Journal of System Simulation

Volume 30 | Issue 9 Article 45

1-8-2019

Event-triggered Scheme and Co-design of H_{∞} Control in Networked Control System

Jingqi Fu
1.Shanghai University of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai 200072, China;

Wu Jie
1.Shanghai University of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai 200072, China;

Weili Shen
1.Shanghai University of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai 200072, China;

Abstract

Abstract: Since the wireless network time-varying delay and communication channel bandwidth have great effects on networked control systems(NCSs), this paper studies an event-triggered scheme and a H_{∞}control co-design method. Initially, a delay mathematic model of NCSs is constructed. *In consideration of wireless network time-varying delay between event generator and zero order holder*, *this paper designs an improved event-triggered communication scheme*. *Furthermore*, *by applying a new Lyapunov-Krasovskii functional and linear matrix inequality method*, *a criterion for the delay-independent H_{∞} stabilization is derived, and the co-design method for gaining the trigger parameters and state feedback H_{∞} control is proposed*. Finally, an inverted pendulum example is provided to illustrate the effectiveness of the proposed event-triggered scheme and the co-design method.

Keywords

event-triggered scheme, Lyapunov-Krasovskii function, H_{∞} stabilization, co-design

第 30 卷第 9 期
2018 年 9 月
系统仿真学报©
Journal of System Simulation
Vol. 30 No. 9
Sep., 2018

网络控制系统的事件触发与 H_∞ 控制协同设计

付敬奇，吴杰，沈卫利
(上海大学机电工程与自动化学院，上海 200072)

摘要：针对无线网络时变延时和通讯信道带宽对网络控制系统(NCSs)的影响，提出了一种事件触发控制机制，并设计了相应的 H_∞ 协同控制。构建了 NCSs 的时滞数学模型，*针对事件触发器与零阶保持器间的无线网络时变延时，设计了一种改进的事件触发机制。利用李亚普诺夫-克洛索夫斯基泛函分析和线性矩阵不等式方法，证明了时滞独立的 H_∞ 稳定性，并给出了求解事件触发机制参数和状态反馈 H_∞ 控制的协同设计方法。*采用倒立摆系统进行了仿真实验，验证了提出方法的有效性。

关键词：事件触发机制；李亚普诺夫-克洛索夫斯基泛函；H_∞稳定性；协同设计
中图分类号：TP391.9　　文献标识码：A　　文章编号：1004-731X (2018) 09-3578-08
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201809045

Event-triggered Scheme and Co-design of H_∞ Control in Networked Control System

Fu Jingqi, Wu Jie, Shen Weili
(1.Shanghai University of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai 200072, China)

Abstract: Since the wireless network time-varying delay and communication channel bandwidth have great effects on networked control systems(NCSs), this paper studies an event-triggered scheme and a H_∞ control co-design method. Initially, a delay mathematic model of NCSs is constructed. *In consideration of wireless network time-varying delay between event generator and zero order holder, this paper designs an improved event-triggered communication scheme. Furthermore, by applying a new Lyapunov-Krasovskii functional and linear matrix inequality method, a criterion for the delay-independent H_∞ stabilization is derived, and the co-design method for gaining the trigger parameters and state feedback H_∞ control is proposed.* Finally, an inverted pendulum example is provided to illustrate the effectiveness of the proposed event-triggered scheme and the co-design method.

Keywords: event-triggered scheme; Lyapunov-Krasovskii function; H_∞ stabilization; co-design

引言

随着信息和网络技术的快速发展，NCSs 已在控制领域中发挥着越来越重要的作用。NCSs 是空间的分布式系统，其传感器、执行器和控制器的各种信号通过网络进行传输和交换[1]，克服了一般传统的控制系统布线复杂、灵活性较差、费用较高的不足。但网络(尤其是无线网络)的介入同样会带来诸如网络诱导延时、数据丢包、乱序、数据量化、介质访问约束[2]和通讯信道带宽有限等问题，因此网络的引入也为控制系统带来了新的挑战，其中最突出的问题是网络延迟和通讯信道带宽有限。

网络延迟会降低无线网络性能，导致无线网络控制系统的不稳定。文献[3]提出了一类时变无线网络控制系统分析与仿真研究，设计了基于模型的

收稿日期：2016-11-03　　修回日期：2017-03-14;
基金项目：上海市科委支持项目(17511107002);
作者简介：付敬奇(1962-)，男，上海，博士，教授，研究方向为无线传感器网络；吴杰(1991-)，男，浙江衢州，硕士，研究方向为事件触发网络控制系统；沈卫利（1994-），女，浙江湖州，硕士生，研究方向为事件触发网络控制系统。

状态反馈控制器以补偿网络延时和时变性对系统的影响。针对离散随机时间系统的任意网络延时与信号量化问题，文献[4]提出了基于观测器的 H_∞ 控制，确保了闭环系统的渐近稳定。通讯信道带宽有限对控制的实时性要求构成了较大的挑战，有线 NCSs 中的信道带宽通常能够满足应用需求，但对于无线 NCSs 却难以满足，因此有必要设计有效的触发控制策略来满足无线NCSs的反馈控制实时性的要求。文献[5-8]提出一种事件触发控制策略，有效减少了控制任务执行次数，节约网络资源。文献[9]针对网络控制系统中状态不完全可测情况，研究了基于事件触发的输出反馈控制问题。文献[10]提出一种自触发机制来确保反馈控制系统的有限增益 L_2 稳定。文献[11]提出了一种分布式网络控制系统的事件触发控制，当子系统的状态误差超过了特定的阈值，子系统才传递状态信息到邻近的子系统。但文献[9-11]都未讨论无线网络诱发延时的情况，以及事件触发机制与控制器的协同设计问题。

本文针对存在无线网络时变延时的非理想网络环境，提出一种事件触发控制机制，研究了 NCSs 的 H_∞ 渐近稳定性及事件触发机制和状态反馈 H_∞ 控制的协同设计方法。首先，考虑事件触发器到零阶保持器间的无线网络时变延时，提出了一种改进的事件触发机制，以减少 NCSs 中传感采样信号的传输次数，构建了时变延时的线性系统数学模型。第 2 节采用 Lyapunov-Krasovskii 泛函分析和线性矩阵不等式(LMI)方法，针对事件触发机制，证明并获得了系统的 H_∞ 控制稳定性判据定理 1。第 3 节根据定理 1，证明并获得了求解 H_∞ 状态反馈控制器增益矩阵和事件触发机制参数的定理 2。第 4 节，采用倒立摆系统进行了仿真实验，验证了提出方法的有效性。

1 事件触发机制和 NCSs 建模

为降低无线网络中采样信号的传输次数，构建的带有信号传输延时和事件触发机制的NCSs的结构如图 1 所示。

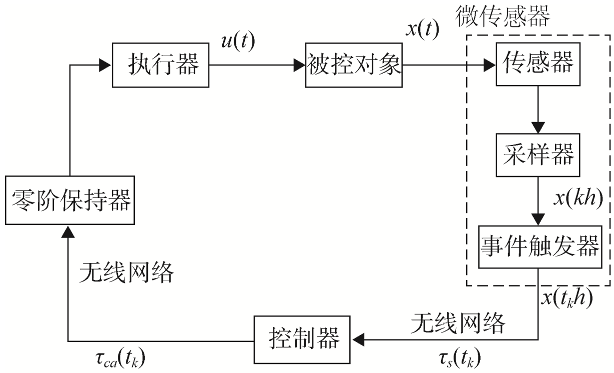

图 1 基于事件触发机制的时滞 NCSs 的结构框图
Fig.1 Framework of event-triggered delay NCSs

描述 1：传感器以固定采样周期 h 时间触发，采样序列可以描述成序列 $S_1=\{0, h, 2h, 3h, ..., kh\}$，其中 $k\in N$ 。

描述 2：数据是否被传送到控制器取决于事件触发器。假定在采样器和事件触发器之间不存在丢包现象，因此传感器端被成功传送到控制器的采样序列可以描述成序列 $S_2=\{0, t_1h, t_2h, t_3h, ..., t_kh\}$,其中 $t_k\in N$ 。显然有 $S_2\subseteq S_1$ 。

描述 3：控制器和执行器都采用事件触发方式。执行器的控制输入通过零阶保持器(ZOH)生成，保持时间 $t\in\Omega=[t_kh+\tau_{t_k}, t_{k+1}h+\tau_{t_{k+1}})$ ，$t_kh+\tau_{t_k}$ 是控制信号到达被控对象的时刻。其中 $t_kh+\tau_{t_k}$ ($k\in Z^+$)是事件触发器释放信号时刻 t_kh ，到执行器把信号传输到被控对象上的时刻的网络诱导延时。若只考虑无线网络延时，则有 $\tau_{t_k}=\tau_{sc}(t_k)+\tau_{ca}(t_k)$ 。其中 $\tau_{sc}(t_k)$ 是事件触发器-控制器延时， $\tau_{ca}(t_k)$ 是控制器-执行器延时，且有网络延时时 $\tau_{t_k}(k\in Z^+)$ 是有界的，$0<\tau_m<\tau_{t_k}<\tau_M$ ，其中 τ_m 和 τ_M 分别定义时滞的下界和上界。如果所有的采样信号都被传送，有 $S_2=S_1$，事件触发就变成时间触发。如果 $S_2\subset S_1$，有一些采样信号未被传送，则说明事件触发器产生了作用。

考虑图 1 线性系统模型如下：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+B_\omega\omega(t)\\ z(t)=Cx(t)+Du(t)\end{cases}\tag{1}$$

式中：$x(t)\in R^n$ 是状态向量；$u(t)\in R^m$ 是控制输入向量； $\omega(t)\in L_2[0,\infty)$ 是外部扰动输入向量；

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201809045

第 30 卷第 9 期 系统仿真学报 Vol. 30 No. 9
2018 年 9 月 Journal of System Simulation Sep., 2018

$z(t)\in R^p$ 是控制输出向量；A，B，C，D 和 B_ω 是恒定具有适当维数的矩阵；系统的初始条件是 $x(t_0)=x_0$。

为减少网络中的数据传输，文献[12]设计的事件触发条件右边二次项中没有考虑当前采样信号的影响，而文献[13]设计的事件触发条件右边二次项中没有考虑最新采样信号的影响，因此，为图 1NCSs 中设计改进的事件触发通信机制的触发条件如下：

$$\begin{aligned}&\partial^T(i_kh)W\partial(i_kh)\geqslant\\&\sigma_1[\delta x(t_kh)+(1-\delta)x(i_kh)]^TW[\delta x(t_kh)+\\&(1-\delta)x(i_kh)],\\&\delta=\max\{\delta\,|\,\bar{h},0\leqslant\delta\leqslant1\}\end{aligned}\tag{2}$$

该事件触发条件右边二次项中同时考虑了当前采样信号和最新采样信号的影响。其中 $x(i_kh)$ 表示当前采样信号，$x(t_kh)$ 表示最新成功传送的采样信号。$\partial(i_kh)$ 是当前采样信号 $x(i_kh)$ 和最新成功传送的采样信号 $x(t_kh)$ 之间的误差，$\partial(i_kh)=x(i_kh)-x(t_kh)$，$i_kh=t_kh+nh$，$n\in N$，$k\in N$。$W$ 是一个正定对称矩阵，σ_1 是一个有界正实数，$\sigma_1\in[0,1]$。δ 是代表权重系数，$\bar{h}$ 是事件触发机制的平均发送周期，$\max\{\delta\,|\,\bar{h},0\leqslant\delta\leqslant1\}$ 表示事件触发机制取得最大平均发送周期时所对应的 δ 值。

事件触发机制的本质是采样信号 $x(i_kh)$ 满足给定的事件触发条件，事件触发器将其释放，被传送到控制器。因此，该机制一定程度上能够改善无线网络带宽的利用率和减少数据的发送次数。如果式(2)中的 $\sigma_1=0$，事件触发机制将退化为时间触发机制。

假设系统的状态是可直接测量的，对 $t\in[t_kh+\tau_{t_k},t_{k+1}h+\tau_{t_{k+1}})$，在线性状态反馈控制器 $u(t)=Kx(t)$ 作用下，系统模型如下：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t_kh)+B_\omega\omega(t)\\z(t)=Cx(t)+Du(t_kh)\\u(t_kh)=Kx(t_kh),t\in[t_kh+\tau_{t_k},t_{k+1}h+\tau_{t_{k+1}})\end{cases}\tag{3}$$

文献[13]的时间分析方法，将零阶保持器的保持间隔 $t\in\Omega$ 分成间隔子集 $\Omega_n=[i_kh+\tau_{i_k},i_kh+h+\tau_{i_k+1})$，则有 $\Omega=\cup\Omega_n$，其中 $i_kh=t_kh+nh$，$n=0,...,t_{k+1}-t_k-1$ 表示当前已传送的采样时刻 t_kh 到未来要传送的采样时刻 $t_{k+1}h$ 之间的采样时刻点；如果 n 取值 $t_{k+1}-t_k-1$，则有 $\tau_{i_k+1}=\tau_{t_{k+1}}$，否则 $\tau_{i_k}=\tau_{t_k}$。定义 $\tau(t)=t-i_kh$，$t\in\Omega_n$。$\tau(t)$ 是一个分段函数，满足 $0<\tau_m\leqslant\tau(t)\leqslant h+\tau_M$，$t\in\Omega_n$，其中 $\tau_m=\inf_n\{\tau_{i_k}\}$，$\tau_M=\sup_n\{\tau_{i_{k+1}}\}$，$\tau_m$、$\tau_M$ 分别代表了最小允许通信延时、最大允许通信延时。则反馈控制器可描述成公式(4)。

$$u(t)=K(x(t-\tau(t))-\partial(i_kh)),t\in\Omega_n\tag{4}$$

结合式(3)和式(4)，定义 $h_1=\tau_m$，$h_2=h+\tau_m$，闭环系统模型如下：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+BKx(t-\tau(t))-\\BK\partial(i_kh)+B_\omega\omega(t)\\z(t)=Cx(t)+DKx(t-\tau(t))-DK\partial(i_kh),\\t\in\Omega_n\\x(t)=\varphi(t),t\in[t_0-h_2,t_0\text{-}h_1]\end{cases}\tag{5}$$

式中：$\varphi(t)$ 是 $x(t)$ 的初始函数。

为了便于分析，给出如下定义。

定义 1：若下面两个条件同时满足，则称闭环系统是渐近稳定的并且 H_∞ 扰动抑制水平为 γ[12]。

1) 系统在 $\omega(t)\equiv0$ 条件下是渐近稳定的。

2) 在零初始条件下，任何非零的 $\omega(t)\in L_2[0,\infty)$ 和给定的 $\gamma>0$，有 $\|z(t)\|_2\leqslant\gamma\|\omega(t)\|_2$。

2 H_∞稳定性分析

该节假定矩 A，B，C，D，B_ω 和状态反馈控制器增益 K 已知，基于 Lyapunov-Krasovskii 泛函分析和 LMI 方法，结合式(2)，提出了闭环系统渐近稳定并 H_∞ 扰动抑制水平为 γ 的充分条件定理 1。

定理 1.对于给定的参数 h_1，h_2，γ，σ_1 和反馈增益 K，在事件触发条件下，如果存在合适维数的矩阵 $P=P^T>0$，$W>0$，$Q_i=Q_i^T>0$，$Z_i=Z_i^T>0(i=1,2)$，$S=S^T>0$ 满足矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix}\Phi_{11}&*\\\Phi_{12}^T&\Phi_{22}\end{bmatrix}<0\tag{6}$$

则称闭环系统是渐近稳定并且 H_∞ 扰动抑制水平为 γ。其中

$$\Phi_{11}=$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_1 & * & * & * & * & * \\ R_1^T & \Upsilon_2 & * & * & * & * \\ R_2^T & 0 & \Upsilon_3 & * & * & * \\ (BK)^T P & S^T & S^T & \sigma_1 W-2S & * & * \\ -(BK)^T P & 0 & 0 & -\sigma_1\delta W & (\sigma_1\delta^2-1)W & * \\ B_\omega^T P & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T{}_{12}=\begin{bmatrix} h_1A & 0 & 0 & h_1BK & -h_1BK & h_1B_\omega \\ h_2A & 0 & 0 & h_2BK & -h_2BK & h_2B_\omega \\ \alpha A & 0 & 0 & \alpha BK & -\alpha BK & \alpha B_\omega \\ C & 0 & 0 & DK & -DK & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{22}=diag\{-Z_1^{-1},-Z_2^{-1},-S^{-1},-I\}$$

$$\Upsilon_1=PA+A^TP+Q_1+Q_2-Z_1-Z_2$$

$$\Upsilon_2=-Q_1-Z_1-S$$

$$\Upsilon_3=-Q_2-Z_2-S$$

证明： 文献[14]中的构造方法，构建 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(t)=x^T(t)Px(t)+\int_{t-h_1}^{t}x^T(s)Q_1x(s)ds+\int_{t-h_2}^{t}x^T(s)Q_2x(s)ds+h_1\int_{-h_1}^{0}ds\int_{t+s}^{t}\dot{x}^T(v)Z_1\dot{x}(v)dv+h_2\int_{-h_2}^{0}ds\int_{t+s}^{t}\dot{x}^T(v)Z_2\dot{x}(v)dv+\alpha\int_{-h_2}^{-h_1}ds\int_{t+s}^{t}\dot{x}^T(v)S\dot{x}(v)dv,t\in\Omega_n \tag{7}$$

式中：$P>0$；$Q_i>0$；$Z_i>0(i=1,2)$；$S>0$；$\alpha=h_2-h_1$。对 $V(t)$ 进行求导，同时加上和减去 $\partial^T(i_kh)W\partial(i_kh)$ 这一项，得

$$\dot{V}(t)=2x^T(t)P\dot{x}(t)+x^T(t)(Q_1+Q_2)x(t)-x^T(t-h_1)Q_1x(t-h_1)-x^T(t-h_2)Q_2x(t-h_2)+\dot{x}^T(t)[h_1^2Z_1+h_2^2Z_2+\alpha^2S]\dot{x}(t)-h_1\int_{t-h_1}^{t}\dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds-h_2\int_{t-h_2}^{t}\dot{x}^T(s)Z_2\dot{x}(s)ds-\alpha\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)ds+\partial^T(i_kh)W\partial(i_kh)-\partial^T(i_kh)W\partial(i_kh),t\in\Omega_n \tag{8}$$

事件触发条件中，对于 $i_kh\in[t_kh,t_{k+1}h)$，则有

$$\partial^T(i_kh)W\partial(i_kh)\leqslant\sigma_1[\delta x(t_kh)+(1-\delta)x(i_kh)]^TW[\delta x(t_kh)+(1-\delta)x(i_kh)] \tag{9}$$

应用詹森不等式[15]和文献[16]中的方法来处理式(8)中的积分项，可得到

$$-h_1\int_{t-h_1}^{t}\dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds\leqslant(x^T(t)\ x^T(t-h_1))\begin{pmatrix}-Z_1 & Z_1\\ Z_1 & -Z_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ x(t-h_1)\end{pmatrix} \tag{10}$$

$$-h_2\int_{t-h_2}^{t}\dot{x}^T(s)Z_2\dot{x}(s)ds\leqslant(x^T(t)\ x^T(t-h_2))\begin{pmatrix}-Z_2 & Z_2\\ Z_2 & -Z_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ x(t-h_2)\end{pmatrix} \tag{11}$$

$$-\alpha\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)ds\leqslant-[(t-h_1)-i_kh]\int_{i_kh}^{t-h_1}\dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)ds-[i_kh-(t-h_2)]\int_{t-h_2}^{i_kh}\dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)ds\leqslant\left(x^T(t-h_1)\quad x^T(i_kh)\right)\begin{pmatrix}-S & S\\ S & -S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t-h_1)\\ x(i_kh)\end{pmatrix}+\left(x^T(i_kh)\quad x^T(t-h_2)\right)\begin{pmatrix}-S & S\\ S & -S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(i_kh)\\ x(t-h_2)\end{pmatrix} \tag{12}$$

定义

$$\eta^T(t)=[\,x^T(t)\ x^T(t-h_1)\ x^T(t-h_2)\ x^T(t-\tau(t))\ \partial^T(i_kh)\ \omega^T(t)\,] \tag{13}$$

结合式(8)~(13)，由 Schur 补性质，可得

$$\dot{V}(t)\leqslant\eta^T(t)\Phi\eta(t)-z^T(t)z(t)+\gamma^2\omega(t)\omega(t),t\in\Omega_n \tag{14}$$

式中：$\Phi=\Phi_{11}-\Phi_{12}\Phi_{22}^{-1}\Phi_{12}^T$；$\Phi_{11}$，$\Phi_{12}^T$ 和 Φ_{22} 都在定理 1 中被定义。

由 Schur 补引理知，式(7)中的 Lyapunov-Krasovskii 泛函保证了式(8)中的 $\dot{V}(t)<0$；同时易证明在 $\omega(t)\equiv0$ 时闭环系统是渐近稳定的，且在零初始条件下 $\|z(t)\|_2\leqslant\gamma\|\omega(t)\|_2$。证毕。

针对闭环系统，结合事件触发机制，采用不同于文献[12-13]的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，定理 1 给出了一个新的 H_∞稳定性判据。

https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal/vol30/iss9/45
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201809045

3 事件触发与 H_∞控制协同设计

该节基于稳定性判据定理 1，进一步证明并获得了事件触发机制参数与状态反馈 H_∞ 控制的协同设计方法定理 2。

定理 2：对于给定的参数 h_1，h_2，γ，σ_1，在事件触发条件下，如果存在合适维数的矩阵 $X = X^T > 0$，$\tilde{W} > 0$，$\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i^T > 0$，$\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_i^T > 0$ $(i = 1, 2)$，$\tilde{S} = \tilde{S}^T > 0$，满足下列的矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix} \Phi'_{11} & * \\ \Phi'^T_{12} & \Phi'_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{15}$$

则称闭环系统是渐近稳定并且 H_∞扰动抑制水平为 γ，且控制器 $u(t) = Kx(t)$ 的反馈增益为 $K = YX^{-1}$。其中

$$\Phi'_{11} =$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Upsilon}_1 & * & * & * & * & * \\ \tilde{R}_1^T & \tilde{\Upsilon}_2 & * & * & * & * \\ \tilde{R}_2^T & 0 & \tilde{\Upsilon}_3 & * & * & * \\ Y^T B^T & \tilde{S}^T & \tilde{S}^T & \sigma_1 \tilde{W} - 2\tilde{S} & * & * \\ -Y^T B^T & 0 & 0 & -\sigma_1 \delta \tilde{W} & (\sigma_1 \delta^2 - 1)\tilde{W} & * \\ B_\omega^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$\Phi'^T_{12} = \begin{bmatrix} h_1 AX & 0 & 0 & h_1 BY & -h_1 BY & h_1 B_\omega \\ h_2 AX & 0 & 0 & h_2 BY & -h_2 BY & h_2 B_\omega \\ \alpha AX & 0 & 0 & \alpha BY & -\alpha BY & \alpha B_\omega \\ CX & 0 & 0 & DY & -DY & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi'_{22} = -diag\{X\tilde{Z}_1^{-1}X, X\tilde{Z}_2^{-1}X, X\tilde{S}^{-1}X, I\}$$

$$\tilde{\Upsilon}_1 = XA + A^T X + \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 - \tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2$$

$$\tilde{\Upsilon}_2 = -\tilde{Q}_1 - \tilde{Z}_1 - \tilde{S}$$

$$\tilde{\Upsilon}_3 = -\tilde{Q}_2 - \tilde{Z}_2 - \tilde{S}$$

证明：定义 $X = P^{-1}$，$\tilde{Q}_i = XQ_iX$，$\tilde{Z}_i = XZ_iX$ $(i = 1, 2)$，$\tilde{S} = XSX$，$\tilde{W} = XWX$ 和 $Y = KX$，同时在式(6)左右两边分别相应地左乘、右乘 $diag\{X, X, X, X, X, I, I, I, I, I\}$ 和它们的转置，根据 Schur 补引理，从而得到式(15)。证毕。

通过求解式(15)矩阵不等式，定理 2 提供了一个获得事件触发机制参数矩阵 W 与状态反馈 H_∞控制增益矩阵 K 的协同设计有效方法。由于在式(15)矩阵不等式中存在诸如 $X\tilde{Z}_i^{-1}X (i = 1, 2)$ 等非线性项，因此，式(15)是一个非线性矩阵不等式，不能直接用 Matlab LMI 工具箱求解，需要对矩阵不等式进行线性化处理。目前，线性化处理较为常见的方法大致有三种：一种是锥形线性化算法(CCLA)。另一种是简化线性化算法，利用不等式变换法 $2\varepsilon X - \varepsilon^2 \tilde{Z}_i \leqslant X\tilde{Z}_i^{-1}X (i = 1, 2)$，$\varepsilon$ 为常量。第三种是参数调整法，根据人为经验调整参数，令 $\tilde{Z}_i = \varepsilon_i X (i = 1, 2)$。为了减小基于式(15)推导出来的 LMI 可能导致的保守性，本文采用 CCLA 进行求解式(15)中的不等式，求解过程类似于文献[14]，但是计算的复杂性要大于不等式变换法和参数调整法。

4 仿真与结果分析

仿真实验采用文献[10]中的倒立摆系统，其数学模型如下：

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u(t) \tag{16}$$

参数矩阵为：

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D = 0.1 \quad B_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sin t), t \in [0, 10] \\ 0, \text{otherwise} \end{cases} \tag{17}$$

式中：小车的质量 $M = 10$；摆锤的质量 $m = l$；摆臂长度 $l = 3$；重力加速度 $g = 10$，通过计算发现系统矩阵 A 的特征值是{0 0 1.8257 −1.8257}，因此在没有控制器的作用下，系统是不稳定的。系统的状态 $x(t) = [x_1^T(t)\ x_2^T(t)\ x_3^T(t)\ x_4^T(t)]^T$，这里 x_1、x_2、x_3、x_4 分别表示小车的位置，小车的速度，摆锤的摆角和摆锤的角速度。取初始状态值为 $x_0 = [0.98\ \ 0\ \ 0.2\ \ 0]^T$。

1)为确定倒立摆系统的事件触发机制，分别取 $\delta = 0$，0.25，0.5，0.75，1，并参照文献[12]，选

取 $\sigma_1=0.1$，$h=0.1$，$h_1=0.01$，$h_2=0.11$ 和 $\gamma=200$，应用定理 2 和 CCLA 进行 Matlab 仿真，计算平均发送周期 $\bar{h}$，结果如表 1 所示。

表 1　不同 δ 的平均发送周期 $\bar{h}$
Tab. 1　Average transmission period $\bar{h}$ of different δ

δ	平均发送周期 $\bar{h}$
0	0.311 3
0.25	0.291 9
0.5	0.306 3
0.75	0.324 6
1	0.388 2

从平均发送周期 $\bar{h}$ 看，在 $\delta=1$ 时，事件触发机制的平均发送周期最大。因此，式(2)可化为

$$\partial^T(i_kh)W\partial(i_kh)\geqslant\sigma_1x^T(t_kh)Wx(t_kh) \tag{18}$$

并得到相应的状态反馈控制增益和事件触发矩阵为：

$$K=10^3\begin{bmatrix}0.1330 & 0.2388 & 3.7486 & 2.1207\end{bmatrix} \tag{19}$$

$$W=10^3\begin{bmatrix}0.0134 & -0.0246 & -0.0626 & 0.1119\\ -0.0246 & 0.0674 & 0.1675 & -0.3007\\ -0.0626 & 0.1675 & 0.4251 & -0.7626\\ 0.1119 & -0.3007 & -0.7626 & 1.3680\end{bmatrix} \tag{20}$$

在式(19)和式(20)的作用下，设定仿真时间 $t\in[0,20]$，则只有 51 次采样信息被发送给控制端，仅占所有采样点的 25.5%，系统的采样信号释放时刻和释放间隔如图 2 所示。

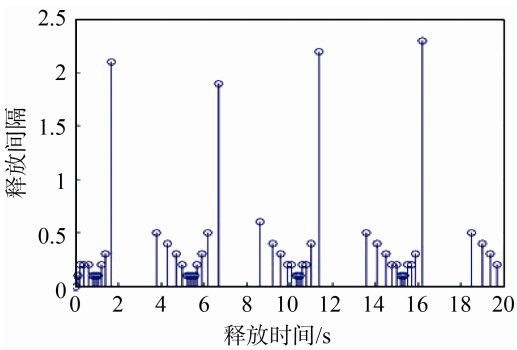

图 2　采样信号释放时刻与释放间隔图
Fig. 2　Release instant and release interval of sampled signal

2) 在保证系统稳定前提下，通过数值计算来说明本文事件触发机制的优越性，将提出的事件触发机制的平均发送周期 $\bar{h}$ 与文献[10,17-18]的触发机制的平均发送周期 $\bar{h}$ 进行比较，结果见表 2 所示。

表 2　不同触发机制下的平均发送周期 $\bar{h}$
Tab. 2　Average transmission period $\bar{h}$ under different triggering scheme

触发机制	平均发送周期 $\bar{h}$
事件触发(2)	0.388 2
事件触发[10]	0.337 5
自触发[10]	0.178 2
最大传输间隔[17]	0.016 9
事件触发[18]	$<10^{-5}$

从表 2 中可知，本文事件触发机制的平均发送周期大于其他触发机制，则状态采样信号传输的次数较少。

3) 为验证本文的事件触发机制和协同设计方法的鲁棒性，与文献[10]进行比较，取 $\gamma=200$，令 $\sigma_1=0.15$，$\delta=1$，$h=0.1$，$h_1=0$，$h_2=0.13$，应用定理 2 和 CCLA，得出相应的状态反馈控制增益和事件触发矩阵为：

$$K=10^3\begin{bmatrix}0.0859 & 0.1807 & 3.4339 & 1.9314\end{bmatrix} \tag{21}$$

$$W=\begin{bmatrix}5.2981 & -10.2969 & -24.1912 & 43.4288\\ -10.2969 & 24.8565 & 56.8231 & -102.3911\\ -24.1912 & 56.8231 & 132.1775 & -237.8998\\ 43.4288 & -102.3911 & -237.8998 & 428.2326\end{bmatrix} \tag{22}$$

在式(21)和式(22)的作用下，设定仿真时间 $t\in[0,20]$，得到系统的采样信号释放时刻和释放间隔如图 3 所示。通过计算得到平均发送周期为 0.412 5。与文献[10]相比，本文提出的事件触发机制优于文献[10]的结果 0.283 0。

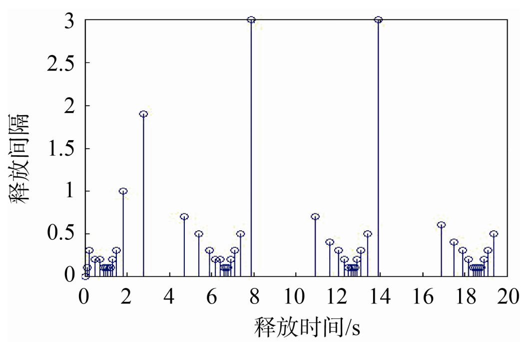

图 3　采样信号释放时刻与释放间隔图
Fig. 3　Release instant and release interval of sampled signals

https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal/vol30/iss9/45
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201809045

第 30 卷第 9 期 系统仿真学报 Vol. 30 No. 9
2018 年 9 月 Journal of System Simulation Sep., 2018

相应的系统状态响应如图 4 所示。通过定理 2 所得到的状态反馈控制增益矩阵使系统到达稳定的时间小于文献[10]。

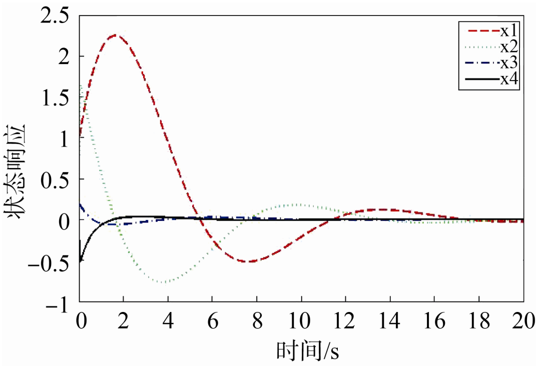

图 4 闭环系统状态响应图
Fig. 4 State response of closed loop system

4) 为验证本文的线性化方法与传统的方法相比具有更低的保守性，选取参数 $\sigma_1=0.1$，$h=0.1$，$h_1=0.01$，$h_2=0.11$ 和 $\gamma=200$，应用定理 2，分别用 CCLA、不等式变换法和参数调整法进行了仿真，得出相应的系统状态响应分别为图 5、图 6 和图 7 所示。图 5 闭环系统状态收敛，图 6 和图 7 的系统状态发散，表明了本文的 CCLA 方法具有更低的保守性和有效性。

5) 考虑系统干扰为输出干扰，验证本文的事件触发机制和协同设计方法的鲁棒性，取 $\gamma=200$，令 $\sigma_1=0.15$，$\delta=1$，$h=0.1$，$h_1=0$，$h_2=0.13$，应用定理 2 和 CCLA，相应的系统状态响应见图 8。

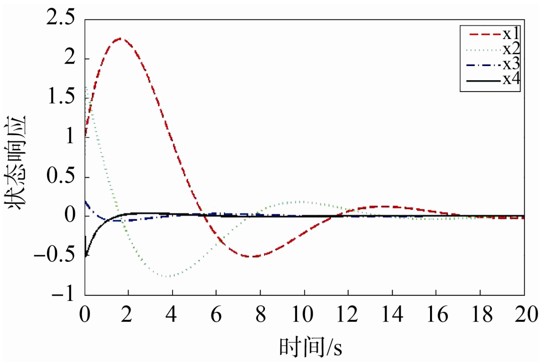

图 5 闭环系统状态响应图
Fig. 5 State response of closed loop system

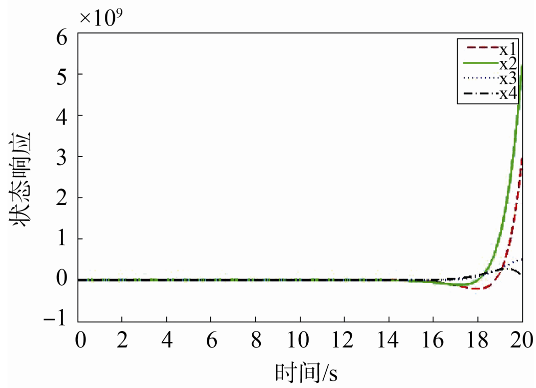

图 6 闭环系统状态响应图
Fig. 6 State response of closed loop system

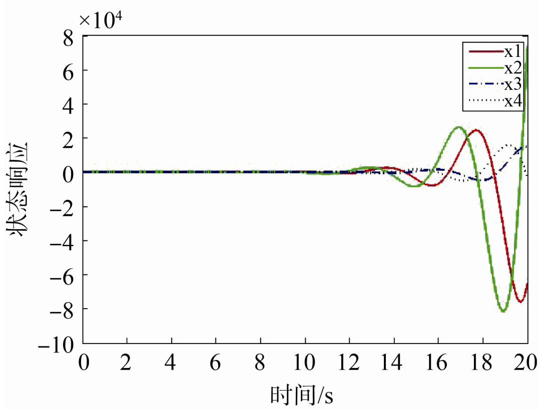

图 7 闭环系统状态响应图
Fig 7 State response of closed loop system

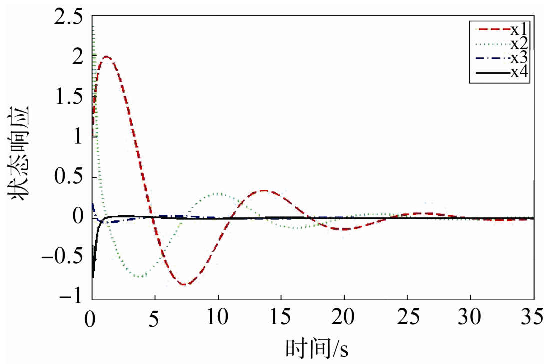

图 8 闭环系统状态响应图
Fig 8 State response of closed loop system

从图 8 中可看出，存在输出干扰的情形下，系统状态收敛，同样也说明了本文的事件触发和设计方法具有较好的鲁棒性。

5 结论

为降低网络时变延时和通信信道带宽对 NCSs

的影响，本文提出了一种事件触发机制来决定采样信号是否被传送到控制器，以降低网络负载，构建了 NCSs 的时滞数学模型。运用 Lyapunov-Krasovskii 泛函分析和 LMI 方法，提出了 H_∞ 稳定性判据。基于该判据，提出了事件触发机制与 H_∞ 控制的协同设计方法。运用该方法，可以通过调整一个或多个参数进行网络资源调度，仿真结果表明了该方法不但实现了网络资源的充分利用，而且获得了良好的控制性能。本文提出的设计方法没有考虑采样器和事件触发器之间的丢包问题，以及事件触发器和控制器之间加量化等问题，这些都是以后的工作中需要去进一步深入研究的。

参考文献:

[1] Yan H C, SYan, Zhang H, et al. L_2 Control Design of Event-triggered Networked Control Systems with Quantizations[J]. Journal of the Franklin Institute (S0016-0032), 2015, 352(1): 332-345.

[2] Yan H C, S Yan, Zhang H, et al. An Overview of Networked Control of Complex Dynamic Systems[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014(2): 1-10.

[3] 邓玮璋，费敏锐. 一类时变无线网络控制系统分析与仿真研究[J]. 系统仿真学报，2016, 28(8): 1878-1883.
Deng Weihua, Fei Minrui. Analysis and Simulation of a Class of Time-varying Wireless Networked Control Systems[J]. Jounrnal of System Simulation, 2016, 28(8): 1878-1883.

[4] Yan H C, Su Z Z, Zhang H, et al. Observerbased H_∞ Control for Discrete-time Stochastic Systems with Quantisation and Random Communication Delays[J]. IET Control Theory& Applications (S1751-8644), 2013, 7(3): 372-379.

[5] Yin X X, Yue D, S L Hu. Distributed Event-triggered Control of Discrete-time Heterogeneous Multi-agent Systems[J]. Journal of the Franklin Institute (S0016-0032), 2013, 350(3): 651-669.

[6] Li H P, Shi Y. Event-triggered Robust Model Predictive Control of Continuous-timeNonlinear Systems[J]. Automatica (S0005-1098), 2014, 50(5): 1507-1513.

[7] 马巧利，周川，陈兰浪. 网络控制系统的事件触发与量化控制协同设计[J]. 系统工程与电子技术，2016, 38(3): 652-657.
Ma Qiao-li, Zhou Chuan, Chen Lan-lang. Co-design of event-trigger and quantized control for networked control systems[J]. Systems Engineering and Electronics, 2016, 38(3): 652-657.

[8] 张进，彭晨. 基于事件触发的网络化 T-S 模糊系统容错控制[J]. 信息与控制, 2016, 45(1): 73-78.
ZHANG Jin, PENG Chen. Event-triggered Fault-tolerant Control for Networked T-S Fuzzy Systems[J]. Information and Control | Inf Contrl, 2016, 45(1): 73-78.

[9] Zhang X M, Han Q L. Event-triggered Dynamic Output Feedback Control for Networked Control Systems[J]. IET Control Theory and Application (S1751-8644), 2014, 8(4): 226-234.

[10] Wang X F, Lemmon M D. Self-triggered Feedback Control Systems with Finite-gain L_2 Stability[J]. IEEE Transactions on Automatic Control (S0018-9286), 2009, 54(3): 452-467.

[11] Wang X F, Lemmon M D. Event-triggering in DistributedNetworked Control Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control (S0018-9286), 2011, 56(3): 586-601.

[12] Yan H C, S Yan, Zhang H, et al. Event-triggered H_∞ Control For Networked Control Systems with Time-varying Delay[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014(1): 1-7.

[13] Peng C, Yang T C. Event-triggered Communication and H_∞ Control Co-design for Networked Control Systems[J]. Automatica (S0005-1098), 2013, 49(5): 1326-1332.

[14] Jiang X F, Han Q L, Liu S R, et al. A New H_∞ Stabilization Criterion for Networked Control Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control (S0018-9286), 2008, 53(4): 1025-1032.

[15] Gu K, Chen J, Kharitonov V L. Stability of Time Delay Systems[M]. Springer, 2003: 233-271.

[16] P G Park, J W Ko, C Jeong. Reciprocally Convex Approach to Stability of Systems with Time-varying Delays[J]. Automatica (S0005-1098), 2011, 47(1): 235-238.

[17] CarnevaleD, Teel A, Nesic D. A Lyapunov Proof of an Improved Maximum Allowable Transfer Interval for Networked Control Systems[J]. IEEE Transactions on Automatical Control (S0018-9286), 2007, 52(5): 892-897.

[18] Tabuada P, WangX. Preliminary Results on State-trigered Scheduling of Stabilizing Control Tasks[C]. Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (S0191-2216), 2006: 282-287.