

1-8-2019

## Fractional-order Memristor Model with Nonlinear Drift Function

Zhaohui Gan

*School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China;*

Shiyong Zhang

*School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China;*

Yuxin Wu

*School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

## Fractional-order Memristor Model with Nonlinear Drift Function

### Abstract

**Abstract:** A memristor is a nonlinear resistor with memory. It is regarded as the fourth basic circuit elements. The fractional order model of memristor is an extension of integer order model for memristor. Some researchers have confirmed the existence of fractional order model for memristor, and the response characteristic of the fractional order model excited by different types of signals is analyzed. Based on the analysis of some existing integer order and fractional order models for memristor, *a novel fractional order memristor model with nonlinear drift function is proposed, and the response characteristics of fractional order model for memristor with nonlinear drift function excited by step signal, sine and non-sinusoidal periodic signals are analyzed. The experiment results show that the proposed model can simulate fractional order memristor characteristic well. The influence of fractional order and control parameters on the characteristic of memristor is also analyzed and summarized. These results have a certain reference value for some memristor applications in electrical field.*

### Keywords

memristor, fractional-order, model, characteristic

### Recommended Citation

Gan Zhaohui, Zhang Shiyong, Wu Yuxin. Fractional-order Memristor Model with Nonlinear Drift Function[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(8): 2884-2891.

## 一种带有非线性漂移函数的分数阶忆阻器模型

甘朝晖, 张士英, 吴宇鑫

(武汉科技大学信息科学与工程学院, 湖北 武汉 430081)

**摘要:** 忆阻器是具有记忆功能的非线性电阻, 被公认为第四种基本的电路元件。分数阶忆阻器模型是整数阶忆阻器模型的推广, 科研人员已经证实了分数阶忆阻器模型的存在, 并分析了分数阶忆阻器模型的响应特性。在分析了现有整数阶和分数阶忆阻器模型的基础上提出了一种带有非线性漂移函数的分数阶忆阻器模型, 并对忆阻器在阶跃信号、正弦和非正弦周期信号激励下的响应特性进行了实验分析, 结果表明该模型能够较好地模拟分数阶忆阻器的特性, 同时分数阶阶次和控制参数对忆阻器特性的影响规律也得到了分析和总结, 对忆阻器在电学领域的应用具有一定的参考价值。

**关键词:** 忆阻器; 分数阶; 模型; 特性

中图分类号: TN710

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2018) 08-2884-09

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201808009

## Fractional-order Memristor Model with Nonlinear Drift Function

Gan Zhaohui, Zhang Shiyong, Wu Yuxin

(School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

**Abstract:** A memristor is a nonlinear resistor with memory. It is regarded as the fourth basic circuit elements. The fractional order model of memristor is an extension of integer order model for memristor. Some researchers have confirmed the existence of fractional order model for memristor, and the response characteristic of the fractional order model excited by different types of signals is analyzed. Based on the analysis of some existing integer order and fractional order models for memristor, a novel fractional order memristor model with nonlinear drift function is proposed, and the response characteristics of fractional order model for memristor with nonlinear drift function excited by step signal, sine and non-sinusoidal periodic signals are analyzed. The experiment results show that the proposed model can simulate fractional order memristor characteristic well. The influence of fractional order and control parameters on the characteristic of memristor is also analyzed and summarized. These results have a certain reference value for some memristor applications in electrical field.

**Keywords:** memristor; fractional-order; model; characteristic

## 引言

忆阻器是4个基本电路元件之一, 在电路理论

分析与设计、新型存储元件的开发与应用、人工智能等领域都具有广阔的应用前景。忆阻器的概念是1971年提出的<sup>[1]</sup>, 但其物理实物直到2008年才由HP实验室的研究人员发现, 到目前为止仍然没有商品化的产品诞生。因此, 大部分忆阻器的研究都集中在忆阻器模型的建立、分析及应用上。

忆阻器模型有整数阶和分数阶忆阻器模型两



收稿日期: 2016-11-18 修回日期: 2017-05-03;  
基金项目: 国家自然科学基金(41571396);  
作者简介: 甘朝晖(1969-), 男, 湖北武汉, 博士, 教授, 研究方向为忆阻器及忆阻系统, 人工智能及机器人; 张士英(1991-), 男, 河北石家庄, 硕士, 研究方向为嵌入式及其应用, 忆阻器及忆阻系统。

<http://www.china-simulation.com>

• 2884 •

大类。在整数阶忆阻器模型研究方面, 2008年HP实验室的研究人员首先建立了一种基于一阶线性常微分方程的忆阻器模型<sup>[2]</sup>, 此模型中带电杂质的漂移运动为最简单的线性漂移, 没有考虑带电杂质在边界的非线性漂移特性。Joglekar Y N等提出了一种带有非线性漂移函数的忆阻器模型<sup>[3]</sup>, 可以模拟忆阻器中带电杂质的漂移运动为非线性漂移时忆阻器的特性, Biolek Z等又根据该模型推导出了相应的忆阻器 SPICE 模型<sup>[4]</sup>。Prodromakis T等提出了一种忆阻器模型<sup>[5]</sup>, 其非线性漂移函数带有两个可调参数, 也能够模拟忆阻器中带电杂质的漂移运动为非线性漂移时忆阻器的特性, 但是, 它的非线性漂移函数的取值范围是不受限制的。Yu J T等提出了一种具有分段非线性漂移函数的忆阻器模型<sup>[6]</sup>, 通过改变非线性漂移函数的两个参数可以模拟具有不同记忆效应的忆阻器。但是上述模型均存在边界锁的问题, 即当忆阻器两金属电极之间的区域全部为掺杂区或者非掺杂区时, 忆阻器的状态将不会再次发生变化。Zha J X等提出了一种全新的带有非线性漂移函数的忆阻器模型<sup>[7]</sup>, 成功地解决了边界锁的问题。

近年来, 研究人员又提出了分数阶的忆阻器模型, 并对模型的特性进行了分析<sup>[8-14]</sup>。忆阻器是一个非线性的元件, 而分数阶微积分比较适合描述非线性特性, 因此, 用分数阶微积分给忆阻器建模就更加合适, 所得到模型的自由度更高<sup>[12]</sup>, 而且可以使忆阻器方便地应用于分数阶电路领域中, 例如, 分数阶电抗电路模型的建立, 各种基本分数阶电路元件模型的建立与分析, 各种复杂分数阶电路的分析、设计与综合等<sup>[15]</sup>。

在分数阶忆阻器模型研究方面, Petras I等提出了一种用分数阶微积分来描述忆阻器件的方法<sup>[8]</sup>, 该方法揭示了建立分数阶忆阻器模型的可能性。Tenreiro M J介绍了忆阻系统和高阶忆阻元件的实现方法<sup>[9]</sup>, 扩展了分数阶忆阻器模型的概念, 把分数阶的阶次扩展到了任意的实数和复数, 并研

究了分数阶的阶次为任意的实数或者复数时忆阻器分数阶模型的不同特性。Abdelouhab M S等从数学的角度给出记忆分抗元件的定义<sup>[10]</sup>, 并指出记忆分抗元件是记忆元件的推广。Fouda M E 和 Radwan A G通过分析分数阶忆阻器的状态方程, 推导分数阶忆阻器模型的数学表达式<sup>[11]</sup>, 在此基础上分析分数阶忆阻器模型的响应特性<sup>[12]</sup>。余亚娟和王在华提出一个分数阶忆阻器模型<sup>[13]</sup>, 指出分数阶的阶次对模型相关特性会产生一些影响, 并研究分数阶忆阻器与电容或电感串联组成的单口网络的伏安特性。Pu Y F 和 Yuan X把分数阶电路元件和忆阻器的概念融合在一起, 提出了分数阶忆阻器(fracmemristor)的概念。在此基础上应用分数阶微积分来分析分数阶忆阻器, 得到了分数阶忆阻器的阻抗和分抗之间的关系, 提出了一种用整数阶忆阻器构造任意阶次分数阶忆阻器的方法, 并分析了分数阶忆阻器的电气特性<sup>[14]</sup>。

目前, 关于分数阶忆阻器的研究还比较少, 并且现有的分数阶忆阻器模型的研究都没有涉及到漂移函数对忆阻器特性的影响。本文提出了一种带有非线性漂移函数的分数阶忆阻器模型, 具体分析了分数阶阶次以及漂移函数中参数的变化对忆阻器特性所产生的影响, 并在此基础上分析了忆阻器在不同激励信号下的响应特性。

## 1 分数阶微积分

分数阶微积分是整数阶微积分的拓展。分数阶微积分的阶次可以是实数也可以是复数, 当分数阶微积分的阶次为整数时, 就是通常的整数阶微积分。在电路与系统中存在着许多非线性的问题需要分析和处理, 传统的整数阶的信号处理电路、方法和工具不能有效地处理此类问题, 而分数阶微积分比较适合处理非线性的问题。

Oldham K B等人介绍了分数阶微积分的概念和定义<sup>[16]</sup>, 通常对于任意函数  $f(x)$ , 其分数阶微积分的运算如公式(1)所示。

$$D^{\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\nu}} f(t) dt \quad (1)$$

式中： $\nu$ 为分数阶微积分的阶次，当 $\nu > 0$ 时， $D^{\nu}$ 表示微分运算；当 $\nu < 0$ 时， $D^{\nu}$ 表示积分运算；当 $\nu = 0$ 时， $D^{\nu}$ 表示原函数； $\Gamma$ 为欧拉 Gamma 函数。

赵元英等介绍一些初等函数的分数阶微积分运算<sup>[17]</sup>，对于正弦函数  $\sin(\omega_0 t)$  和  $\cos(\omega_0 t)$  (式中  $\omega_0 > 0$ )，其分数阶微积分计算公式如式(2)和式(3)所示。

$$(\sin \omega_0 t)^{(\nu)} = \omega_0^{\nu} \sin(\omega_0 t + \frac{\pi\nu}{2}) \quad (2)$$

$$(\cos \omega_0 t)^{(\nu)} = \omega_0^{\nu} \cos(\omega_0 t + \frac{\pi\nu}{2}) \quad (3)$$

其中， $\nu$ 为分数阶微积分的阶次。

## 2 具有非线性漂移函数的忆阻器模型

Strukov D B 等首先发现了忆阻器的实物，并且对忆阻器的机理进行了分析，在此基础上首次提出了如图 1 所示的忆阻器物理模型<sup>[2]</sup>。

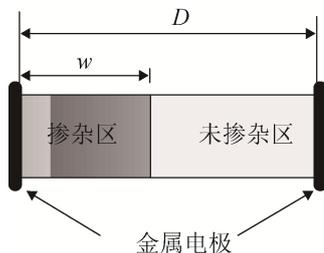


图 1 忆阻器物理模型

Fig. 1 Physical model of memristor

该模型中忆阻器的两端为金属电极，在两金属电极之间为金属氧化物半导体材料，假设该半导体材料的厚度为  $D$ 。在半导体薄膜中存在一个含高浓度掺杂物的区域(即掺杂区)，其阻值很小，剩余的区域掺杂物浓度较低(即非掺杂区)，阻值很大。 $\omega$  表示掺杂区的厚度，其取值范围为  $[0, D]$ 。当给忆阻器施加了一个外部偏置电压时，掺杂区和非掺杂区的边界会随着带电杂质的漂移而移动。当  $\omega/D=1$  时，整个器件均为掺杂区，此时忆阻器的阻值为  $R_{on}$ ；当  $\omega/D=0$  时，整个器件均为非掺杂区，此时忆阻器的阻值为  $R_{off}$ 。通

过  $\omega/D$  的变化可以反映出忆阻器阻值的变化，由此可以得到如公式(4)所示的忆阻器等效阻抗的计算公式。

$$R_m(\omega) = R_{on} \cdot \frac{\omega}{D} + R_{off} (1 - \frac{\omega}{D}) \quad (4)$$

如果带电杂质的漂移运动为最简单的线性漂移，则可以得到如公式(5)所示的描述忆阻器的状态方程。

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \mu_{\nu} \frac{R_{on}}{D} i(t) \quad (5)$$

式中： $\omega(t)$ 表示掺杂区的厚度， $\mu_{\nu}$ 为杂质平均迁移速率，其大小取决于忆阻器内部的半导体材料， $i(t)$ 为流过忆阻器的电流。

公式(5)两端同时除以  $D$ ，同时令  $x=\omega/D$ ， $k=\mu_{\nu}R_{on}/D^2$ ，可得

$$\frac{dx(t)}{dt} = ki(t) \quad (6)$$

式中： $x(t)$ 称为忆阻器的状态变量， $k$ 为取决于忆阻器材料的常量。公式(6)所描述的忆阻器模型也称为线性漂移函数忆阻器模型。

在 Strukov D B 等所提出的线性漂移函数忆阻器模型的基础上，Biolek Z 等又提出了一种带有非线性漂移函数的忆阻器模型<sup>[4]</sup>，其状态方程如公式(7)所示。

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot i(t) \cdot f(x), \quad k = \frac{\mu_{\nu} R_{on}}{D^2} \quad (7)$$

式中： $\mu_{\nu}$ 为杂质平均迁移速率，其大小取决于忆阻器内部的半导体材料， $k$ 为取决于忆阻器材料的常量， $i(t)$ 为流过忆阻器的电流， $f(x)$ 为表征忆阻器内部杂质漂移情况的函数，也就是反映  $x$  从 0 变化到 1 时杂质的迁移情况。具有不同漂移函数  $f(x)$  的忆阻器就具有不同的漂移特性，同时也会表现出不同的电气特性。

忆阻器是一种有记忆功能的非线性电阻。而分数阶微积分适合描述非线性特性，因此建立忆阻器的分数阶模型具有一定的合理性。Fouda M E 等将分数阶微积分理论应用到忆阻器模型的研究上，提出一种基于分数阶微积分的忆阻器模型<sup>[11]</sup>，但是此模型只讨论了  $f(x)=1$  即漂移函数为线性漂

移函数的情况。本文提出了一种带有非线性漂移函数  $f(x)=n/x$  的分数阶忆阻器模型, 其状态方程如公式(8)所示。

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = nk \frac{i(t)}{x} \quad (8)$$

式中:  $x(t)$  为忆阻器的状态变量,  $k$  为取决于忆阻器材料的常量,  $n$  为控制参数,  $i(t)$  为流过忆阻器的电流。将公式(8)等式两边进行变量分离可得:

$$x d^\alpha x = nk \cdot i(t) dt^\alpha \quad (9)$$

根据 Oldham K B 等人给出的如公式(1)所示的分数阶微积分的 R-L 定义, 对等式(9)两边同时求  $\alpha$  阶的分数阶积分可得:

$$\frac{x^{\alpha+1} - x_0^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} = \frac{nk}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} i(\tau) d\tau \quad (10)$$

式中:  $t$  为时间,  $\alpha$  为微积分阶次,  $k$  为取决于忆阻器材料的常量,  $n$  为控制参数,  $x_0$  为  $x$  在  $t=0$  时的初始值。

求解公式(10)可得  $x$  的表达式, 如公式(11)所示。

$$x = [\alpha(\alpha+1)nk \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} i(\tau) d\tau + x_0^{\alpha+1}]^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (11)$$

因此, 忆阻器阻值的表达式如公式(12)所示。

$$R_m = (R_{on} - R_{off}) [\alpha(\alpha+1)nk \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} i(\tau) d\tau + x_0^{\alpha+1}]^{\frac{1}{1+\alpha}} + R_{off} \quad (12)$$

公式(12)就是带有非线性漂移函数  $f(x)=n/x$  的忆阻器在电流信号  $i(t)$  作用下的阻值表达式。  $R_m$  是一个以  $\alpha$ ,  $n$ ,  $i$  为参数的函数, 其中  $\alpha$  和  $n$  是影响忆阻器阻值的最主要参数。当电流信号为不同类型时,  $R_m$  会有不同类型的显式表达式。

### 3 实验结果

为了验证本文所提出的忆阻器模型的正确性并研究忆阻器所具有的电气特性, 本节将对分数阶忆阻器在不同信号激励下的响应特性进行实验分

析与研究。以下所有实验都是在 Matlab 仿真环境下完成的。

#### 3.1 阶跃信号响应

给忆阻器两端施加的阶跃电流信号如式(13)所示。

$$i(t) = I_{DC} \cdot u(t) \quad (13)$$

式中:  $u(t)$  为单位阶跃函数,  $I_{DC}$  为幅值, 将公式(13)代入公式(12)可得忆阻器的阻值表达式, 如公式(14)所示。

$$R_m = (R_{on} - R_{off}) [(\alpha+1)nkI_{DC}t^\alpha + x_0^{\alpha+1}]^{\frac{1}{1+\alpha}} + R_{off} \quad (14)$$

首先考察在如公式(13)所示的阶跃电流信号激励下阶次  $\alpha$  对忆阻器特性的影响。所给的实验参数如下,  $x_0=0.5$ ,  $\mu_v=10^{-10} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}$ ,  $D=10 \text{ nm}$ ,  $I_{DC}=0.1 \text{ mA}$ ,  $R_{on}=100\Omega$ ,  $R_{off}=38 \text{ k}\Omega$ ,  $k=10 \text{ 000 s}^{-1}\text{A}^{-1}$ ,  $n=1$ 。当阶次  $\alpha$  取不同值时分数阶忆阻器阻值  $R_m$  曲线如图 2(a)所示。

然后, 考察在如公式(13)所示的阶跃电流信号激励下控制参数  $n$  对忆阻器特性的影响。

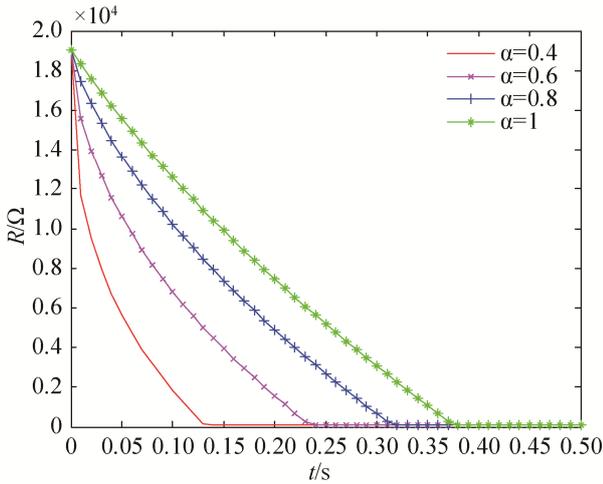
实验参数如下,  $x_0=0.5$ ,  $\mu_v=10^{-10} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}$ ,  $D=10 \text{ nm}$ ,  $I_{DC}=0.1 \text{ mA}$ ,  $R_{on}=100 \Omega$ ,  $R_{off}=38 \text{ k}\Omega$ ,  $k=10 \text{ 000 s}^{-1}\text{A}^{-1}$ ,  $\alpha=0.6$ 。当  $n$  取不同值时分数阶忆阻器阻值  $R_m$  曲线如图 2(b)所示。

由图 2(a)可以看出, 在如公式(13)所示的阶跃电流信号激励下, 阶次  $\alpha$  越小忆阻器的阻值变化越快。

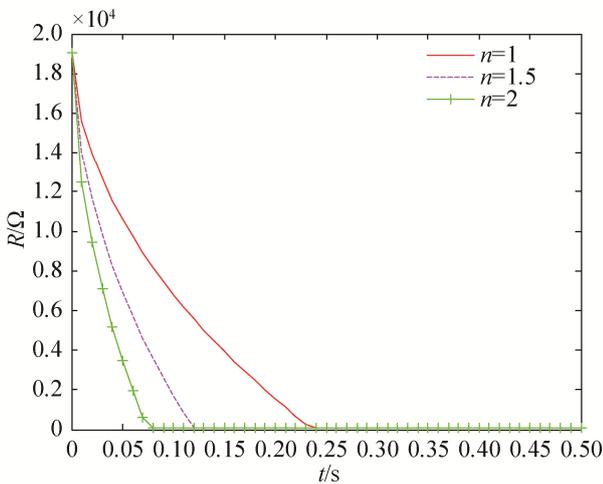
由图 2(b)可以看出, 在如公式(13)所示的阶跃电流信号激励下,  $n$  值越大, 忆阻器的阻值变化越快。

忆阻器的阻值从初始值改变为  $R_{on}$  或者  $R_{off}$  时存在一个饱和时间  $t_d$ , 其计算公式如公式(15)所示。分数阶的阶次  $\alpha$  和控制参数  $n$  对饱和时间  $t_d$  的大小会有影响。

$$t_d = \left( \frac{1 - x_0^{\alpha+1}}{(1+\alpha)nkI_{DC}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (15)$$



(a) 分数阶忆阻器在阶跃信号激励下阻值随  $\alpha$  变化的曲线



(b) 分数阶忆阻器在阶跃信号激励下阻值随  $n$  变化的曲线

图2 分数阶忆阻器在阶跃信号激励下阻值随  $\alpha, n$  变化的曲线

Fig. 2 Resistance curve of the fractional memristor versus  $\alpha, n$  excited by step signal

### 3.2 正弦信号响应

3.1 节研究了带有非线性漂移函数的分数阶忆阻器在阶跃信号激励下的响应特性, 本小节将研究分数阶忆阻器在正弦信号激励下的响应特性。

在忆阻器两端施加如公式(16)所示的正弦电流信号。

$$i(t) = I \sin(2\pi ft) \quad (16)$$

根据分数阶微积分的性质可以得到  $i(t)$  的  $\alpha$  阶分数阶积分表达式, 如公式(17)所示。

$$J^\alpha i(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} I \sin(2\pi f\tau) d\tau = \left(\frac{1}{2\pi f}\right)^\alpha I \sin\left(2\pi ft - \frac{\pi}{2}\alpha\right) \quad (17)$$

根据公式(12)和公式(17)可得忆阻器的阻值表达式, 如公式(18)所示。

$$R_m = (R_{on} - R_{off})(x_0)^{\alpha+1} + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{(2\pi f)^\alpha} Ink \sin\left(2\pi ft - \frac{\pi}{2}\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} + R_{off} \quad (18)$$

由公式(18)可知,  $R_m$  是一个以  $n, \alpha, i$  为参数的函数, 其中  $\alpha$  和  $n$  为影响忆阻器阻值的主要参数。下面通过实验来观察忆阻器的特性。

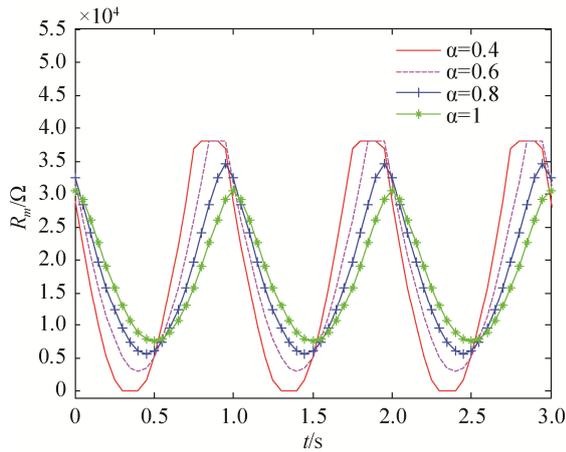
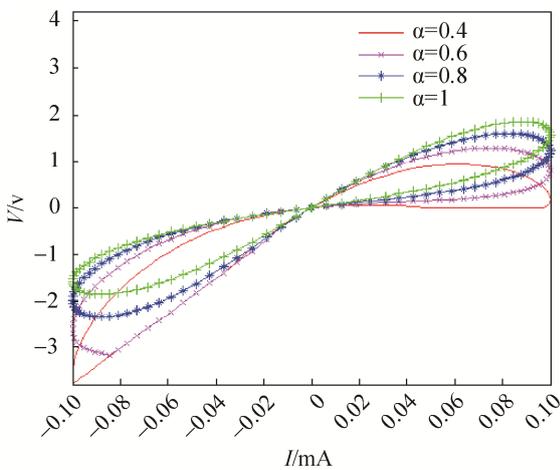
首先, 观察在如公式(16)所示的正弦电流信号激励下分数阶阶次  $\alpha$  对忆阻器电气特性的影响。实验参数如下:  $f=1$  Hz,  $x_0=0.6$ ,  $\mu_v=10^{-10}$  cm<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>V<sup>-1</sup>,  $D=10$  nm,  $I=0.1$  mA,  $R_{on}=100$  Ω,  $R_{off}=38$  kΩ,  $k=10\,000$  s<sup>-1</sup>A<sup>-1</sup>,  $n=1$ 。

当阶次  $\alpha$  取不同值时, 分数阶忆阻器阻值  $R_m$  的曲线如图 3(a)所示, 分数阶忆阻器的  $v-i$  特性曲线如图 3(b)所示。

由图 3(a)可以看出, 在如公式(16)所示的正弦电流信号激励下, 当阶次  $\alpha$  取不同值时, 忆阻器阻值  $R_m$  均周期变化, 随着阶次  $\alpha$  的增大  $R_m$  的平均值逐渐减小, 且变化范围逐渐变小。

由图 3(b)可以看出, 在如公式(16)所示的正弦电流信号激励下, 当阶次  $\alpha$  取不同值时, 分数阶忆阻器  $v-i$  特性曲线均为在原点紧致的滞回曲线。随着阶次  $\alpha$  的增大, 在原点紧致的滞回曲线的形状发生了明显的变化。当  $\alpha=1$  时, 也就是整数阶时, 在原点紧致的滞回曲线是关于原点对称的, 符合整数阶忆阻器  $v-i$  特性曲线的特点。

其次, 观察在如公式(16)所示的正弦电流信号激励下控制参数  $n$  对忆阻器电气特性的影响。实验参数如下,  $f=1$  Hz,  $x_0=0.6$ ,  $\mu_v=10^{-10}$  cm<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>V<sup>-1</sup>,  $D=10$  nm,  $I=0.1$  mA,  $R_{on}=100$  Ω,  $R_{off}=38$  kΩ,  $k=10\,000$  s<sup>-1</sup>A<sup>-1</sup>。

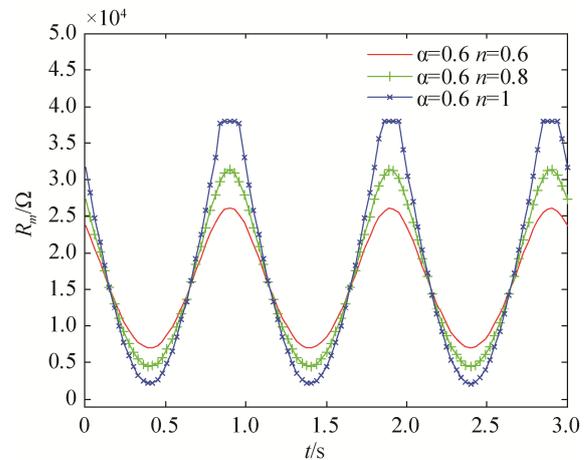
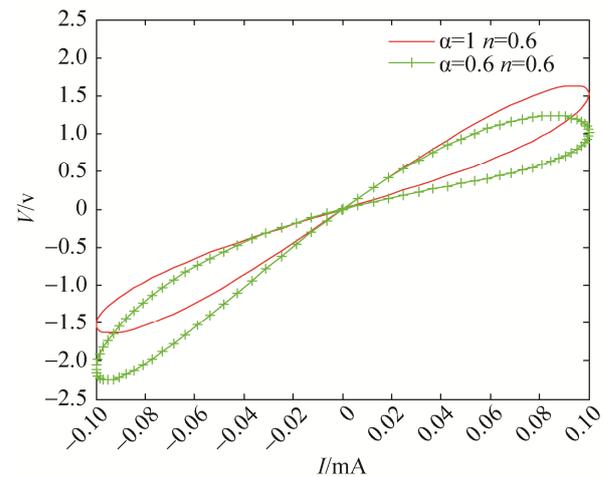
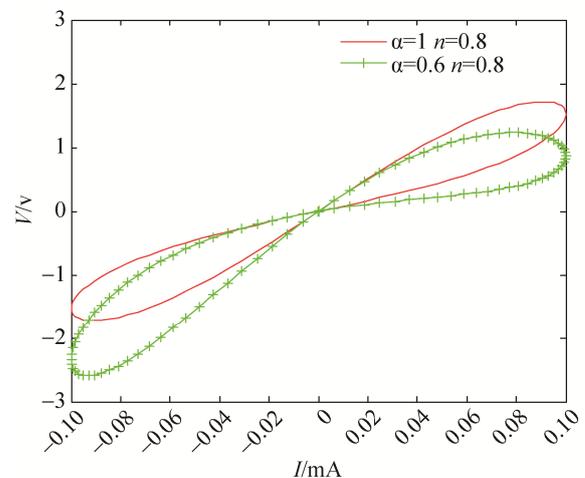
(a) 分数阶忆阻器在正弦信号激励下阻值随  $\alpha$  变化的曲线(b) 当  $\alpha$  取不同值时忆阻器的  $v-i$  特性曲线图3 分数阶忆阻器在正弦信号激励下特性随  $\alpha$  变化曲线  
Fig. 3 Characteristic of the fractional memristor versus  $\alpha$ 

当  $n$  取不同值时, 分数阶忆阻器阻值  $R_m$  的曲线如图 4 所示, 分数阶忆阻器的  $v-i$  特性曲线如图 5 所示。

由图 4 可以看出, 在如公式(16)所示的正弦电流信号激励下, 当  $n$  取不同值时, 忆阻器阻值  $R_m$  均周期变化, 随着  $n$  的增大  $R_m$  的平均值逐渐变大, 且变化范围逐渐变大。

由图 5 可以看出, 在如公式(16)所示的正弦电流信号激励下,  $n$  取不同值时, 分数阶忆阻器的  $v-i$  特性曲线均为在原点紧致的滞回曲线。当  $\alpha=1$  时, 在原点紧致的滞回曲线是关于原点对称的。当  $\alpha=0.6$  时, 在原点紧致的滞回曲线关于原点对称。随着  $n$  的增大, 在原点紧致的滞回曲

线的形状发生了明显的变化, 其所包围的面积逐渐增大。

图4 分数阶忆阻器在正弦信号激励下阻值随  $n$  变化曲线  
Fig. 4 Resistance curve of the fractional memristor versus  $n$  excited by sinusoidal signal(a)  $n=0.6, \alpha=(0.6,1)$ (b)  $n=0.8, \alpha=(0.6,1)$

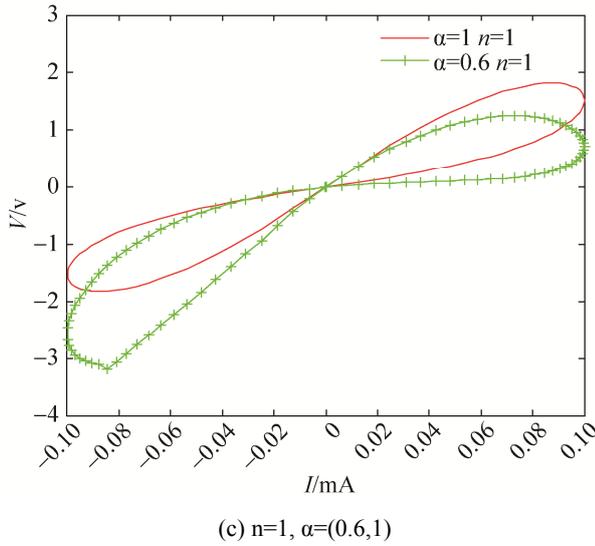


图5  $n$  取不同值时忆阻器的  $v-i$  特性曲线  
Fig. 5  $v-i$  characteristic of the fractional memristor versus  $n$

### 3.3 非正弦周期信号响应

由傅里叶级数展开公式可知,任意周期信号都可以展开为公式(19)所示的形式。

$$i(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi ft) + b_n \cos(2\pi ft) \quad (19)$$

对公式(19)两边同时求  $\alpha$  阶分数阶积分可得,

$$J^\alpha i(t) = \frac{a_0 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n J^\alpha \sin(2\pi ft) + b_n J^\alpha \cos(2\pi ft) \quad (20)$$

将式(20)代入式(12)即可得到忆阻器在非正弦周期信号激励下的阻值表达式。为分析忆阻器在任意非正弦周期信号激励下的响应特性,以公式(21)所示的方波信号为例,对忆阻器在方波信号激励下的响应特性进行分析。

$$i(t) = \begin{cases} I_{01} & 0 < \tau \leq \beta T \\ I_{02} & \beta T < \tau \leq T \end{cases} \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (21)$$

公式(21)的  $T$  为信号周期,  $\tau = \text{mod}(t, T)$ ,  $I_{01} = -I_{02}$ 。由于电流激励信号的取值在正负之间交替变换,分数阶忆阻器的阻值随着电流的变化周期性上下变化。对输入电流信号采用傅里叶级数展开,系数通过如下公式得到:

$$a_0 = \beta I_{01} + (1-\beta)I_{02}, \quad a_n = ((I_{01}-I_{02})/n\pi) \sin(2\beta n\pi), \\ b_n = ((I_{01}-I_{02})/n\pi)(1-\cos(2\beta n\pi)).$$

因此,电流信号的分数阶积分如公式(22)所示。

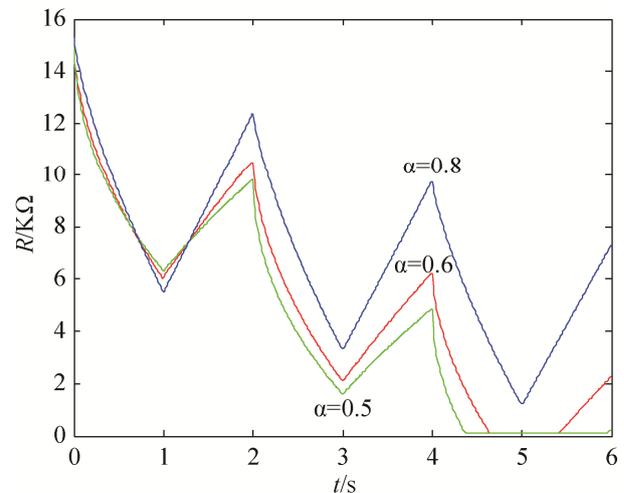
$$J^\alpha i(t) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \cdot \begin{cases} I_{01} \tau^\alpha & 0 < \tau \leq \beta T \\ I_{01}(\beta T)^\alpha + I_{02}(\tau^\alpha - (\beta T)^\alpha) & \beta T < \tau \leq T \end{cases} \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (22)$$

根据公式(12)和公式(22)可得分数阶忆阻器的阻值表达式:

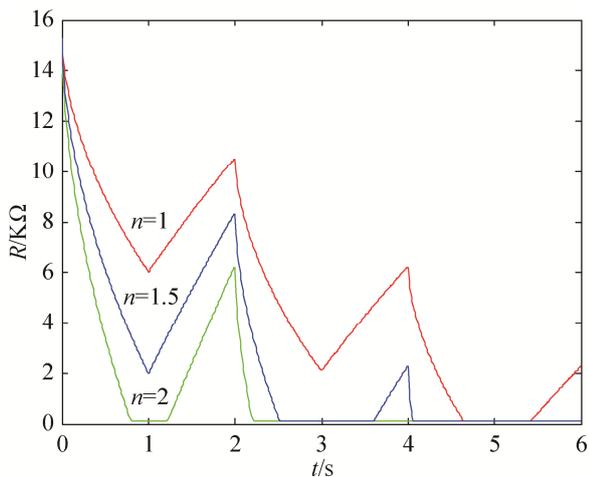
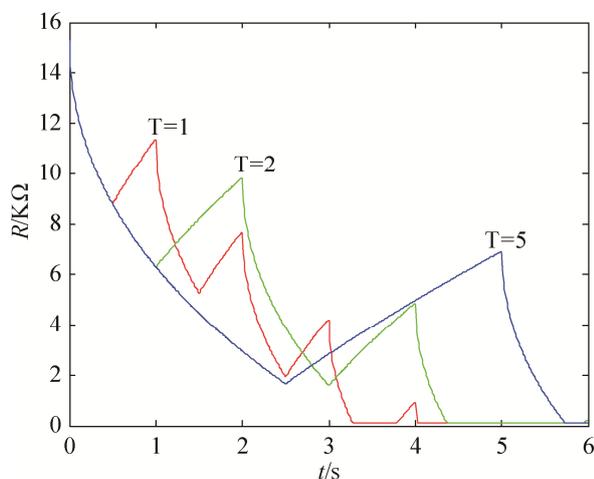
$$\left( \frac{R_m - R_{off}}{R_{on} - R_{off}} \right)^{(1+\alpha)} = x_0^{\alpha+1} + (\alpha+1)nk \cdot \begin{cases} I_{01} \tau^\alpha & 0 < \tau \leq \beta T \\ I_{01}(\beta T)^\alpha + I_{02}(\tau^\alpha - (\beta T)^\alpha) & \beta T < \tau \leq T \end{cases} \quad (23)$$

由公式(23)可知,  $R_m$  是一个以  $n, \alpha, \beta, T$  为参数的函数,其中  $\alpha, n$  和  $T$  为影响忆阻器阻值的主要参数。下面通过实验来观察在如公式(21)所示的方波电流信号激励下忆阻器的特性。

实验参数如下:  $x_0=0.6, \mu_v=10^{-10} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}, D=10 \text{ nm}, I_{01}=-I_{02}=0.02 \text{ mA}, R_{on}=100 \Omega, R_{off}=38 \text{ k}\Omega, \beta=0.5, k=10 \text{ 000 s}^{-1}\text{A}^{-1}$ 。当  $T=2\text{s}, n=1$ , 分数阶阶次  $\alpha$  取不同值时,分数阶忆阻器的阻值变化曲线如图 6(a)所示。当  $T=2 \text{ s}, \alpha=0.6$ , 控制参数  $n$  取不同值时,分数阶忆阻器阻值变化曲线如图 6(b)所示。图 6(c)为  $\alpha=0.5, n=1$ , 方波信号周期  $T$  取不同值时,分数阶忆阻器的阻值变化曲线。



(a) 阶次  $\alpha$  对阻值的影响

(b) 控制参数  $n$  对阻值的影响(c) 周期  $T$  对阻值的影响图6  $\alpha, n$  和  $T$  取不同值时忆阻器的阻值曲线Fig. 6 Resistance curve of the fractional memristor versus  $\alpha, n$  and  $T$ 

由图6可以看出,在占空比为50%的方波信号的激励下,分数阶忆阻器的阻值随时间的增加从初始值逐渐减小到边界值。

由以上实验分析可知,本文所提出的分数阶忆阻器模型可以正确地描述忆阻器的特性,与YU J T等所提出的整数阶忆阻器模型相比,该模型不仅能够通过改变非线性漂移函数的参数模拟具有不同记忆效应的忆阻器,而且还可以通过改变分数阶的阶次模拟具有不同记忆效应的忆阻器。与Fouda M E等所提出的分数阶忆阻器模型相比,该模型不仅能够通过改变分数阶的阶次模拟具有不同记忆效应的忆阻器,而且还可以通过改变非

线性漂移函数的参数模拟具有不同记忆效应的忆阻器。

## 4 结论

在分析了现有的整数阶和分数阶忆阻器模型的基础上提出了一种带有非线性漂移函数的分数阶忆阻器模型,并对该忆阻器进行了实验分析。实验结果表明带有非线性漂移函数的分数阶忆阻器模型可以正确地描述忆阻器特性,而且通过修改漂移函数的参数可以调整分数阶忆阻器模型的电气特性,这对于忆阻器模型的研究具有一定的指导意义。本文还对忆阻器在阶跃信号、正弦和非正弦周期信号激励下的响应进行了实验分析,总结了分数阶阶次、信号频率和非线性漂移函数的参数对忆阻器电气特性影响的规律,这对于忆阻器的应用具有较大的参考价值。

## 参考文献:

- [1] Chua L O. Memristor-The Missing Circuit Element [J]. IEEE Transactions on circuit theory(S0018-9324), 1971, 18(5): 507-519.
- [2] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, et al. The missing memristor found[J]. Nature(S0028-0836), 2008, 453(7191): 80-83.
- [3] Y N Joglekar, S J Wolf. The elusive memristor: Properties of basic electrical circuits[J]. European Journal of Physics (S0143-0807), 2008, 30(4): 661-675.
- [4] Zdenek Bielek, Dalibor Bielek, Viera Biolkova. SPICE Model of Memristor with Nonlinear Dopant Drift[J]. Radioengineering(S1210-2512), 2009, 18(2): 210-214.
- [5] T Prodromakis, C Papavassiliou, C Toumazou. A versatile memristor model with nonlinear dopant kinetics [J]. IEEE Transactions on Electron Devices (S0018-9383), 2011, 58(9): 3099-3105.
- [6] J T Yu, X M Mu, X M Xi, et al. A memristor model with piecewise window function[J]. Radioengineering (S1210-2512), 2013, 22(4): 969-974.
- [7] Jinxiang Zha, He Huang, Yujie Liu. A Novel Window Function for Memristor Model With Application in Programming Analog Circuits[J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems II Express Briefs(S1549-7747), 2016, 63(5): 423-427.

(下转第 2899 页)