统的随机共振[J]. 物理学报, 2012, 61(3): 47-51.
- Zhang Xiaoyan, Xu Wei, Zhou Bingchang. *Stochastic Resonance in a Time-delayed Asymmetric Mono-stable System Modulated by Periodic Rectangular Signal*[J]. *Acta Phys. Sin.*, 2012, 61(3): 47-51.