

1-4-2019

Modeling and Simulation of Missile Defense M/M/N Queueing System

Longyue Li

Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China;

Fuxian Liu

Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China;

Huizhen Zhao

Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Modeling and Simulation of Missile Defense M/M/N Queueing System

Abstract

Abstract: To simulate the process of ballistic missile defense and to study the effectiveness of defense, *the M/M/N queueing system of missile defense was modeled and simulated*. A queueing modeling framework was given to explain the meaning and distribution of related parameters. *The M/M/N/N and M/M/N/C queueing models were proposed for short defense depth and long defense depth respectively, and the single target channel and the multiple target channels were distinguished in each model*. How to deal with the different types of missile defense system based on equivalent replacement method were also considered. Simulation examples verified the main functions and the effectiveness of proposed queueing model which is helpful to understand the rules of missile defense process, and to provide optimal configuration suggestions for defense decision-making.

Keywords

ballistic missile defense, defense efficiency, M/M/N, queueing model

Recommended Citation

Li Longyue, Liu Fuxian, Zhao Huizhen. Modeling and Simulation of Missile Defense M/M/N Queueing System[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(4): 1260-1271.

弹道导弹防御 M/M/N 排队系统建模与仿真

李龙跃, 刘付显, 赵慧珍

(空军工程大学防空反导学院, 陕西 西安 710051)

摘要: 为了模拟弹道导弹防御过程和研究反导系统防御效能, 进行了导弹防御 M/M/N 排队系统建模与仿真研究。给出排队系统建模框架, 阐述了相关参数的含义和分布, 针对小防御纵深和大防御纵深分别建立了 M/M/N/N 和 M/M/N/C 排队模型, 模型具体区分了单目标通道和多目标通道两种情况, 基于等效替换法给出了反导系统有多个类型时的处理方法, 仿真实例具体分析和验证了排队模型的主要功能和有效性。研究成果可以辅助对反导系统运行情况进行掌握和规律总结, 为防御决策提供优化配置建议。

关键词: 弹道导弹防御; 防御效率; M/M/N; 排队模型

中图分类号: E917 文献标识码: A 文章编号: 1004-731X (2018) 04-1260-12

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201804007

Modeling and Simulation of Missile Defense M/M/N Queueing System

Li Longyue, Liu Fuxian, Zhao Huizhen

(Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: To simulate the process of ballistic missile defense and to study the effectiveness of defense, the M/M/N queueing system of missile defense was modeled and simulated. A queueing modeling framework was given to explain the meaning and distribution of related parameters. The M/M/N/N and M/M/N/C queueing models were proposed for short defense depth and long defense depth respectively, and the single target channel and the multiple target channels were distinguished in each model. How to deal with the different types of missile defense system based on equivalent replacement method were also considered. Simulation examples verified the main functions and the effectiveness of proposed queueing model which is helpful to understand the rules of missile defense process, and to provide optimal configuration suggestions for defense decision-making.

Keywords: ballistic missile defense; defense efficiency; M/M/N; queueing model

引言¹

有关弹道导弹防御过程模拟和防御效能研究的常用方法有数学规划法^[1]、概率计算法^[2]、系统仿真法^[3]等。排队论是研究随机服务系统的数

学理论和方法, 由 Erlang K A^[4]提出, 当前在各个领域中有着广泛应用, 如资源分配^[5], 交通规划^[6-7], 通信规划^[8]等。同样, 排队论在军事领域有着广泛应用, 可以科学地解决兵力部署、武器配置和服务保障等问题^[9-12], 使武器充分发挥作战能力。

用 M/M/N 排队系统模拟导弹防御系统运行过程是可行的, 原因在于: 1) 目标到达虽不完全符合泊松流条件, 但仍可近似看作最简单流, 因为最简单流虽然数学处理简单, 但防御系统最难对付,



收稿日期: 2016-04-28 修回日期: 2016-06-26;
基金项目: 国家自然科学基金(71701209, 71771216);
作者简介: 李龙跃(1988-), 男, 河南驻马店, 博士, 讲师, 研究方向为作战建模与仿真; 刘付显(1962-), 男, 山东曹县, 博士, 教授, 研究方向为作战建模与仿真、指挥决策优化。

<http://www.china-simulation.com>

• 1260 •

代表最差的情况(worst case scenario); 2) 弹道导弹有相对固定的、可预测的飞行轨迹, 尽管有的具备有限机动能力, 但对本文研究影响不大; 3) 目标来袭方向、战术安排、技术特性等原因, 使拦截过程具有一定的泊松特性, 且目标到达时间间隔有一定随机性, 可以看成一队等待被服务的顾客; 4) 防御系统的目标通道数量是有限的, 对目标的可射击时间是有限的, 目标到达时, 若发现所有目标通道均被占用(不空闲)时, 则目标直接突防成功, 以上可类比为排队论中的服务台个数和排队规则。综上, M/M/N 排队系统可研究导弹防御系统的性能、组织和运行效率, 总结防御过程的规律, 为防御决策提供参考依据。

1 建模框架

目标到达过程是指目标按照什么样的规律到达, 本文设定目标到达过程服从参数为 λ 的泊松分布, 也称最简单流, 即

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, t > 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

式中: $P_n(t)$ 表示时间 t 内 n 个目标来袭的概率, 其中 $E[N(t)] = \lambda t$, $Var[N(t)] = \lambda t$, λ 可理解为目标的到达强度^[13]。设目标到达时间间隔为随机变量 T 服从参数为 λ 的负指数分布, 其概率密度函数和分布函数分别为

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

负指数分布具有无记忆性, 说明目标的到达是随机的。当目标到达过程是泊松流时, 则到达的间隔时间 T 必然服从负指数分布; 反之, 若目标到达时间间隔是负指数分布, 则目标流是泊松流。设对目标的射击时间为随机变量 s 服从参数为 μ 的负指数分布, 且 s 的概率密度函数和分布函数分别为

$$f_s(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, F_s(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

式中: $\mu = 1/t_{smean}$, t_{smean} 为对目标的平均射击时间, 取决于防御系统的反应时间和拦截弹飞到预设遭

遇点的时间, 与目标参数和反导系统性能有关。令 $\rho = \lambda/\mu$ 表示同一时间段内目标到达的平均数与被射击的平均数之比, 则 $\rho(\rho < 1)$ 可理解为射击密度(shoot intensity)。同理, 设目标在发射区的停留时间为随机变量 w 服从参数为 ν 的负指数分布, 且 w 的概率密度函数和分布函数分别为

$$f_w(t) = \begin{cases} \nu e^{-\nu t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, F_w(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\nu t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

式中: $\mu = 1/t_{wmean}$, t_{wmean} 为对目标在发射区的平均停留时间。

射击规则是指到达的目标按照怎样的规则排队等待射击。本文射击规则分为 2 种: (1) 损失制(消失制): 目标到达时, 若发现所有反导系统目标通道均被占用(不空闲)时, 则目标直接突防成功。(2) 混合制: 这是一种介于损失制和等待制之间的射击规则, 部分目标不被射击直接突防, 一般包括以下情况: 1) 反导系统的可容纳队长有限制; 2) 反导系统的可射击时间(目标等待时间)有限制。本文用防御纵深来区分是采用损失制还是混合制排队系统, 设定“小防御纵深”的射击规则为损失制, “大防御纵深”的排队规则为混合制。“小防御纵深”表示对目标的射击时间大于目标的等待时间; “大防御纵深”表示对目标的射击时间小于目标的等待时间, 表明反导系统至少有 1 个通道可以腾空用来杀伤目标, 如图 1 所示。

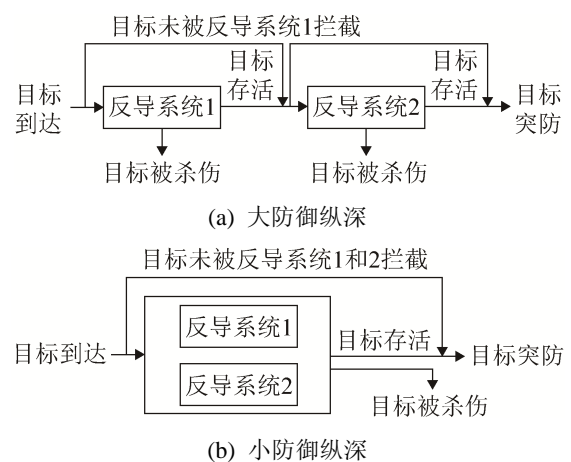


图1 大防御纵深与小防御纵深示意图
Fig.1 Long defense depth and short defense depth

此外，本文基于 Kendall 符号表示法选取 4 个特征 X/Y/Z/A 来描述排队系统，其意义分别为：目标到达间隔时间的分布/射击时间的分布/系统目标通道数量/目标容量，M 表示负指数分布，具有 Markov 性。

2 小防御纵深 M/M/N 系统

2.1 多目标通道 M/M/N/N 系统

由第 1 节可知小防御纵深可以看成不等待的随机服务系统，即损失制排队系统。已知排队系统内目标通道数量(目标容量)为 n ，即同一时间被射击的目标不能超过 n 个，令目标被雷达发现的概率为 P_f 。当防线为小防御纵深时，目标到达时若所有目标通道被占用，则直接突防成功。系统可能的状态为 S_0 : n 个目标通道空闲，系统内没有目标； S_1 : 1 个目标通道繁忙，系统内有 1 个目标；……； S_k : k 个目标通道繁忙，系统内有 k 个目标；……； S_n : n 个目标通道繁忙，系统内有 n 个目标。状态转移如图 2 所示。

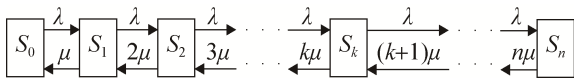


图 2 损失制系统状态转移图

Fig.2 State transition diagram of loss queueing system

图 2 中箭头→表示目标流，强度为 λ ， S_k 表示 k 个目标通道繁忙，当有新目标到达时状态转移到 S_{k+1} 。箭头←表示射击流^[14]，当对目标射击完毕，若状态由 S_1 转移到 S_0 ，强度为 μ ；若状态由 S_2 转移到 S_1 ，则强度为 2μ ；以此类推，若有 k 个目标占用 k 个通道时，则强度为 $k\mu$ 。由于系统的状态数量是有限的，因此极限概率存在，根据状态平衡原理可得

S_0 : n 个目标通道空闲，系统没有目标：

$$\lambda S_0 = \mu S_1 \Rightarrow S_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) S_0 = \rho S_0$$

S_1 : 1 个目标通道繁忙，系统有 1 个目标：

$$\lambda S_1 = 2\mu S_2 \Rightarrow S_2 = \left(\frac{\rho^2}{2!}\right) S_0$$

S_2 : 2 个目标通道繁忙，系统有 2 个目标：

$$\lambda S_2 = 2\mu S_3 \Rightarrow S_3 = \left(\frac{\rho^3}{3!}\right) S_0$$

……

S_{k-1} : $k-1$ 个目标通道繁忙，系统有 $k-1$ 个目标：

$$\lambda S_{k-1} = k\mu S_k \Rightarrow S_k = \left(\frac{\rho^k}{k!}\right) S_0$$

S_{n-1} : $n-1$ 个目标通道繁忙，系统有 $n-1$ 个目标：

$$\lambda S_{n-1} = n\mu S_n \Rightarrow S_n = \left(\frac{\rho^n}{n!}\right) S_0$$

由于目标被雷达发现的概率为 P_f ，可知

$$\rho_f = \rho \cdot P_f = P_f \cdot (\lambda/\mu) = P_f \cdot \lambda \cdot t_{smean}$$

则 ρ_f 可理解为平均射击时间内，被发现到达目

标的平均数量。由于 $S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_n = 1$ ，则

$$S_0 = \left(1 + \rho_f + \frac{\rho_f^2}{2!} + \dots + \frac{\rho_f^k}{k!} + \dots + \frac{\rho_f^n}{n!}\right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_f^k}{k!}\right)^{-1}$$

现基于 S_0 可得系统运行指标：1) 目标损失(突防)概率 P_{lost} ：

$$P_{lost} = S_n = \left(\frac{\rho_f^n}{n!}\right) S_0 = \left(\frac{\rho_f^n}{n!}\right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_f^k}{k!}\right)^{-1}$$

2) 目标被射击的相对概率 P_{shoot} ：

$$P_{shoot} = 1 - P_{lost} = 1 - \left(\frac{\rho_f^n}{n!}\right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_f^k}{k!}\right)^{-1}$$

3) 目标被射击的绝对概率 P'_{shoot} ：

$$P'_{shoot} = \lambda P_{shoot} = \lambda \left(1 - \left(\frac{\rho_f^n}{n!}\right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_f^k}{k!}\right)^{-1}\right)$$

4) 占用目标通道的平均数 \bar{Z} ：

$$\bar{Z} = 0 \cdot S_0 + 1 \cdot S_1 + \dots + n \cdot S_n = \sum_{k=0}^n k \left(\frac{\rho_f^k}{k!}\right) S_0 =$$

$$\rho_f S_0 \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_f^k}{k!} - \frac{\rho_f^n}{n!}\right) = \rho_f \left(1 - \frac{\rho_f^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_f^k}{k!}\right)^{-1}\right)$$

则目标通道的平均占用率为 $\eta = \bar{Z}/n$ 。

2.2 单目标通道 M/M/1/1 系统

单目标通道可以看成 2.1 节多目标通道的特殊情况, 在 $n=1$ 时取得

$$S_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_f^k}{k!} \right)^{-1} \Big|_{n=1} = \frac{1}{1 + \rho_f}$$

系统运行指标: 1) 目标损失(突防)概率 P_{lost} :

$$P_{lost} = S_n = \left(\frac{\rho_f^n}{n!} \right) S_0 = \frac{\rho_f}{1 + \rho_f}$$

2) 目标被射击的相对概率 P_{shoot} :

$$P_{shoot} = 1 - P_{lost} = 1 - \frac{\rho_f}{1 + \rho_f} = \frac{1}{1 + \rho_f}$$

3) 目标被射击的绝对概率 P'_{shoot} :

$$P'_{shoot} = \lambda P_{shoot} = \frac{\lambda}{1 + \rho_f}$$

综上, 弹道导弹防御效率(Defense Efficiency, DE)可定义为目标受到射击的概率与拦截弹单发杀伤概率 P_k 之积, 即

$$E = P_{shoot} \cdot P_k = (1 - P_{lost}) \cdot P_k$$

3 大防御纵深 M/M/N/C 系统

由第 1 节可知大防御纵深可看成有限等待时间的随机服务系统, 即混合制排队系统。对于混合制排队系统, 以往大多研究是队长有限的情况, 与导弹防御作战过程不太相符。对每个来袭目标, 防御系统都采用空闲目标通道对其射击, 否则目标等待被射击, 在等待时间(目标在发射区停留时间)内, 目标如果未被射击, 则其直接突防成功, 因此本文采用的是等待时间有限的混合制排队系统^[15]。系统可能的状态为 S_0 : 所有目标通道空闲, 系统内没有目标; S_1 : 1 个目标通道繁忙, 其余目标通道空闲, 系统内有 1 个目标;; S_k : k 个目标通道繁忙, 其余目标通道空闲, 系统内有 $k-1$ 个目标;; S_n : 所有目标通道繁忙, 无目标通道空闲, 系统内有 n 个目标; S_{n+1} : 所有目标通道繁忙, 无目标通道空闲, 系统内有 1 个目标等待被射

击;; S_{n+s} : 所有目标通道繁忙, 无目标通道空闲, 系统内有 s 个目标等待被射击;。状态转移如图 3 所示。

图 3 中箭头 \rightarrow 表示目标流, 在强度为 λ 的目标流下, 系统由较低状态转移到较高状态。箭头 \leftarrow 表示射击流, 在强度为 $k\mu$ 的射击流下, 当 $k \leq n$ 时, 系统由较高状态转移到较低状态; 当 $k > n$ 时, 强度为 $k\mu$ 的射击流要加上超过等待时间而突防成功的, 强度为 $s\nu$ 的请求流。根据状态平衡原理, 可得方程组(1), 方程组(1)的约束条件为 $\sum_{i=0}^{\infty} S_i = 1$ 。

令 $\rho = \lambda/\mu$ 表示在平均射击时间内, 到达的目标平均数量; $\vartheta = \nu/\mu$ 表示在平均射击时间内, 因超过发射区停留时间, 而突防的目标平均数量; 此时方程组(1)可写成方程组(2)

$$\left. \begin{aligned} S_0 & \left\{ \begin{aligned} 0 &= -\lambda S_0 + \mu S_1 \\ S_1 & \left\{ \begin{aligned} 0 &= \lambda S_0 - (\lambda + \mu) S_1 + 2\mu S_2 \\ \dots & \dots \\ S_k & \left\{ \begin{aligned} 0 &= \lambda S_{k-1} - (\lambda + k\mu) S_k + (k+1)\mu S_{k+1} \\ \dots & \dots \\ S_n & \left\{ \begin{aligned} 0 &= \lambda S_{n-1} - (\lambda + n\mu) S_n + (n\mu + \nu) S_{n+1} \\ S_{n+1} & \left\{ \begin{aligned} 0 &= \lambda S_n - (\lambda + n\mu + \nu) S_{n+1} + (n\mu + 2\nu) S_{n+2} \\ \dots & \dots \\ S_{n+s} & \left\{ \begin{aligned} 0 &= \lambda S_{n+s-1} - (\lambda + n\mu + \nu) S_{n+s} + (n\mu + (s+1)\nu) S_{n+s+1} \\ \dots & \dots \end{aligned} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \quad (1) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} S_0 & \left\{ \begin{aligned} 0 &= -\rho S_0 + S_1 \\ S_1 & \left\{ \begin{aligned} 0 &= \rho S_0 - (\rho + 1) S_1 + 2S_2 \\ \dots & \dots \\ S_k & \left\{ \begin{aligned} 0 &= \rho S_{k-1} - (\rho + k) S_k + (k+1) S_{k+1} \\ \dots & \dots \\ S_n & \left\{ \begin{aligned} 0 &= \rho S_{n-1} - (\rho + n) S_n + (n + \vartheta) S_{n+1} \\ S_{n+1} & \left\{ \begin{aligned} 0 &= \rho S_n - (\rho + n + \vartheta) S_{n+1} + (n + 2\vartheta) S_{n+2} \\ \dots & \dots \\ S_{n+s} & \left\{ \begin{aligned} 0 &= \rho S_{n+s-1} - (\rho + n + \vartheta) S_{n+s} + (n + (s+1)\vartheta) S_{n+s+1} \\ \dots & \dots \end{aligned} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \quad (2) \end{aligned}$$

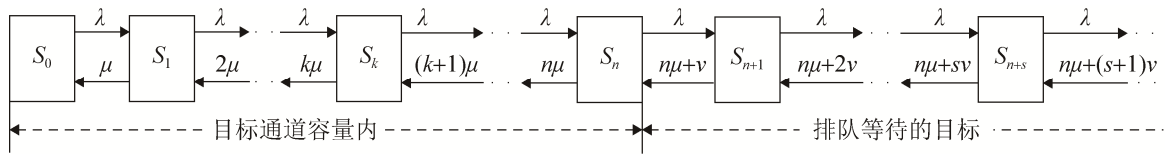


图3 等待时间有限的混合制系统状态转移图

Fig.3 State transition diagram of hybrid queuing system with limited waiting time

方程组(2) 的约束条件为 $\sum_{i=0}^{\infty} S_i = 1$ 。

当 $k \leq n$ 时, 比较容易求解方程组(2)(前 n 项)

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) S_0 = \rho S_0 = \frac{\rho^1}{1!} S_0 \\
 S_2 &= \frac{1}{2}((\rho+1)S_1 - \rho S_0) = \\
 &\quad \frac{1}{2}(\rho S_1 + S_1 - \rho S_0) = \frac{\rho^2}{2!} S_0 \\
 &\dots\dots \\
 S_n &= \frac{\rho}{n} S_{n-1} = \frac{\rho^n}{n!} S_0 \tag{3}
 \end{aligned}$$

当 $k > n$ 时, 从方程组(2)可得

$$\begin{aligned}
 S_{n+1} &= \frac{1}{n+\vartheta}((\rho+n)S_n - \rho S_{n-1}) = \\
 &\quad \frac{1}{n+\vartheta}(\rho S_n + \rho S_{n-1} - \rho S_{n-1}) = \\
 &\quad \frac{\rho}{n+\vartheta} S_n = \frac{\rho}{n+\vartheta} \frac{\rho^n}{n!} S_0 = \frac{\rho^n}{n!} \frac{\rho}{n+\vartheta} S_0 \\
 S_{n+2} &= \frac{1}{n+2\vartheta}((\rho+(\rho+\vartheta))S_{n+1} - \rho S_n) = \\
 &\quad \frac{1}{n+2\vartheta}(\rho S_{n+1} + \rho S_n - \rho S_n) = \frac{\rho}{n+2\vartheta} S_{n+1} = \\
 &\quad \frac{\rho^n}{n!} \frac{\rho^2}{(n+\vartheta)(n+2\vartheta)} S_0 \\
 &\dots\dots \\
 S_{n+s} &= \frac{\rho}{n+s\vartheta} S_{n+s-1} = \frac{\rho^n}{n!} \frac{\rho^s}{\prod_{m=1}^s (n+m\vartheta)} S_0 \tag{4}
 \end{aligned}$$

其中式(4)的约束条件为

$$\sum_{m=0}^n S_m + \sum_{s=1}^{\infty} S_{m+s} = 1 \tag{5}$$

将式(3)、式(4)代入式(5)可得

$$\begin{aligned}
 1 &= S_0 \left(\sum_{m=0}^n \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\rho^s \left(\prod_{m=1}^s (n+m\vartheta) \right)^{-1} \right) \right) \\
 S_0 &= \left(\sum_{m=0}^n \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\rho^s \left(\prod_{m=1}^s (n+m\vartheta) \right)^{-1} \right) \right)^{-1} \tag{6}
 \end{aligned}$$

将式(6)代入式(4)可得推导出稳态概率

$$\begin{aligned}
 S_k &= \frac{\rho^k}{k!} \left(\sum_{m=0}^n \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\rho^s \left(\prod_{m=1}^s (n+m\vartheta) \right)^{-1} \right) \right)^{-1} \\
 S_{n+s} &= \left(\frac{\rho^n}{n!} \left(\rho^s \left(\prod_{m=1}^s (n+m\vartheta) \right)^{-1} \right) \right) \left(\sum_{m=0}^n \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\rho^s \left(\prod_{m=1}^s (n+m\vartheta) \right)^{-1} \right) \right)^{-1} \tag{7}
 \end{aligned}$$

其中 $0 \leq k \leq n, s \geq 1$ 。当目标在发射区停留时间较短时, 反导系统来不及腾出目标通道进行射击, 则目标直接突防成功。系统运行指标为:

1) 目标损失(突防)概率 P_{lost} : P_{lost} 是等待目标不被射击而突防成功的概率, 为单位时间内突防目标平均数量与到达目标平均数量的比值, 当系统中平均有 s 个目标等待被射击时

$$\begin{aligned}
 P_{lost} &= \frac{v}{\lambda} \sum_{s=1}^{\infty} s S_{n+s} = \frac{v/\mu}{\lambda/\mu} \sum_{s=1}^{\infty} s S_{n+s} = \frac{\vartheta}{\rho} \sum_{s=1}^{\infty} s S_{n+s} = \\
 &\quad \frac{\vartheta}{\rho} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s \frac{\rho^n}{n!} \left(\rho^s \left(\prod_{m=1}^s (n+m\vartheta) \right)^{-1} \right)}{\sum_{m=0}^n \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\rho^s \left(\prod_{m=1}^s (n+m\vartheta) \right)^{-1} \right)}
 \end{aligned}$$

2) 目标被射击的相对概率 P_{shoot} :

$$P_{shoot} = 1 - P_{lost}$$

3) 目标被射击的绝对概率 P'_{shoot} :

$$P'_{shoot} = \lambda P_{shoot}$$

4) 占用目标通道的平均数 \bar{Z} :

$$\bar{Z} = \sum_{k=1}^n k S_k + \sum_{s=1}^{\infty} n S_{n+s} = \sum_{k=1}^n k S_k + n \sum_{s=1}^{\infty} S_{n+s} \text{ 或}$$

$$\bar{Z} = \frac{\lambda P_{shoot}}{\mu} = \rho P_{shoot}$$

则目标通道的平均占用率为 $\eta = \frac{\rho P_{shoot}}{n}$ 。

5) 系统中的平均队长和目标的平均等待时间:

$$L_s = \frac{\rho}{g} P_{lost} = \frac{\rho}{g} (1 - P_{shoot})$$

$$t_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{v} P_{lost} = t_{wmean} P_{lost}$$

综上, 防御效率 DE 可定义为目标受到射击的概率与拦截弹单发杀伤概率 P_k 之积, 即

$$E = P_{shoot} \cdot P_k = (1 - P_{lost}) \cdot P_k$$

同理, 当 $n=1$ 时可单目标通道 M/M/1/C 排队模型和运行指标, 不再赘述。

4 多武器类型

第 2 节和第 3 节的排队系统可直接应用于单类型防御武器系统, 当同时包含多个类型的反导系统时, 目标在不同反导系统发射区的停留时间可能不同、发现目标的概率可能不同、对目标单发杀伤概率可能不同等, 本文对以上情况进行处理的基本依据是等效替换^[16], 以第 i 型导弹防御系统为基准参照, 将第 r 型导弹防御系统按照以下等式进行等效替换

$$\begin{aligned} \lambda_{(r)} \cdot P_{shoot(r)} \cdot P_{k(r)} \cdot P_{f(r)} &= \lambda_{(i)} \cdot P_{shoot(i)} \cdot P_{k(i)} \cdot P_{f(i)} \\ n_{(r)} \cdot (1 + t_{wmean(r)}) \cdot P_{k(r)} &= n_{(i)} \cdot (1 + t_{wmean(i)}) \cdot P_{k(i)} \\ n_{(r)} &= \frac{n_{(i)} \cdot (1 + t_{wmean(i)}) \cdot P_{k(i)}}{(1 + t_{wmean(r)}) \cdot P_{k(r)}} \end{aligned} \quad (8)$$

上面等式中的下标 $(\cdot)_{(r)}$ 和 $(\cdot)_{(i)}$ 用来区分第 r 型和第 i 型导弹防御系统; $P_{shoot(r)}$ 和 $P_{shoot(i)}$ 分别为目标受到第 r 型和第 i 型导弹防御系统射击的概率; $P_{k(r)}$ 和 $P_{k(i)}$ 分别为 r 型和第 i 型导弹防御系统对目标的单发杀伤概率; $P_{f(r)}$ 和 $P_{f(i)}$ 分别为第 r 型和第 i 型导弹防御系统对目标的发现杀伤概率; $n_{(r)}$ 和 $n_{(i)}$ 分别为第 r 型和第 i 型导弹防御系统的目标通道容量; $t_{wmean(r)}$ 和 $t_{wmean(i)}$ 分别为目标在第 r 型和第 i 型导弹防御系统发射区的停留时间。以第 i 型导弹防御系统为基准参照, 当其目标通道容量给定 $n_{(i)}$ 给定, 第 r 型导弹防御系统目标通道容量 $n_{(r)}$ 可按(8)由 $n_{(i)}$ 进行等效替换, 替换完后可代入第 2 节和第 3 节进行分析。

5 仿真实验

本节进行仿真分析, 首先对小防御纵深, 即损失制度排队系统, 目标到达时若所有目标通道被占用, 则直接突防成功。最简单的情况为单目标通道, 根据第 2.2 节模型, 其运行指标的变化情况见图 4。

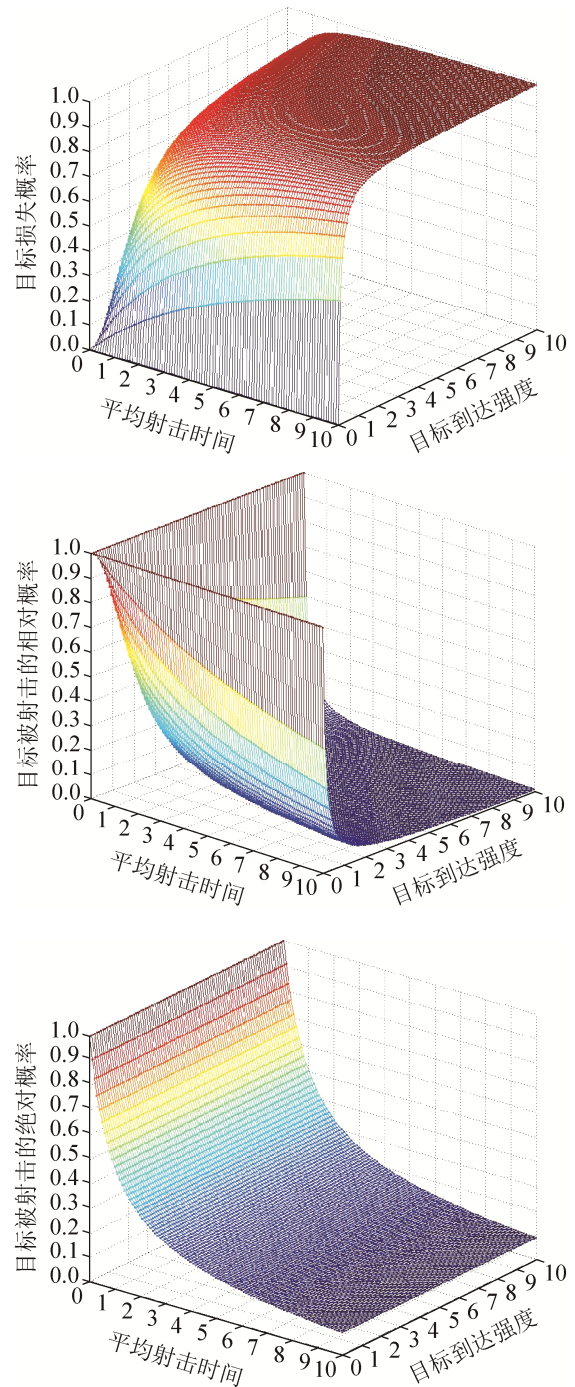


图 4 M/M/1 系统运行指标的变化趋势

Fig. 4 Performance parameters as functions of the M/M/1 system

由图4可以看出随着射击密度的增大,目标的损失概率也随之增大,反导系统目标通道容量越小,目标越容易损失,因此增加目标通道容量和减小对目标的平均射击时间有助于降低目标的损失概率,与实际作战的认知也较为相符。当系统为多目标通道时,计算目标损失(突防)概率,令系统的目标通道容量为 $1 \leq n \leq 50$ (取1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 16, 20, 30, 40, 50),射击密度 $\rho = \lambda/\mu$ 为 $1 < \rho < 100$,则目标通道容量、射击密度与目标损失概率之间的关系见图5。

前面分析了损失制排队系统单、多目标通道系统变化的一般规律。下面考虑具体两个场景,场景1:到达目标最大数量30枚,系统拦截弹对目标的单发杀伤概率0.7,系统发现目标的概率0.8,目标容量 $n=3$,目标到达强度 $\lambda=3$ 枚/min,反导系统射击每个目标的平均所需时间 $t_{smean}=1$ min,即射击强度 $\mu=1$ 。场景2:到达目标最大数量50枚,系统拦截弹对目标的单发杀伤概率0.8,系统发现目标的概率0.9,目标容量 $n=8$,目标到达强度 $\lambda=5$ 枚/min,反导系统射击每个目标的平均所需时间 $t_{smean}=1$ min,即射击强度 $\mu=1$ 。按照第2节模型分别对2个场景在M/M/N/N系统的运行情况仿真,包括目标到达与突防、目标等待与突防、系统中总目标数量和最后1个目标到达4个方面,见图6。

按第3节模型分别对2个场景在M/M/N/C系统的运行情况仿真,包括目标到达时间、对目标射击时间、目标等待时间、队列长度和对目标射击完毕时间5个方面,见图7。图6和图7中的目标突防是

指目标不被系统射击而直接突防,实质上被射击的目标也有一定概率突防成功,具体运行指标见表1。

6 仿真与分析

从仿真实验可以看出,尽管客观上场景2比场景1目标多了20个,但由于场景2目标通道容量的大幅增加使其防御效果明显优于场景1。此外,仍需要注意以下几点:

1) 目标直接突防是指防线内目标通道容量已满,目标在发射区的停留时间内没有目标通道腾出而直接突破防线;

2) 综合防御效率是反导系统在综合考虑对目标的发现概率、单发杀伤概率和目标直接突防概率的基础上对反导防御效率的度量;

3) 为计算和验证方便,本节2个场景设置相对简单。实际反导作战中除了目标通道容量外,还要考虑拦截弹数量的限制、反导转火时间需求等因素,这些因素可以相应的等效为对目标队长、发射区停留时间的约束,需要后续细致考虑;

4) 以场景1在M/M/N/N系统中运行为例,观察增大到达目标的数量效果(图8(a))、增大到达目标的强度效果(图8(b))、增大对目标的平均射击时间(图8(c))效果和减少目标通道容量(图8(d))效果。图8和表2都可以看出,在反导系统对目标的发现概率和单发杀伤概率都不变的情况下,以上配置的改变都会导致目标直接突防数量和概率增加,从而导致反导系统综合防御效率的大幅下降,尤其以目标通道容量的变化影响最大。

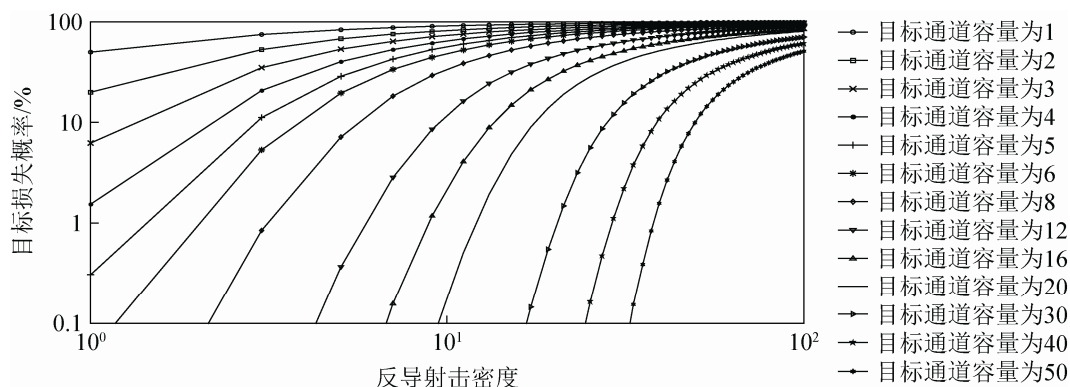
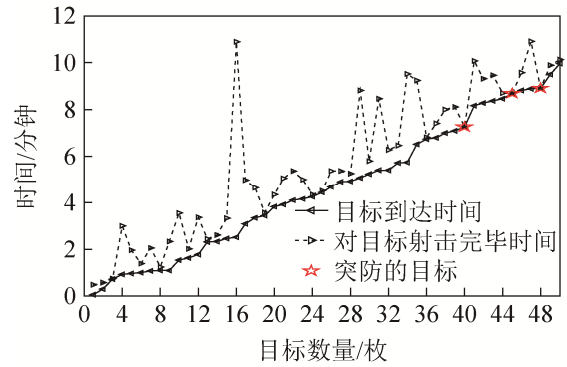
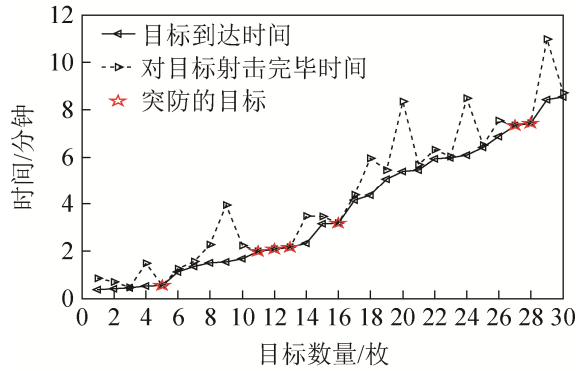
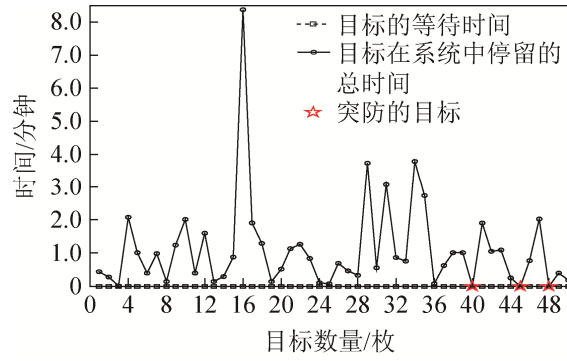
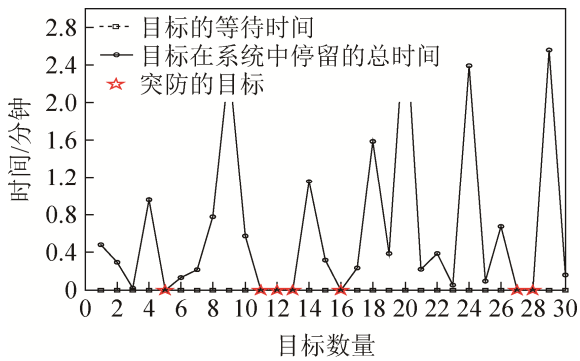


图5 M/M/N/N系统目标损失概率变化趋势

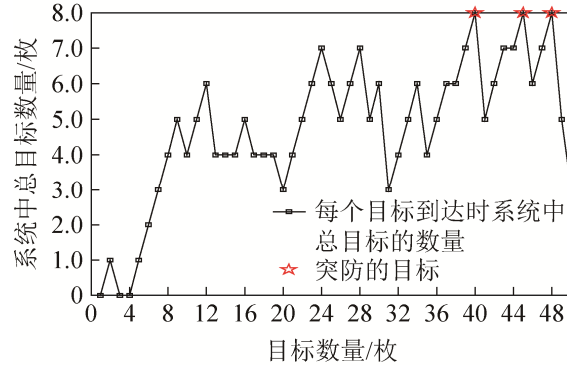
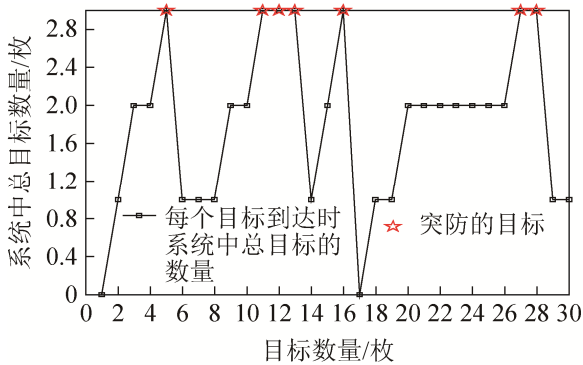
Fig. 5 Probability of BM loss as functions of the M/M/N/N system



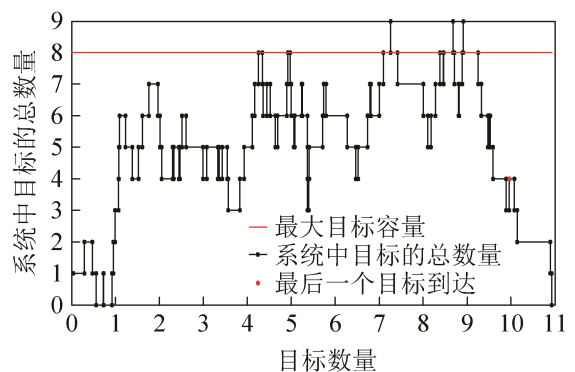
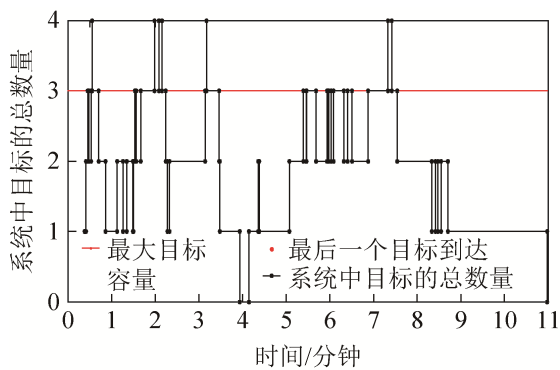
(a) 场景 1 和场景 2 目标到达与直接突防



(b) 场景 1 和场景 2 目标等待与直接突防

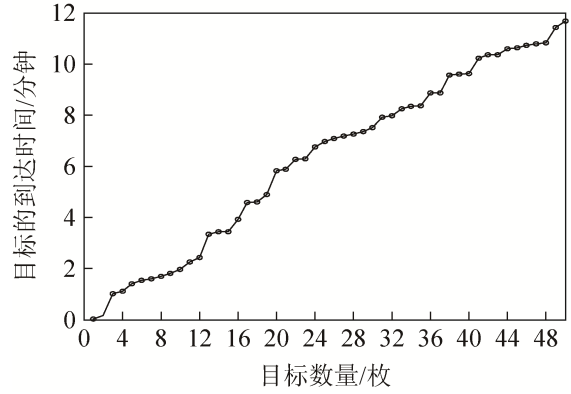
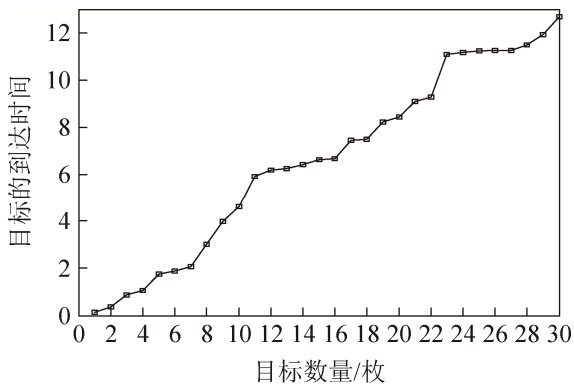


(c) 场景 1 和场景 2 系统中总目标数量

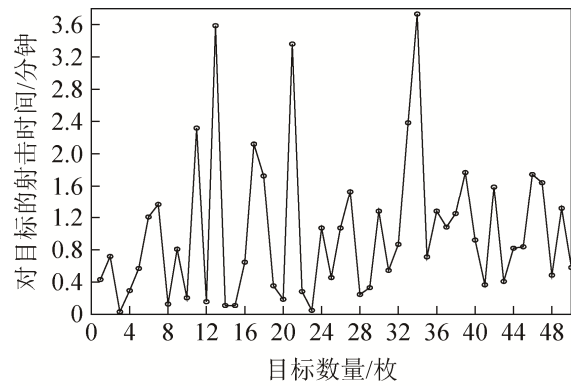
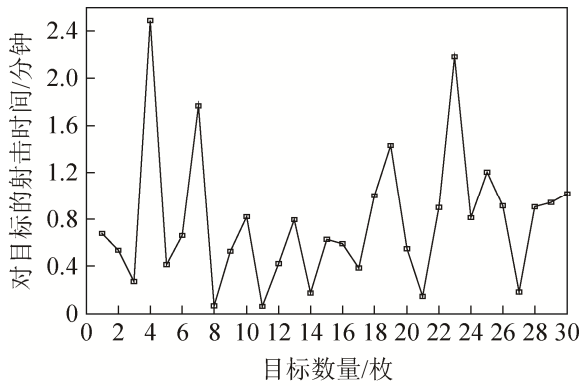


(d) 系统中总目标数量与最后 1 个目标到达

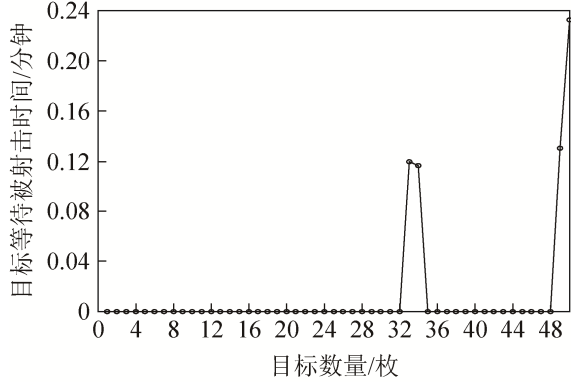
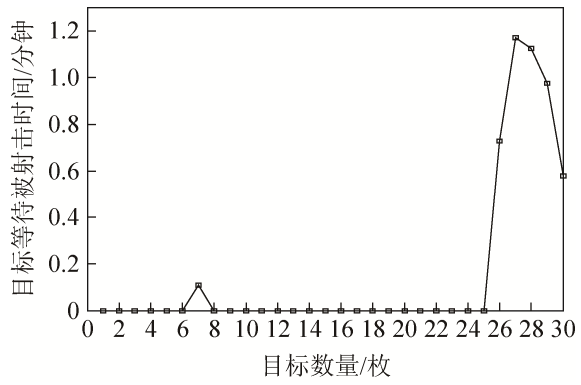
图 6 两个场景在 M/M/N/N 系统中的运行情况
Fig. 6 Performance of the M/M/N/N queueing system



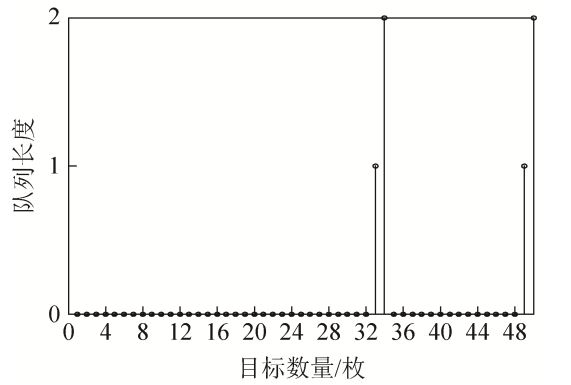
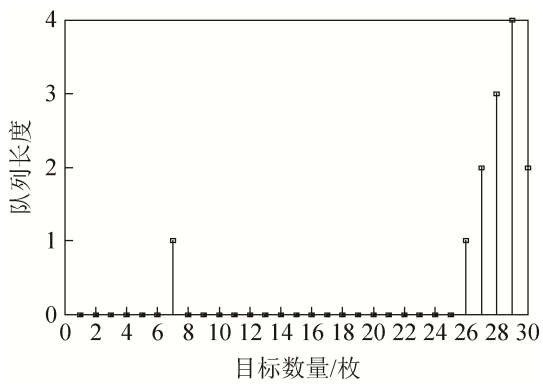
(a) 场景1和场景2目标到达时间



(b) 场景1和场景2对目标的射击时间

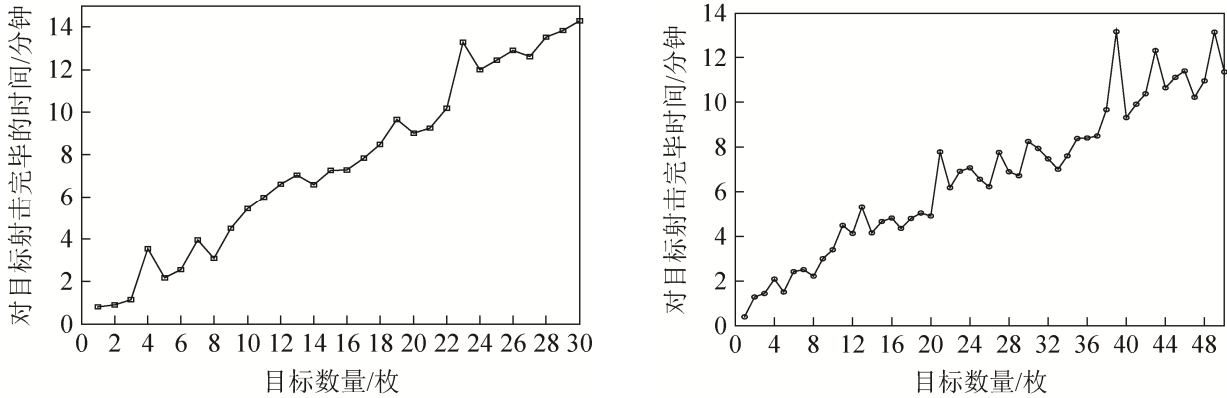


(c) 场景1和场景2目标等待被射击的时间



(d) 场景1和场景2队列长度

<http://www.china-simulation.com>



(e) 场景 1 和场景 2 对目标射击完毕时间

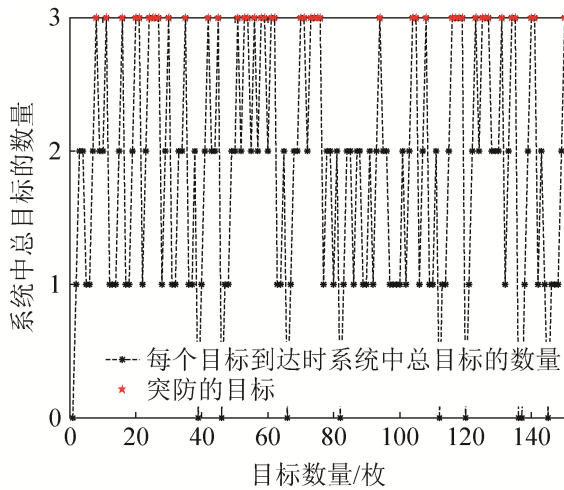
图 7 两个场景在 M/M/N/C 系统的运行情况

Fig. 7 Performance of the M/M/N/C queueing system

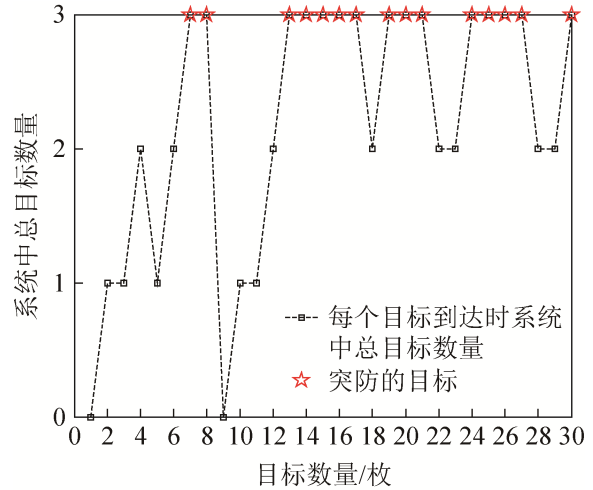
表 1 不同场景、不同系统的运行指标

Tab. 1 Results of operating parameters of the two queueing systems

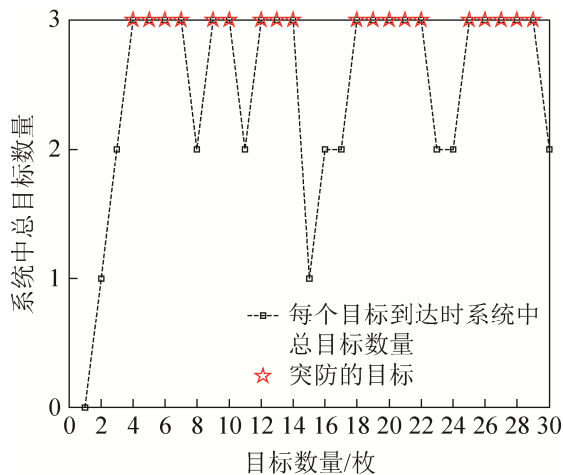
指标	M/M/N/N		M/M/N/C	
	场景1	场景2	场景1	场景2
所有目标通道全被占用的概率	22.6%	10.6%	64.5%	1.7%
等待射击的平均目标数量	0.000	0.000	1.847	0.000
目标平均等待时间	0.000	0.000	0.801	0.000
系统中平均目标数量	1.732	5.018	4.326	3.830
直接突防的目标数量	7	3	0	0
目标直接突防概率(不考虑SSPK)	23.3%	6.0%	0%	0%
综合防御效率DE(考虑SSPK和发现概率)	42.95%	67.68%	56%	72%



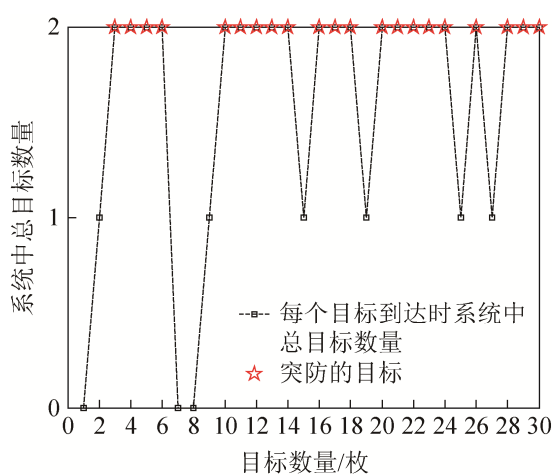
(a) 目标数量增大 3 倍



(b) 目标到达强度增大 2 倍



(c) 对平均射击时间增大2倍



(d) 目标通道容量减少1/3

图8 不同配置导致目标突防变化仿真结果

Fig.8 Target penetration change as functions of the number of BM

表2 不同配置导致的系统运行指标汇总

Tab.2 Results of operating parameters of the adjusted queueing system

运行指标	原指标	目标数量增大3倍	目标到达强度增大2倍	平均射击时间增大2倍	目标通道容量减少1/3
目标通道全被占用的概率/%	22.6	27.7	40.9	43.9	63.9
等待射击的平均目标数量	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
目标平均等待时间	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
系统中平均目标数量	1.732	1.887	2.059	2.084	1.491
直接突防的目标数量	7	45	15	19	21
目标直接突防概率/%	23.3	增加28.7	增加114	增加171	增加200
综合防御效率DE/%	42.95	降低8.7	降低34.8	降低50.0	降低60.9

7 结论

本文对导弹防御 M/M/N 排队系统进行建模与仿真研究, 针对特定场景分别建立了 M/M/N/N 和 M/M/N/C 排队模型。通过仿真运行以及调整配置, 可以观察和总结反导系统运行指标变化情况, 以此辅助决策者对反导系统运行情况进行掌握和总结规律, 将军事问题转化为科学问题, 此外还可根据反导作战目标逆向推出反导系统配置的军事需求。

参考文献:

[1] 李龙跃, 刘付显, 赵麟锋. 对多波次目标直接分配到弹的反导火力规划方法[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(11): 2206-2211.

LI L Y, LIU F X, ZHAO L F. Direct interceptor allocation method in antimissile firepower planning for multiple wave targets[J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(11): 2206-2211.

[2] Nunn W R, Glass D V, Ih-Ching Hsu, et al. Analysis of a layered defense model[J]. Operations Research (S0030-364X), 1982, 30(3): 595-599.

[3] 齐玲辉, 张安, 郭凤娟, 等. 战术弹道导弹系统效能评估 SEA 法的建模与仿真[J]. 系统仿真学报, 2013, 25(4): 795-799.

QI L H, ZHANG A, GUO F J, et al. Modeling and simulation of sea method for effectiveness analysis of tactical ballistic missile system[J]. Journal of System Simulation, 2013, 25(4): 795-799.

[4] Erlang A K. The theory of probabilities and telephone conversations[J]. Nyt Tidsskrift for Matematik B,

- (S0909-3524), 1909, 20: 33-39.
- [5] Pinedo M, Reed J. The “least flexible job first” rule in scheduling and in queueing[J]. *Operations Research Letters* (S0167-6377), 2013, 41(6): 618-621.
- [6] Claus Gwiggner, Sakae Nagaoka. Data and queueing analysis of a Japanese air-traffic flow[J]. *European Journal of Operational Research* (S0377-2217), 2014, 235(1): 265-275.
- [7] Sai Rajesh Mahabhashyam, Natarajan Gautam, Soundar R T Kumara. Resource-sharing queueing systems with fluid-flow traffic[J]. *Operations Research* (S0030-364X), 2008, 56(3): 728-744.
- [8] Hou I-Hong, Kumar P R. Queueing systems with hard delay constraints: a framework for real-time communication over unreliable wireless channels[J]. *Queueing Systems* (S0257-0130), 2012, 71(1/2): 151-177.
- [9] 曹雷, 董强, 彭伟, 等. 基于排队论的导弹防御系统的效能分析[J]. *南京理工大学学报*, 2011, 35(4): 470-474.
- CAO L, DONG Q, PENG W, et al. Effectiveness evaluation of ballistic missile defense system based on queueing theory[J]. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2011, 35(4): 470-474.
- [10] Li L Y, Liu F X, Long G Z, etc. Intercepts allocation for layered defense[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics* (S004-4132), 2016, 27(3): 602-611.
- [11] 赵晨光, 李为民, 聂成, 等. 利用排队论探讨多层拦截巡航导弹的问题[J]. *系统工程与电子技术*, 2003, 25(2): 177-178.
- ZHAO C G, LI W M, NIE C, et al. Discussing on multiplayer defense cruise missile by use of queueing theory[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2003, 25(2): 177-188.
- [12] Li L Y, Liu F X, Long G Z, et al. Performance analysis and optimal allocation of layered defense m/m/n queueing systems[J]. *Mathematical Problems in Engineering* (S1024-123X), 2016, (5): 1-21.
- [13] Vanberkel P T, Boucherie R J, Hans E W, et al. Optimizing the strategic patient mix combining queueing theory and dynamic programming[J]. *Computers and Operations Research* (S0305-0548), 2014, 43(3): 271-279.
- [14] 刘建永. 运筹学算法与编程实现-Delphi 实现[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- LIU J Y. Algorithm and Programming Implementation of Operational Research-Based on Delphi [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.
- [15] 来斌, 牛存良, 熊友奇. 防空作战模拟与效能评估[M]. 北京: 军事科学出版社, 2005.
- LAI B, NIU C L, XIONG Y Q. Simulation and Effectiveness Evaluation of Air Defense Combat [M]. Beijing: Military Science Press, 2005.
- [16] 陈绍顺, 张琳. 不同类型防空武器多层防御部署分析[J]. *情报指挥控制系统与仿真技术*, 2005, 27(4): 49-52.
- CHEN S S, ZHANG L. Analysis on Multiplayer Defense of the Different Types of Air-Defense Weapons' Disposition [J]. *Information Command Control System & Simulation Technology*, 2005, 27(4): 49-52.