

1-8-2019

Broadband 2-D DOA Estimation Based on Continuous Sparse Recovery

Chenxi Wu

Electronic Engineering Institute of PLA, Hefei 230037, China;

Zhang Min

Electronic Engineering Institute of PLA, Hefei 230037, China;

Keren Wang

Electronic Engineering Institute of PLA, Hefei 230037, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Broadband 2-D DOA Estimation Based on Continuous Sparse Recovery

Abstract

Abstract: For the problem of two dimensional underdetermined direction of arrival (2-D DOA) estimation, *three parallel sparse arrays are designed and a novel DOA method based on continuous sparse recovery is proposed.* The dimension of received data is reduced and the cross covariance matrix is vectorized to improve freedom degree. According to the objection function of the minimization issue based on total variation norm constraint, the space frequency is achieved by solving corresponding dual problem. The center frequency, azimuth and pitch angles are paired by capon method. Theoretical analysis shows *the proposed method has a higher array aperture extension and can neglect basis mismatch effects.* Extensive simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords

array signal processing, broadband DOA estimation, continuous sparse recovery, total variation norm

Recommended Citation

Wu Chenxi, Zhang Min, Wang Keren. Broadband 2-D DOA Estimation Based on Continuous Sparse Recovery[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(8): 3015-3023.

基于连续稀疏重构的宽频段二维波达方向估计

吴晨曦, 张旻, 王可人

(解放军电子工程学院, 安徽 合肥 230037)

摘要: 针对宽频段二维波达方向估计问题, 设计三平行稀疏阵列, 提出一种基于连续稀疏重构的 DOA 估计方法。对阵列接收数据进行降维处理, 对互协方差矩阵向量化提高阵列自由度; 建立一个基于全变分范数最小化的目标函数, 通过求解相应的对偶问题实现对空间频率的估计; 利用 Capon 方法实现信号频率、方位角和俯仰角之间的配对。理论分析表明, 该方法具有较好的阵列自由度扩展能力, 同时能有效避免模型失配问题对估计性能的影响。仿真结果验证了该方法的有效性。

关键词: 阵列信号处理; 宽频段 DOA 估计; 连续稀疏重构; 全变分范数

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2018) 08-3015-09

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201808024

Broadband 2-D DOA Estimation Based on Continuous Sparse Recovery

Wu Chenxi, Zhang Min, Wang Keren

(Electronic Engineering Institute of PLA, Hefei 230037, China)

Abstract: For the problem of two dimensional underdetermined direction of arrival (2-D DOA) estimation, three parallel sparse arrays are designed and a novel DOA method based on continuous sparse recovery is proposed. The dimension of received data is reduced and the cross covariance matrix is vectorized to improve freedom degree. According to the objection function of the minimization issue based on total variation norm constraint, the space frequency is achieved by solving corresponding dual problem. The center frequency, azimuth and pitch angles are paired by capon method. Theoretical analysis shows the proposed method has a higher array aperture extension and can neglect basis mismatch effects. Extensive simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: array signal processing; broadband DOA estimation; continuous sparse recovery; total variation norm

引言

波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计是阵列信号处理的重要研究内容之一, 在雷达、无线通信和电子对抗等领域有着广泛应用。实际的电磁环境中, 辐射源往往处于一个三维空间中, 二维到达

角能够更好地描述辐射源的空间特性。目前测向接收机的瞬时带宽朝着宽频段的趋势发展, 即在一个较宽的频段范围内存在多个不同中心频率的窄带信号, 因此对宽频段二维 DOA 估计问题的研究具有重要的意义。

针对宽频段二维 DOA 估计问题, 国内外学者提出一些有效的方法^[1-4]。如文献[1]结合均匀面阵, 利用 TLS-ESPRIT 算法实现对二维 DOA 和频率的联合估计, 通过对互谱矩阵进行特征分解实现参数估计, 避免了谱峰搜索, 然而对于面阵而言, 特征



收稿日期: 2017-01-04 修回日期: 2017-04-26;
基金项目: 国家自然科学基金(61171170), 安徽省自然科学基金(1408085QF115);
作者简介: 吴晨曦(1988-), 男, 安徽枞阳, 博士, 讲师, 研究方向为阵列信号处理, 稀疏重构。

<http://www.china-simulation.com>

• 3015 •

分解的计算量较大。文献[2]对高斯色噪声背景下的相干信号频率与二维 DOA 问题进行了研究, 利用四阶累积量来抑制高斯色噪声, 由于涉及到四阶累积量计算, 其计算复杂度高且仅适用于非高斯信号。文献[3]提出了基于双平行阵列的平行因子四线性分解的估计方法, 该方法的优点在于无需谱峰搜索和参数配对, 但其在少阵元数、低信噪比条件下估计效果不理想。文献[4]基于压缩感知理论提出一种宽频段二维 DOA 估计方法, 该方法具有较高的估计精度和分辨力且对信噪比要求不高。然而其需要对角度域离散化来构造完备字典, 不可避免会存在模型失配问题对估计性能产生影响^[5]。同时以上方法都是基于均匀阵列基础之上进行研究的, 所能获得的阵列自由度有限, 可估计的信号个数均不能超过阵元数。

近年来, 稀疏阵列以其具有较好的阵列自由度扩展特性而被广泛关注, 尤其是最近提出的嵌套阵列^[6]和互质阵列^[7], 由于具有结构简单易于构造、阵列扩展性能好、物理阵元和虚拟阵元具有解析表达式等优点而被广泛研究^[8-14]。现有的研究成果大都基于一维欠定 DOA 估计问题, 对于宽频段二维欠定 DOA 估计问题的研究还鲜有报道, 鉴于欠定情况在实际环境中经常出现, 因此亟需寻求适用于欠定条件下的宽频段二维 DOA 估计方法。

针对上述存在的问题, 本文受嵌套阵列启发, 设计了一种新型三平行稀疏阵列, 并以此为依托, 提出了一种基于连续稀疏重构的宽频段二维 DOA 估计方法。首先利用空间频率的定义对阵列接收数据进行预处理, 将三维参数估计问题降维为一维空间频率估计问题, 极大降低了计算的复杂度, 同时对互协方差矩阵进行向量化处理, 实现阵列自由度的提升; 然后利用全变分范数对空间频率的稀疏性进行约束, 将空间频率估计问题转化为一个基于全变分范数约束的最优化问题, 进一步通过求解相应的对偶问题实现对空间频率的高精度估计并利用 FFT 变换得到各入射信号的频率; 最后结合 Capon 波束形成方法实现信号频率与空间频率的准确配

对, 进而得到信号频率和二维 DOA 的联合估计。由于该方法在连续频率域对空间频率进行估计, 有效避免了传统稀疏重构方法中角度域离散化所带来的模型失配问题对估计性能的影响, 提高了估计精度和分辨性能。

1 阵列结构与信号模型

三平行稀疏阵列结构如图 1 所示, 其由三个位于 X-Y 平面的均匀线阵组成, 其中子阵 1 包含 N 个阵元, 阵元间距为 d , 子阵 2 包含 M 个阵元, 阵元间距为 Nd , 子阵 3 与子阵 2 两者结构相同且关于 Y 轴对称, 子阵 1 与子阵 2 之间的距离为 d 。

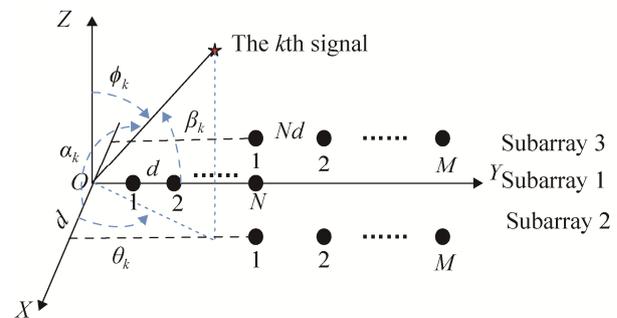


图 1 三平行稀疏阵列结构图
Fig. 1 Three parallel sparse arrays geometry

假设 K 个远场独立的窄带信号分别以 $(\theta_1, \phi_1), (\theta_2, \phi_2), \dots, (\theta_K, \phi_K)$ 入射到阵列上, 其中 $(\theta_i, \phi_i), (i=1, 2, \dots, K)$ 表示第 i 个信号的方位角和俯仰角, 信号的中心频率分别为 f_1, f_2, \dots, f_K , 且满足 $d < c/2f_{\max}$, f_{\max} 为入射信号的最大中心频率值, c 为电波传播速度。则 t 时刻三个子阵接收数据为:

$$\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{A}_1(\theta, \phi, f) \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}_1(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{X}_2(t) = \mathbf{A}_2(\theta, \phi, f) \mathbf{A}(\theta, \phi, f) \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}_2(t) \quad (2)$$

$$\mathbf{X}_3(t) = \mathbf{A}_2(\theta, \phi, f) \mathbf{A}(-\theta, \phi, f) \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}_3(t) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{S}(t) \hat{\in} \mathbb{C}^{K \times 1}$ 为入射信号向量, $\mathbf{N}_1(t) \hat{\in} \mathbb{C}^{N \times 1}$, $\mathbf{N}_2(t) \hat{\in} \mathbb{C}^{M \times 1}$, $\mathbf{N}_3(t) \hat{\in} \mathbb{C}^{M \times 1}$ 表示均值为 0, 方差为 σ^2 的高斯白噪声向量。 $\mathbf{A}_1(\theta, \phi, f) \hat{\in} \mathbb{C}^{N \times K}$, $\mathbf{A}_2(\theta, \phi, f) \hat{\in} \mathbb{C}^{M \times K}$ 表示子阵的阵列流型矩阵, \mathbb{C} 表示复数集合, 其中 $\mathbf{A}_1(\beta)$, $\mathbf{A}_2(\beta)$ 的 k 列可分别表示为:

$$\mathbf{a}_1(\theta_k, \phi_k, f_k) = [\exp(j2\pi df_k \sin \theta_k \sin \theta_k / c), \dots, \exp(j2\pi Ndf_k \sin \theta_k \sin \theta_k / c)]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{a}_2(\theta_k, \phi_k, f_k) = [\exp(j2\pi Ndf_k \sin \theta_k \sin \theta_k / c), \dots, \exp(j2\pi NMdf_k \sin \theta_k \sin \theta_k / c)]^T \quad (5)$$

$\mathbf{A}(\theta, \phi, f) \hat{\mathbf{I}} \in \mathbb{C}^{K \times K}$ 为对角矩阵可表示为:

$$\mathbf{A}(\theta, \phi, f) = \text{diag}(\exp(j2\pi df_1 \cos \theta_1 \sin \phi_1 / c), \dots, \exp(j2\pi df_k \cos \theta_k \sin \phi_k / c)) \quad (6)$$

2 算法原理

2.1 阵列接收数据预处理

宽频段二维 DOA 估计问题是一个包含方位角、俯仰角和频率三维信息的参数估计问题, 直接求解, 难度较大。为了降低求解的复杂度, 首先对阵列接收数据进行降维处理, 引入空间角 α 和 β , 分别表示为入射信号与 X 轴和 Y 轴之间的夹角。由图 1 的几何关系可知空间角与入射角之间的关系为:

$$\cos \alpha_k = \cos \theta_k \sin \phi_k, \cos \beta_k = \sin \theta_k \sin \phi_k \quad (7)$$

将式(7)分别代入式(4)~(6)可得:

$$\mathbf{a}_1(\alpha_k, f_k) = [\exp(j2\pi df_k \cos \beta_k / c), \dots, \exp(j2\pi Ndf_k \cos \beta_k / c)]^T \quad (8)$$

$$\mathbf{a}_2(\alpha_k, f_k) = [\exp(j2\pi Ndf_k \cos \beta_k / c), \dots, \exp(j2\pi NMdf_k \cos \beta_k / c)]^T \quad (9)$$

$$\mathbf{A}(\beta, f) = \text{diag}(\exp(j2\pi df_1 \cos \alpha_1 / c), \dots, \exp(j2\pi df_k \cos \alpha_k / c)) \quad (10)$$

由式(8)~(10)可知, 通过空间角的引入, 方位角、俯仰角、频率三维信息可由空间角和频率两维信息进行表示, 进一步将空间角和频率合成一维空间频率信息进行表示, 定义 $H_k = f_k \cos \alpha_k / c$ 为方位向空间频率, $V_k = f_k \cos \beta_k / c$ 为俯仰向空间频率。则式(8)~(10)可分别表示为:

$$\mathbf{a}_1(V_k) = [\exp(j2\pi dV_k), \dots, \exp(j2\pi NdV_k)]^T \quad (11)$$

$$\mathbf{a}_2(V_k) = [\exp(j2\pi NdV_k), \dots, \exp(j2\pi NMdV_k)]^T \quad (12)$$

$$\mathbf{A}(H) = \text{diag}(\exp(j2\pi dH_1), \dots, \exp(j2\pi dH_K)) \quad (13)$$

假设噪声与入射信号之间互不相关且噪声之间相互独立, 则互协方差矩阵 \mathbf{R}_{12} 、 \mathbf{R}_{13} 分别为:

$$\mathbf{R}_{12} = E[\mathbf{X}_1(t)\mathbf{X}_2^H(t)] = \mathbf{A}_1(V)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(H)\mathbf{A}_2^H(V) + \mathbf{N}_{12} = \mathbf{A}_1(V)\hat{\mathbf{R}}_s\mathbf{A}_2^H(V) + \mathbf{N}_{12} \quad (14)$$

$$\mathbf{R}_{13} = E[\mathbf{X}_1(t)\mathbf{X}_3^H(t)] = \mathbf{A}_1(V)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(-H)\mathbf{A}_3^H(V) + \mathbf{N}_{13} = \mathbf{A}_1(V)\hat{\mathbf{R}}_s\mathbf{A}_2^H(V) + \mathbf{N}_{13} \quad (15)$$

式中: $E[\bullet]$ 表示期望运算, $(\bullet)^H$ 表示共轭转置, $\hat{\mathbf{R}}_s = \mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(H)$, $\hat{\mathbf{R}}_s = \mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(-H)$, $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^H(t)] = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_K^2)$ 为信号功率向量, σ_k^2 为第 k 个信号功率, 由于噪声之间相互独立因此, $\mathbf{N}_{12} = 0$, $\mathbf{N}_{13} = 0$, 在一定程度上起到了去噪作用。

根据 Khatri-Rao 积的性质, 对互协方差矩阵 \mathbf{R}_{12} 进行向量化处理, 即

$$\mathbf{y}_{12} = \text{vec}(\mathbf{R}_{12}) = \mathbf{A}_2(V) \odot \mathbf{A}_1^*(V) \mathbf{P} = \mathbf{B}_1(V) \mathbf{P} \quad (16)$$

式中: \odot 表示 Khatri-Rao 积, \otimes 表示 Kronecker 积。 $\mathbf{B}_1(V) = [\mathbf{b}_1(V_1), \mathbf{b}_1(V_2), \dots, \mathbf{b}_1(V_K)] \in \mathbb{C}^{MN \times K}$ 等效于阵元位置集合为 $\{(MN-1)d, (MN-2)d, \dots, 0\}$ 的虚拟阵列流型矩阵, $\mathbf{b}_1(V_k) = \mathbf{a}_2(V_k) \ddot{\mathbf{A}} \mathbf{a}_1^*(V_k)$ 为 $\mathbf{B}_1(V)$ 的第 k 列, $\mathbf{P} = \text{diag}(\hat{\mathbf{R}}_s)$ 。

同时对互协方差矩阵 \mathbf{R}_{13} 进行复共轭处理, 即

$$\mathbf{R}_{13}^* = (\mathbf{A}_1(V)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(-H)\mathbf{A}_3^H(V))^* = \mathbf{A}_1^*(V)\mathbf{R}_s^*\mathbf{A}^T(-V)\mathbf{A}_3^T(H) = \mathbf{A}_1^*(V)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(H)\mathbf{A}_3^T(V) \quad (17)$$

式中: $(\bullet)^*$ 表示共轭操作, $(\bullet)^T$ 表示转置操作。进一步对 \mathbf{R}_{13}^* 进行向量化处理, 可得:

$$\mathbf{y}_{13} = \text{vec}(\mathbf{R}_{13}^*) = \mathbf{A}_3(V) \odot \mathbf{A}_1^*(V) \mathbf{p} = \mathbf{B}_2(V) \mathbf{P} \quad (18)$$

式中: $\mathbf{B}_2(V) = [\mathbf{b}_2(V_1), \mathbf{b}_2(V_2), \dots, \mathbf{b}_2(V_K)] \in \mathbb{C}^{MN \times K}$ 等效于阵元位置集合为 $\{-(MN-1)d, -(MN-2)d, \dots, 0\}$ 的阵列流型矩阵, $\mathbf{b}_2(V_k) = \mathbf{a}_2(V_k) \ddot{\mathbf{A}} \mathbf{a}_1^*(V_k)$ 为 $\mathbf{B}_2(V)$ 的第 k 列。

实际应用中快拍数 L 有限, \mathbf{R}_{12} , \mathbf{R}_{13} 由各自采样协方差矩阵进行等效即 $\hat{\mathbf{R}}_{12} = (1/L) \sum_{t=1}^L \mathbf{X}_1(t)\mathbf{X}_2^H(t)$, $\hat{\mathbf{R}}_{13} = (1/L) \sum_{t=1}^L \mathbf{X}_1(t)\mathbf{X}_3^H(t)$ 。

因此, 估计数据 $\hat{\mathbf{y}}_{12}$ 、 $\hat{\mathbf{y}}_{13}$ 可分别表示为 $\hat{\mathbf{y}}_{12} = \mathbf{y}_{12} + \Delta\mathbf{y}_{12}$, $\hat{\mathbf{y}}_{13} = \mathbf{y}_{13} + \Delta\mathbf{y}_{13}$, $\Delta\mathbf{y}_{12}$ 、 $\Delta\mathbf{y}_{13}$ 表示估计误差。

利用式(16)和式(18)得到一个扩展的虚拟均匀阵列接收数据 $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{(2MN-1) \times 1}$:

$$\hat{\mathbf{y}}_{12} = [\text{flipud}(\mathbf{y}_{12}(1:MN-1))] \quad (19)$$

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{y}_{13}^T, \hat{\mathbf{y}}_{12}^T]^T = \Phi \mathbf{P} + \mathbf{n} \quad (20)$$

式中: flipud 表示对向量进行翻转操作。 $\Phi = [\mathbf{b}(V_1), \mathbf{b}(V_2), \dots, \mathbf{b}(V_K)] \in \mathbb{C}^{(2MN-1) \times K}$ 可看作阵元位置集合为 $\{-(MN-1)d, \dots, 0, \dots, (MN-1)d\}$ 的阵列流型矩阵, $\mathbf{b}(V_k) = [e^{-j2\pi d(MN-1)V_k}, \dots, 1, \dots, e^{j2\pi d(MN-1)V_k}]^T$ 为 Φ 的第 k 列, \mathbf{n} 为由于快拍数 L 有限产生的等效噪声向量。

由式(20)可知, 通过对阵列接收数据预处理操作, 阵列自由度得到了显著增加。利用 $2M+N$ 个阵元能得到 $2MN-1$ 个阵列自由度, 这为解决欠定 DOA 估计问题提供了保证。另一方面, 本文中通过引空间频率的定义, 使得三维参数估计问题转化为一维参数估计参数问题进行求解, 从而极大降低了求解的复杂度。

2.2 基于全变分范数最小化的空间频率估计

式(20)可看作为一个单快拍空间频率估计问题, 可利用基于稀疏重构的方法进行求解, 虽然较基于子空间的方法具有更高的估计精度和分辨率, 但其不足在于是直接采用在 l_2 空间的范数来度量稀疏参数, 需要对角度域进行离散化处理来构造完备字典, 不可避免地会存在模型失配问题。为了从根本上解决模型失配问题, 本文将全变分范数^[15]应用于空间频率估计, 能够在约束空间频率稀疏性的同时确保空间频率域的连续性, 从而在本质上解决模型失配问题。

首先对式(20)两边分别乘以 $e^{-j\pi nd}$ 并进行变换, 可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n) &= e^{-j\pi nd} \mathbf{Z}(n) = e^{-j\pi nd} \sum_{k=1}^K s_k e^{j2\pi nd V_k} + \\ & \mathbf{e}(n) = \sum_{k=1}^K s_k e^{-j2\pi nd \tau_k} + \mathbf{e}(n) \end{aligned} \quad (21)$$

式中: $\tau_k = (1-2V_k)/2 \in [0, 1]$, $s_k = \sigma_k^2$ 表示入射信号的功率, $n = -MN+1, -MN+2, \dots, MN-2, MN-1$ 。

式(21)进一步可写成矩阵形式, 即

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{e} \quad (22)$$

式中: $\mathbf{y} = [y(-MN+1), \dots, y(MN-1)]^T$, $\mathbf{F}_{m,n} = e^{-j2\pi m d \tau_n}$, \mathbf{e} 为噪声项, $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\tau), 0 \leq \tau \leq 1$, $\mathbf{s}(\tau)$ 在连续域上可表示为:

$$\mathbf{s}(\tau) = \sum_{k=1}^K s_k \delta_{\tau_k} \quad (23)$$

式中: s_k 表示信号功率。此时, 全变分范数 $\|\mathbf{s}\|_{\text{TV}} = \sum_{k=1}^K s_k$ 等同于离散 l_1 范数。

为实现从测量数据 \mathbf{y} 中精确重构出 \mathbf{s} ^[16], 可通过求解式(24)的全变分范数最小化问题, 即

$$\min \|\mathbf{s}\|_{\text{TV}} \quad \text{s.t. } \mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{e} \quad (24)$$

对于式(24)的优化问题, 由于其原始变量是无穷维的, 直接求解是一个 NP 难问题。但其是一个有着线性等式约束条件的凸优化问题具有强对偶性。因此, 可利用其对偶问题的最大化来进行等效, 具体可表示为:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u}} \quad & \text{Re}[\mathbf{u}^H \mathbf{y}] - \mu \|\mathbf{u}\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & \|\mathbf{F}^H \mathbf{u}\|_{\infty} \leq 1 \end{aligned} \quad (25)$$

式中: μ 为正则化参数, 对偶变量 \mathbf{u} 是有限维的。约束条件是无限维的仍不能直接进行求解, 但可利用有限维线性矩阵不等式进行等效。因此, 式(25)进一步可转化为:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u}, \mathbf{Q}} \quad & \text{Re}[\mathbf{u}^H \mathbf{y}] - \mu \|\mathbf{u}\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^H & \mathbf{1} \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \sum_{i=1}^{2MN-j} \mathbf{Q}_{i,i+j} = \begin{cases} 1 & j=0 \\ 0 & j=1, 2, \dots, 2MN-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

式中: \mathbf{Q} 为埃尔米特-拓普利兹(Hermitian Toeplitz)矩阵。(26)式是一个凸优化问题, 可利用 CVX 优化工具包^[17]进行求解, 得到 \mathbf{u} 的估计值 $\hat{\mathbf{u}}$ 。进一步通过求解多项式 $1 - |\mathbf{F}^H \hat{\mathbf{u}}(\tau)|^2 = 0$ 的根得到 τ 的估计值 $\hat{\tau}$, 从而实现从俯仰向空间角频率 V 的估计 $\hat{V} = 1/2 - \hat{\tau}$ 。

回顾式(18)可知, 在估计得到俯仰向空间频率的估计值 \hat{V} , 即可得到 $\mathbf{B}_2(V)$ 的估计值 $\hat{\mathbf{B}}_2(V) = [\mathbf{b}_2(\hat{V}_1), \mathbf{b}_2(\hat{V}_2), \dots, \mathbf{b}_2(\hat{V}_K)]$, 因此, 只需要通过最小二乘的方法对向量 \mathbf{P} 进行估计, 就可实现对方位向空间频率 H 的估计。由于快拍数有限, 式(18)中会存在一定的残余噪声的影响。因此, 为了进一步降低噪声的影响, 本文通过式(27)的凸优化方程式实现对向量 \mathbf{P} 的估计, 即

$$\begin{aligned} \min & \|\hat{\mathbf{P}}\|_1 \\ \text{s.t.} & \|\hat{\mathbf{y}}_{13} - \hat{\mathbf{B}}_2 \hat{\mathbf{P}}\|_2 \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (27)$$

式中: ε 为噪声能量的约束值。同样利用 CVX 优化工具包对式(27)进行求解, $\{H_k\}_{k=1}^K$ 可计算得到:

$$\hat{H}_k = \lambda \arg(\hat{p}_k) / 2\pi d \quad (28)$$

式中: \hat{p}_k 为 $\hat{\mathbf{P}}$ 的第 k 个元素, $\arg(\cdot)$ 表示求相位函数。由于方位向空间频率 \mathbf{H} 是建立在俯仰向空间频率 \mathbf{V} 的基础之上, 两者之间因为式(18)存在一一对应的关系。

2.3 基于 Capon 方法的频率与空间频率配对

由空间频率的定义可知, 如果能将信号频率与空间频率正确匹配, 则可求解出方位角、俯仰角、信号频率的三维信息。

取(1)式的傅里叶变换, 可得阵列输出信号的频域模型。

$$\mathbf{X}_1(f_k) = \mathbf{A}_1(f_k)\mathbf{s}(f_k) + \mathbf{N}_1(f_k) \quad (29)$$

式中: $\mathbf{X}_1(f_k) \hat{\mathbf{I}} C^{N \times 1}$ 为阵列接收数据经过傅里叶变换在频率 f_k 处的阵列输出向量, $\mathbf{s}(f_k) \in C^{K \times 1}$ 为 K 个信号在频率 f_k 处的输出向量, $\mathbf{N}_1(f_k) \in C^{N \times 1}$ 为噪声在频率 f_k 处的输出向量。

$$\begin{aligned} \text{每个频点 } f_k \text{ 对应的频域协方差矩阵 } \mathbf{R}_{X_1}(f_k) \text{ 为} \\ \mathbf{R}_{X_1}(f_k) = E[\mathbf{X}_1(f_k)\mathbf{X}_1^H(f_k)] \end{aligned} \quad (30)$$

这里借鉴 Capon 波束方法的思想来对俯仰向空间频率 V_k 与频率 f_k 进行配对, 即在归一化期望空间频率上信号功率的同时, 使得阵列输出功率最小, 通过求解式(31)的线性约束方程, 得到最佳权重系数 \mathbf{w} :

$$\min \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{X_1}(f_k) \mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\hat{V}_i) = 1 \quad (31)$$

式中: \hat{V}_i 为 3.2 节中估计得到的俯仰向空间频率。

对于式(31), 其最优权值解为:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{R}_X^{-1}(f_k) \mathbf{a}(\hat{V}_i)}{\mathbf{a}^H(\hat{V}_i) \mathbf{R}_X^{-1}(f_k) \mathbf{a}(\hat{V}_i)} \quad (32)$$

将式(32)代入 $\mathbf{w}^H \mathbf{R}_X(f_k) \mathbf{w}$ 并利用 $\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\hat{V}_i) = 1$, 则配对函数可定义为:

$$\Gamma = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\hat{V}_i) \mathbf{R}_X^{-1}(f_k) \mathbf{a}(\hat{V}_i)} \quad (33)$$

根据 Γ 的谱峰位置得到与信号频率 f_k 相对应的俯

仰向空间频率 \hat{V}_i^k 。

俯仰向空间频率 $\{\hat{V}_i^k\}_{i=1}^K$ 与信号频率 $\{\hat{f}_k\}_{k=1}^K$ 正确匹配后, 根据空间频率的定义得到:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k &= \arccos(c \hat{H}_k / \hat{f}_k), \\ \hat{\beta}_k &= \arccos(c \hat{V}_k / \hat{f}_k), \\ k &= 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (34)$$

最后根据式(7)空间角的定义, 解算出相对应的方位角 $\hat{\theta}_k$ 和俯仰角 $\hat{\phi}_k$:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_k &= \arctan(\cos \hat{\beta}_k / \cos \hat{\alpha}_k), \\ \hat{\phi}_k &= \arcsin(\sqrt{\cos^2 \hat{\alpha}_k + \cos^2 \hat{\beta}_k}), \\ k &= 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (35)$$

2.4 算法性能分析

由式(35)可知, 方位角和俯仰角由空间角计算得到, 空间角的估计精度直接决定了二维 DOA 估计的精度。由式(34)可知, 空间角的估计精度与空间频率和信号频率的估计精度有着直接的关系。

这里, 分析频率估计误差对空间频率估计的影响, 对信号频率 f 求偏导可得:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{df} = \frac{Hc}{f^2 \sqrt{1 - H^2 c^2 / f^2}} \\ \frac{d\beta}{df} = \frac{Vc}{f^2 \sqrt{1 - V^2 c^2 / f^2}} \end{cases} \quad (36)$$

由式(36)可知, 信号频率越高对空间频率估计的影响越小。而本文中信号频率的估计精度主要取决于 FFT 测频精度, 快拍数越大, 则估计精度越高。现有的测频方法在采样时间足够长时, 可以达到很高的精度, 因此, 频率估计误差对估计精度的影响相对较小。现有的信号频率估计方法同样适用于本文提出的三平行稀疏阵列结构, 因此本文中信号频率的估计采用现有的基于 FFT 变换的方法。空间角的估计精度主要受空间频率估计精度的影响, 本文利用全变分范数的优异特性, 在连续空间域实现对空间频率的高精度估计, 有效避免了传统离散稀疏重构方法存在的模型失配的影响, 从而提高估计精度和分辨率。

在计算复杂度方面, 本文方法的计算复杂度主

要体现在连续稀疏重构的求解、Capon 方法配对以及 FFT 等运算过程中, 对于连续稀疏重构其计算复杂度为 $O(2MN)^3$, 一次配对过程的计算复杂度为 $O(L((2M+N)^2+2M+N)+(2M+N)^3)$, FFT 的计算复杂度为 $L/2 \times \log L$ 。本方法总共需要一次连续稀疏重构以及最多 K 次配对过程, 因此, 总的计算复杂度近似为 $O(2MN)^3 + K(L((2M+N)^2+2M+N)+(2M+N)^3) + L/2 \times \log L$ 。而对于文献[4]的方法, 假设其完备字典的长度为 N_s , 其计算复杂度主要体现在稀疏分解、空域滤波以及 FFT 等运算过程中, 其计算复杂度为 $o(K \times ((N_s^3 \times \log N_s + (2M+N)^3) + L/2 \times \log L))$ 。可以看出信号个数以及完备字典长度对文献[4]方法的计算复杂度影响较大。

在阵列的系统复杂度方面, 本文设计的三平行稀疏阵列, 经过向量化处理后, 可得到一个包含有 $2MN-1$ 个虚拟阵元的均匀线阵, 而对于 L 均匀阵列, 其不易进行虚拟阵列扩展。因此, 三平行阵列能够提供更多的阵列自由度。

3 仿真实验及性能分析

本节将通过仿真实验对本文方法的估计性能进行分析, 讨论各因素对本文方法估计性能的影响, 并与文献[4]提出的 CS-FDOA 方法进行比较。本文方法采用 $M=4, N=4$, 阵元数为 12, 阵元间距 $d=1$ m, 的三平行稀疏阵列作为接收阵列, CS-FDOA 方法采用相同阵元数的 L 型均匀阵列。以均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)作为衡量算法性能的指标。RMSE 定义为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{KP} \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^K ((\hat{\gamma}_k^v - \gamma_k)^2)} \quad (37)$$

式中: P 表示蒙特卡罗实验次数, $\hat{\gamma}_k^v$ 表示 θ_k 或 ϕ_k 的第 v 次蒙特卡罗实验估计值, r_k 表示 θ_k 或 ϕ_k 的真实值。

实验 1 为验证本文方法处理宽频段二维欠定 DOA 估计问题的能力。假设 13 个不同频率的窄带信号入射到阵列上, 波达方向分别为 $(-80^\circ, 50^\circ)$, $(-60^\circ, 70^\circ)$, $(-75^\circ, 10^\circ)$, $(-45^\circ, 50^\circ)$, $(-40^\circ,$

$85^\circ)$, $(-25^\circ, 20^\circ)$, $(-20^\circ, 60^\circ)$, $(10^\circ, 50^\circ)$, $(20^\circ, 5^\circ)$, $(35^\circ, 40^\circ)$, $(75^\circ, 25^\circ)$, $(70^\circ, 60^\circ)$, $(85^\circ, 35^\circ)$ 。信号频率分别为 $[180, 150, 165, 160, 155, 130, 125, 100, 90, 80, 105, 75, 170]$ MHz。相对应的方位向空间频率 H 为 $[0.0798, 0.2349, 0.0247, 0.2889, 0.3943, 0.1343, 0.3391, 0.2515, 0.0246, 0.1401, 0.0383, 0.0740, 0.0283]$, 俯仰向的空间频率 V 为 $[-0.4526, -0.4069, -0.0923, -0.2889, -0.3308, -0.0626, -0.1234, 0.0443, 0.009, 0.0983, 0.1429, 0.2034, 0.3238]$ 。信噪比 $\text{SNR}=10$ dB, 快拍数 $L=2048$ 。空间频率和信号频率的估计值如表 1 所示, 二维 DOA 的估计结果如图 2 和表 2 所示。

表 1 空间频率和信号频率估计值
Tab. 1 Estimation values of spatial frequency and signal frequency

目标	H	V	f/MHz	\hat{H}	\hat{V}	\hat{f}/MHz
1	0.0798	-0.4526	180	0.0776	-0.4526	179.82
2	0.2349	-0.4069	150	0.2467	-0.4067	149.77
3	0.0247	-0.0923	165	0.0292	-0.0868	165.06
4	0.2889	-0.2889	160	0.2894	-0.2886	159.79
5	0.3943	-0.3308	155	0.3938	-0.3308	155.04
6	0.1343	-0.0626	130	0.1397	-0.0600	130.25
7	0.3391	-0.1234	125	0.3246	-0.1256	124.98
8	0.2515	0.0443	100	0.2467	0.0438	100.20
9	0.0246	0.0089	90	0.0388	0.0096	90.18
10	0.1401	0.0983	80	0.1397	0.0983	80.16
11	0.0383	0.1429	105	0.0388	0.1426	104.94
12	0.0740	0.2034	75	0.0667	0.2039	74.88
13	0.0283	0.3238	170	0.0292	0.3240	169.80

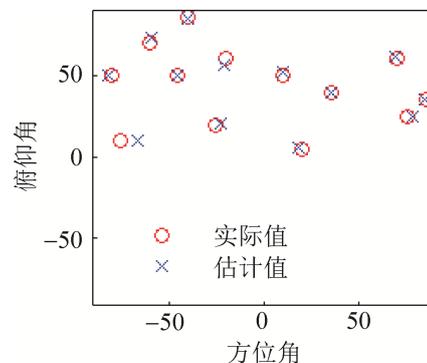


图 2 二维 DOA 估计结果
Fig. 2 2D DOA estimation results

表 2 二维 DOA 估计值
Tab. 2 Estimation values of 2D value

目标	θ°	ϕ°	$\hat{\theta}^\circ$	$\hat{\phi}^\circ$
1	-80	50	-81.619 8	52.388 7
2	-60	70	-58.763 8	72.324 8
3	-75	10	-65.922 1	9.950 5
4	-45	50	-44.916 6	50.122 4
5	-40	85	-40.029 6	84.384 7
6	-25	20	-22.806	20.886 6
7	-20	60	-21.105 8	60.923 9
8	10	50	9.529 2	52.388 7
9	20	5	18.210 6	5.865 7
10	35	40	35.128 9	49.748 9
11	75	25	77.652 5	24.664 8
12	70	60	69.174 5	60.923 9
13	85	35	84.415 0	35.110 3

当入射信号的个数多于阵元数时,由表 1 的实验结果可知,通过利用基于全变分范数的方法得到了俯仰向空间频率的高精度估计有效避免了传统稀疏重构中存在的模型失配问题对估计性能的影响平均估计误差为 0.000 4,采用基于凸优化的方法实现了对方位向空间频率的估计能够有效避免数据中残余噪声对估计性能的影响,平均误差为 0.001 5 以及通过 FFT 变换得到信号频率的高精度估计,信号频率的平均估计误差为 0.010 5 MHz,再通过 capon 方法实现了空间频率和信号频率之间的准确配对,实验结果如图 2 和表 2 所示,方位角和俯仰角的平均误差分别为 0.82° 和 0.21° 。仿真实验结果验证了本文方法能够准确对宽频段范围内的频率不同的多个信号进行频率和二维 DOA 估计。

实验 2 由空间频率的定义可知,空间频率的估计精度直接影响着空间角的估计精度,进而影响到方位角和俯仰角的估计精度,因此,要得到高精度的二维 DOA 估计就必须对空间频率具有较高的分辨能力。为了验证本文方法的分辨能力,假设两个相近的入射信号,波达方向分别为 $(30^\circ, 60^\circ)$, $(33^\circ, 60^\circ)$, 中心频率分别为 180 MHz 和 170 MHz,信噪比 SNR=10 dB,快拍数 $L=200$ 。对应的俯仰向空间频率分别为 0.259 8 和 0.267 3。图 3 为本文方法与 CS-FDOA 方法的估计结果比较。图 4 为不

同空间频率间隔下空间频率估计均方根误差比较。

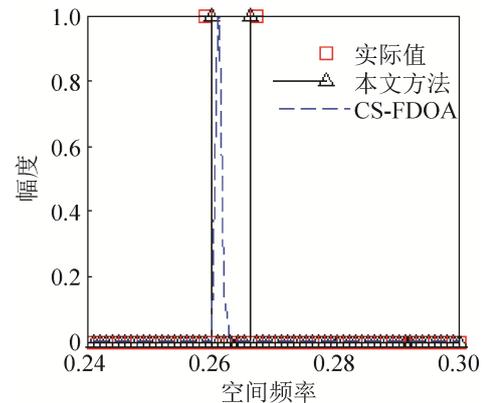


图 3 空间频率性能比较

Fig. 3 Space frequency performance comparison

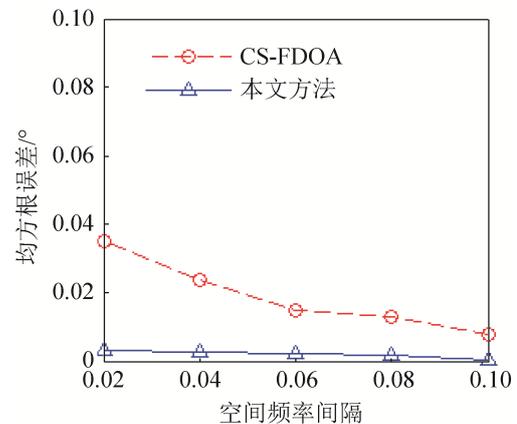


图 4 不同间隔下均方根估计误差

Fig. 4 RMSE versus different space frequency intervals

由图 3 的实验结果可知,在空间频率相近时,本文方法的分辨性能要优于 CS-FDOA 方法,同时由图 4 的实验结果可知,本文方法相对于 CS-FDOA 方法具有更高的估计精度,尤其是在空间频率间隔较小时优势更加明显。这是因为本文方法对阵列自由进行了提升,同时在对空间频率估计过程中避免了模型失配问题对估计性能的影响,因此提高了估计精度和分辨力。

实验 3 为验证本文方法的估计精度与信噪比之间的关系,选取两个中心频率分别为 100 MHz 和 180 MHz 的入射信号,入射角度分别为 $(70^\circ, 60^\circ)$, $(85^\circ, 35^\circ)$,快拍数 $L=1024$,信噪比 SNR=5~15 dB,步长为 5 dB,每个信噪比条件下

进行 100 次蒙特卡罗实验, 图 5 为本文方法和 CS-FDOA 方法的方位角和俯仰角均方根误差比较。

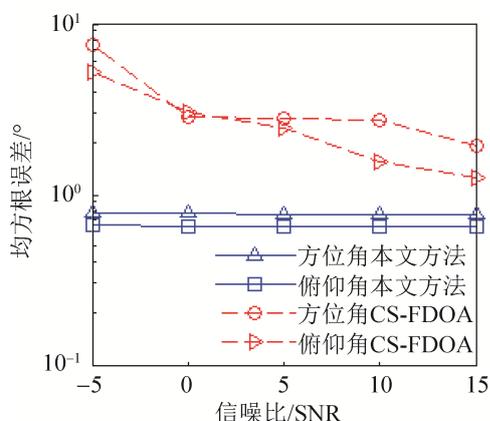


图 5 均方根误差随信噪比变化曲线
Fig. 5 RMSE versus different SNRs

由图 5 的实验结果可知, CS-FDOA 方法的均方根误差随着信噪比的增加而减少, 而本文方法的均方根误差此时处于一个相对稳定的值, 方位角均方根误差为 0.7° , 俯仰角均方根误差为 0.6° 。本文方法的估计精度明显要高于 CS-FDOA 方法, 尤其是在低信噪比条件下优势更加明显。

实验 4 两种方法的时效性比较, 实验条件与实验 1 相同, 仿真环境: MATLAB 8.1 平台, 英特尔 i7 处理器, 软件操作界面如图 6 所示。分析两种方法的运算时间与入射信号个数之间的关系, 具体实验结果如图 7 所示。

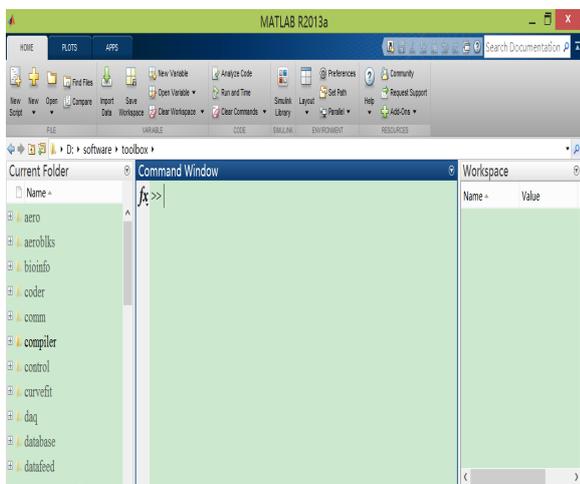


图 6 软件操作界面
Fig. 6 Software operation interface

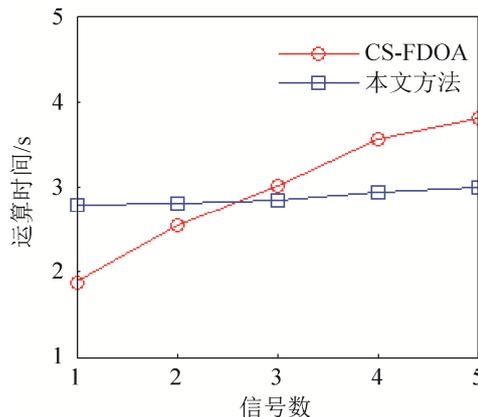


图 7 运算时间与信号数之间的关系
Fig. 7 Runtime with the number of signals

由图 7 的实验结果可知, CS-FDOA 方法的运算时间随着信号数的增加呈现一个快速增长的趋势, 而本文方法的运算时间随信号数的增加增长比较缓慢。当信号个数大于 3 时, 本文方法的运算时间要小于 CS-FDOA 方法。

4 结论

在现代复杂电子战信号环境中, 对宽频段范围内的多个窄带信号进行二维 DOA 和频率估计具有重要的现实意义。本文结合三平行稀疏阵列的结构优势, 提出一种基于连续稀疏重构的宽频段欠定二维 DOA 估计方法。该方法利用空间频率的定义将信号的方位角、俯仰角以及频率的三维信息转化为一维空间频率信息进行估计, 极大降低了求解的复杂度, 同时对互协方差矩阵向量化, 实现阵列自由度的提升; 然后利用全变分范数对空间频率的稀疏性进行约束, 通过求解全变分范数最小化问题实现在连续空间频率域对空间频率的高精度估计, 有效避免了传统稀疏重构算法中存在的模型失配问题对估计性能的影响; 最后利用 Capon 方法实现各参数之间的配对。仿真结果验证了本文方法具有较高的估计精度和分辨性能。

参考文献:

- [1] Strobach P. Total least squares phased averaging and 3-D ESPRIT for joint azimuth-elevation carrier estimation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing (S1053-587X),

- 2001, 49(1): 54-62.
- [2] 杜刚, 张永顺, 王永良, 等. 基于四阶累积量的相干信号频率和二维到达角联合估计的新算法[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(2): 327-330.
Du Gang, Zhang Yongshun, Wang Yongliang, et al. A new method for joint estimation of frequency and 2D arrival angles of coherent signals based on fourth order cumulant[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2009, 31(2): 327-330.
- [3] 许凌云, 张小飞, 许宗泽. 基于平行因子四线性分解的二维角度和频率联合估计[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(8): 1889-1894.
Xu Lingyun, Zhang Xiaofei, Xu Zongze. Joint 2D angle and frequency estimation method based on parallel factor quadrilinear decomposition [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2011, 33(8): 1889-1894.
- [4] 沈志博, 董春曦, 黄龙, 等. 基于压缩感知的宽频段二维 DOA 估计算法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(12): 2935-2941.
Shen Zhibo, Dong Chunxi, Huang Long, et al. Broadband 2-D estimation based on compressed sensing [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2014, 36(12): 2935-2941.
- [5] Herman M, Strohmer T. General deviants: an analysis of perturbations in compressive sensing [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing (S1932-4553), 2010, 4(2): 342-349.
- [6] Piya P, P Vaidyanathan P. Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom [J]. IEEE Transaction on signal processing (S1053-587X), 2010, 58(8): 4167-4181.
- [7] P Vaidyanathan P, Piya P. Sparse sensing with co-prime samplers and array [J]. IEEE Transaction on Signal processing (S1053-587), 2011, 59(2): 573-586.
- [8] Weng Z, Djurić P M. A search-free DOA estimation algorithm for coprime arrays [J]. Digital Signal Processing(S1051-2004), 2014, 24: 27-33.
- [9] Pourya A, Saeid R. DOA estimation in coformal arrays based on the nested array principles [J]. Digital Signal Processing (S1051-2004), 2016, 50(c): 191-202.
- [10] Qin Sin, Zhang Y D and Amin M G. Generalized coprime array configurations for direction-of-arrival estimation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing (S1053-587X), 2015, 63(6): 1377-1390.
- [11] He Zhenqing, Shi Zhiping and Huang Lei, *et al.* Underdetermined DOA estimation for wideband signals using robust sparse covariance fitting [J]. IEEE Signal Processing Letters (S1070-9908), 2015, 22(4): 435-439.
- [12] ZHANG Tan, Nehorai A. Sparse direction of arrival estimation using co-prime arrays with off-grid targets [J]. IEEE Signal Processing Letters (S1070-9908), 2014, 21(1): 26-29.
- [13] He Zhenqing, Shi Zhiping and Huang Lei. Covariance sparsity-aware DOA estimation for nonuniform noise [J]. Digital Signal Processing (S1051-2004), 2014, 28(1): 75-81.
- [14] Piya P, P. Vaidyanathan P. Pushing the Limits of Sparse Support Recovery Using Correlation Information [J]. IEEE Transactions on Signal Processing (S1053-587X), 2015, 63(3): 711-726.
- [15] Candès E J, Fernandez-Granda C. Super-resolution from noisy data [J]. Journal of Fourier Analysis and Applications (S1069-5869 X), 2013, 19(6): 1229-1254.
- [16] Candès E J, Fernandez Granda C. Towards a Mathematical Theory of Super resolution [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics (S0010-3640), 2014, 67(6): 906-956.
- [17] GRANT M, BOYS S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming [EB/OL].(2012) http://cvxr.com/cvx_