

1-4-2019

## L<sub>2</sub>-gain Robust Control for Flexible Joints and Flexible Link Space Robot

Lijiao Zhang

*1.School of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China;  
;2.Collaborative Innovation Center of High End Equipment Manufacturing, Fuzhou 350116, China;*

Chen Li

*1.School of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China;  
;2.Collaborative Innovation Center of High End Equipment Manufacturing, Fuzhou 350116, China;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research](#), [Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

## L<sub>2</sub>-gain Robust Control for Flexible Joints and Flexible Link Space Robot

### Abstract

**Abstract:** The trajectory tracking and the double flexible vibration active suppression control for free-floating space robot with flexible-joints and flexible-link were proposed. *The dynamic equation of the system was established according to system's momentum conservation and Lagrange method. A singular perturbation model was established by integral manifold method, and the system was decomposed into a fast subsystem of flexible-joint which used the speed difference between the feedbacks of control law to suppress the elastic vibration of flexible-joints, a fast subsystem of flexible-link which designed optimal linear quadratic regulator (LQR) to damp out the vibration of the flexible manipulator and a slow subsystem which designed a robust controller to make the external disturbances have the performance of the L<sub>2</sub>-gain of the system, that avoids to directly solve the HJI (Inequality Hamilton-Jacobi) inequality of large calculation.* Numerical simulation results show that the proposed control algorithm is effective.

### Keywords

external disturbance, freefloating, space robot with flexible-joint and flexible-link, L<sub>2</sub>-gain robust control, dual vibration grading suppression

### Recommended Citation

ZhangLijiao, Chen Li. L<sub>2</sub>-gain Robust Control for Flexible Joints and Flexible Link Space Robot[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(4): 1448-1455.

柔性关节和柔性臂空间机器人的  $L_2$  增益鲁棒控制张丽娇<sup>1,2</sup>, 陈力<sup>1,2</sup>

(1.福州大学机械工程及自动化学院, 福州 350108; 2.福建省高端装备制造协同创新中心, 福州 350116)

**摘要:** 讨论了臂杆与关节均具有柔性的漂浮基空间机器人运动及其关节、臂双重振动的控制问题, 利用系统动量守恒关系和拉格朗日法得到系统动力学模型。采用积分流的思想对系统动力学模型进行奇异摄动分解, 将其分解为: 通过设计速度差值反馈控制来抑制关节柔性振动的快变子系统, 通过设计线性二次最优控制来抑制臂杆柔性振动的快变子系统, 描述空间机器人关节刚性运动且使得外部干扰对系统性能输出具有  $L_2$  增益鲁棒控制的慢变子系统, 以避免直接求解 HJI (Hamilton-Jacobi Inequality) 不等式计算量大的困难。通过系统数值仿真, 表明该算法有效。

**关键词:** 外部扰动; 漂浮基; 柔性关节; 柔性臂空间机器人;  $L_2$  增益鲁棒控制; 双重振动分级主动抑制

中图分类号: TP241

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2018) 04-1448-08

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201804029

 $L_2$ -gain Robust Control for Flexible Joints and Flexible Link Space RobotZhang Lijiao<sup>1,2</sup>, Chen Li<sup>1,2</sup>

(1.School of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China;

2.Collaborative Innovation Center of High End Equipment Manufacturing, Fuzhou 350116, China)

**Abstract:** The trajectory tracking and the double flexible vibration active suppression control for free-floating space robot with flexible-joints and flexible-link were proposed. The dynamic equation of the system was established according to system's momentum conservation and Lagrange method. A singular perturbation model was established by integral manifold method, and the system was decomposed into a fast subsystem of flexible-joint which used the speed difference between the feedbacks of control law to suppress the elastic vibration of flexible-joints, a fast subsystem of flexible-link which designed optimal linear quadratic regulator (LQR) to damp out the vibration of the flexible manipulator and a slow subsystem which designed a robust controller to make the external disturbances have the performance of the  $L_2$ -gain of the system, that avoids to directly solve the HJI (Inequality Hamilton-Jacobi) inequality of large calculation. Numerical simulation results show that the proposed control algorithm is effective.

**Keywords:** external disturbance; freefloating; space robot with flexible-joint and flexible-link;  $L_2$ -gain robust control; dual vibration grading suppression

## 引言

利用空间机器人辅助宇航员完成空间站的维



收稿日期: 2016-04-14 修回日期: 2016-07-22;  
基金项目: 国家自然科学基金(11372073, 11072061),  
福建省工业机器人基础部件技术重大研发平台  
(2014H21010011);

作者简介: 张丽娇(1989-), 女, 福建宁德, 博士, 研究方向为空间机器人系统动力学与控制; 陈力(1961-), 男, 江西九江, 博士, 教授, 研究方向为空间机器人动力学与控制、多体系统动力学。

护、维修及科学实验等任务, 不仅大大减轻了宇航员的工作量, 而且提高了空间探索的效率<sup>[1]</sup>。空间机器人具有操作空间大、质量轻、高负载等特性, 大多数空间机器人采用伺服电动机和谐波减速器组成的关节对机器人进行驱动, 使得空间机器人不可避免的具有柔性, 空间机器人动力学系统建模过程中的臂杆柔性和关节柔性已然不能忽略<sup>[2-3]</sup>。柔性空间机器人是一个非常复杂的动力学系统, 其动

力学方程具有非线性、强耦、时变等特点, 对其控制时关节和臂杆的柔性振动之间相互干扰与动力学耦合效应, 使得空间机器人的控制相对于地面机器人更加复杂, 而且给控制带来更大的难度。因此, 如何有效的建立系统动力学模型, 并设计算法控制具有柔性关节和柔性臂的空间机器人是研究应用空间机器人必须面对和解决的难点<sup>[4-7]</sup>。

当前对同时具有臂杆与关节柔性的空间机器人的研究不多, 大部分是单柔性杆或者单柔性关节<sup>[8-11]</sup>。文献[12]通过 Kane 法来推导地面机器人具有柔性关节和柔性臂的动力学模型, 可知不考虑柔性变形无法对系统进行有效的控制; 文献[13]提出了一种输出反馈滑模控制算法, 在一定程度上减少了柔性引起的振动, 但未能完全抑制; 文献[14]结合拉格朗日方程和假设模态法, 推导了一种结合关节柔性和臂杆柔性的空间机器人动力学模型。

为了实现漂浮基柔性关节、柔性臂空间机器人运动的轨迹跟踪和抑制由关节柔性和臂杆柔性引起的系统振动, 利用积分流的思想建立奇异摄动模型, 将系统动力学模型分解为一个柔性关节快变子系统和一个柔性臂子系统, 其中柔性臂子系统根据奇异摄动理论可以分解为一个柔性臂快变子系统和一个慢变(刚性)子系统。针对慢变子系统, 设计了一种鲁棒控制器使得外部干扰对系统性能输出的  $L_2$  增益小于给定值, 设计中避开直接求解 HJI(Hamilton-Jacobi Inequality)的困难, 通过合理选取  $L_2$  增益性能指标实现了对干扰的抑制; 针对柔性关节快变子系统, 采用速度差值反馈控制律来抑制关节柔性引起的系统弹性振动; 针对柔性臂快变子系统, 采用线性二次最优控制方法主动抑制, 以保证系统的稳定性。

## 1 系统动力学模型

作平面运动的漂浮基柔性关节、柔性臂空间机器人的几何模型如图 1 所示。其中,  $B_0$  为系统的刚性载体基座,  $B_1$  为系统的刚性连杆,  $B_2$  为系统的柔性连杆(视为 Euler-Bernoulli 悬臂梁且仅产生

横向振动),  $B_{i-1}$  和  $B_i(i=1,2)$  间均使用柔性关节旋转铰  $O_i(i=1,2)$  进行联接。建立各分体  $B_i(i=1,2)$  的主轴联体坐标系  $(O_i-x_iy_i)$ :  $x_0$  通过  $O_0$  与  $O_1$  的连线,  $x_1$  和  $x_2$  分别是  $B_1$  和  $B_2$  的对称轴,  $e_i$  为沿  $x_i(i=0,1,2)$  轴方向的基矢量;  $C$  为系统总质心;  $m_i$ 、 $J_i$  分别为  $B_i(i=0,1)$  的质量与中心转动惯量,  $B_2$  单位长度的均匀质量密度为  $\rho$ , 均匀弯曲刚度为  $EI$ 。

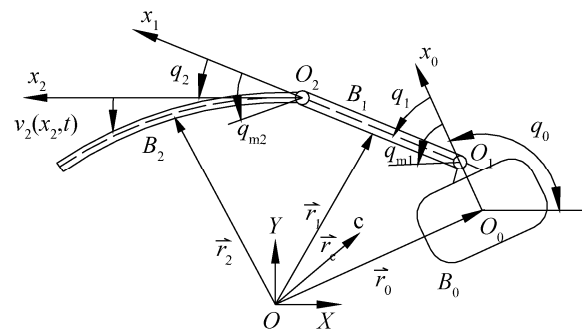


图 1 漂浮基柔性关节、柔性臂空间机器人系统  
Fig. 1 Space robot with flexible-joint and flexible-link

基于假设模态法, 横向弹性变形  $w(x_2, t)$  描述成

$$w(x_2, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_2) \delta_i(t) \quad (1)$$

式中:  $\varphi_i(x_2)$  和  $\delta_i(t)$  分别为柔性杆的第  $i$  阶模态函数及其坐标,  $n$  为截断阶数。考虑低阶模态对杆件的弹性振动起主导作用, 取前二个低阶模态进行研究, 即式(1)中  $n=2$ 。

对具有柔性关节的空间机器人系统, 根据文献[15]的假设, 关节柔性可简化为一个关节处驱动器电机转子与机械臂之间刚度系数为常数的无惯量线性扭簧, 简化模型如图 2 所示。当关节  $O_i$  处的电机转子转过角度  $q_{mi}$  时, 由于弹簧弹性力的作用, 关节驱动装置输出转角  $q_{mi}$  与受其驱动的机器人  $B_i$  实际转角  $q_i$  间存在差值  $\alpha_i = q_{mi} - q_i$ 。

利用拉格朗日法和动量守恒关系, 可导出载体位置不受控、姿态受控的柔性关节、柔性臂空间机器人动力学方程如下

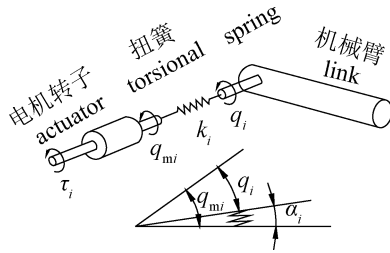


图2 柔性关节的简化扭簧模型

Fig. 2 Torsional spring model of flexible-joint

$$M(\theta)\ddot{\theta} + H(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ K_{\delta} q_{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$J\ddot{q}_m + \tau_{\theta} = \tau_m \quad (3)$$

$$\tau_{\theta} = K(q_m - q_{\theta}) \quad (4)$$

式中:  $M(\theta) \in R^{5 \times 5}$  为正定、对称惯性矩阵;  $H(\theta, \dot{\theta}) \in R^{5 \times 5}$  为从包含离心力、科氏力列向量中分离出来的矩阵;  $\theta = [q_r^T \ q_{\delta}^T]^T$ ,  $q_r = [q_0 \ q_{\theta}^T]^T$ ,  $q_0$  为载体转角,  $q_{\theta} = [q_1 \ q_2]^T$  为机器人各连杆转角所组成的列向量,  $q_{\delta} = [q_{\delta 1} \ q_{\delta 2}]^T$  为系统广义坐标列向量的柔性变量,  $q_m = [q_{m1} \ q_{m2}]^T$  为各关节驱动电机转角所组成的列向量;  $K_{\delta} = \text{diag}[k_{\delta 1} \ k_{\delta 2}]$  为柔性臂杆的抗弯刚度矩阵;  $J = \text{diag}[J_1 \ J_2]$  为驱动电机端的对角、正定惯量矩阵;  $K = \text{diag}[k_1 \ k_2]$  为各关节的线性扭转刚度;  $\tau_r = [\tau_0 \ \tau_{\theta}]^T$  为系统的控制力矩列向量,  $\tau_{\theta} = [\tau_1 \ \tau_2]^T$  为由于关节柔性所产生的连杆驱动力矩列向量,  $\tau_m \in R^{2 \times 1}$  为关节驱动电机实际产生的控制力矩列向量。

## 2 系统动力学模型基于奇异摄动分解

臂杆与关节柔性在运动过程中所引起的柔性变形会影响系统的控制精度,所引起的柔性振动会影响系统的稳定性。为了克服这些问题,本文基于积分流的思想建立奇异摄动模型,将系统动力学模型分解为三个子系统<sup>[16]</sup>。采用奇异摄动法是将系统降阶分解为表示系统刚性运动的慢变子系统和表示系统柔性运动的快变子系统。柔性臂和柔性关节在高速、高精度的运动过程中都会引起系统的柔性振动,即弹性振动,且振动级别不一定相同,因此快变子系统又可分解为由柔性臂快变子系统和由柔性关节快变子系统。

### 2.1 柔性关节快变子系统

针对(2)式、(3)式和(4)式的漂浮基柔性关节、柔性臂空间机器人系统,结合奇异摄动理论,定义奇异摄动正比例因子  $\varepsilon$ , 引入新的变量  $K_1$ ,  $K_1 \in R^{2 \times 2}$  为正定、对角参数,并保证  $K_1 = \varepsilon^2 K$ , 结合(3)式和(4)式可得

$$J\varepsilon^2 \ddot{q}_m + K_1 \tau_{\theta} = K_1 (\tau_m - J\ddot{q}_0) \quad (5)$$

设  $\varepsilon \rightarrow 0$ 。有  $q_m \approx q_{\theta}$ ,  $\dot{q}_m \approx \dot{q}_{\theta}$ , 此时, 柔性关节等效为刚性。(2)式和(5)式可写为

$$\bar{M}(\theta)\ddot{\theta} + \bar{H}(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ K_{\delta} q_{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\tau}_r \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\bar{\tau}_{\theta} = \bar{\tau}_m - J\ddot{q}_0 \quad (7)$$

式中:  $\bar{\tau}_r = [\bar{\tau}_0 \ \bar{\tau}_{\theta}^T]^T$ , 上划线“—”表示当  $\varepsilon = 0$  时得到与之相应的矩阵或者向量。

定义快变时标  $t_f(\varepsilon t_f = t - t_0)$  及边界层修正项  $\xi_1 = \tau - \bar{\tau}_0$ 、 $\xi_2 = \varepsilon \dot{\tau}_0$ , 且当  $\varepsilon = 0$ , 结合(7)式, 可得柔性关节快变子系统

$$\dot{\xi} = A_f \xi + B_f \tau_f \quad (8)$$

式中:  $\xi = [\xi_1^T \ \xi_2^T]^T$ ,  $A_f = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -J^{-1}K_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ,  $B_f = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ J^{-1} \end{bmatrix}$ ,  $\tau_f$  为柔性关节快变控制。

### 2.2 柔性臂子系统

将(7)式代入(6)式, 可得到载体位置不受控、姿态受控的柔性臂子系统动力学方程

$$\bar{D}(\theta)\ddot{\theta} + \bar{H}(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ K_{\delta} q_{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\tau} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中,  $\bar{D}(\theta) = \bar{M}(\theta) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ,  $\bar{\tau} = [\bar{\tau}_0 \ \bar{\tau}_m^T]^T$ 。

根据奇异摄动理论, 柔性臂子系统可以进一步分解成两个子系统, 即柔性臂快变子系统和慢变(刚性)子系统, 则动力学方程(9)式可写成

$$\begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ K_{\delta} q_{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\tau} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中:  $\bar{D}_{11}, \bar{H}_{11} \in R^{3 \times 3}$ ,  $\bar{D}_{12}, \bar{H}_{12} \in R^{3 \times 2}$ ,  $\bar{D}_{21}, \bar{H}_{21} \in R^{2 \times 3}$ ,  $\bar{D}_{22}, \bar{H}_{22} \in R^{2 \times 2}$  分别为  $\bar{D}(\theta)$ 、 $\bar{H}(\theta, \dot{\theta})$  对应的子矩阵。由于系统(10)式的惯性矩阵  $\bar{D}(\theta)$  是对称、正定

的, 因此其逆矩阵可定义为  $\bar{N}$ , 即

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \bar{D}^{-1} \quad (11)$$

若只考虑柔性臂的弹性振动, 而忽略柔性关节的振动, 则定义  $\mu$  为奇异摄动因子,  $\mu^2 \bar{\zeta} = q_\delta$ 、 $K_s = \mu^2 K_\delta$ , 则(10)式可变换为

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r &= \bar{N}_{11} \bar{\tau} - \bar{N}_{11} [\bar{H}_{11} \dot{q}_r + \bar{H}_{12} \mu^2 \dot{\bar{\zeta}}] - \\ &\quad \bar{N}_{12} [\bar{H}_{21} \dot{q}_r + \bar{H}_{22} \mu^2 \dot{\bar{\zeta}}] - \bar{N}_{12} K_s \bar{\zeta} \\ \mu^2 \ddot{\bar{\zeta}} &= \bar{N}_{21} \bar{\tau} - \bar{N}_{21} [\bar{H}_{11} \dot{q}_r + \bar{H}_{12} \mu^2 \dot{\bar{\zeta}}] - \\ &\quad \bar{N}_{22} [\bar{H}_{21} \dot{q}_r + \bar{H}_{22} \mu^2 \dot{\bar{\zeta}}] - \bar{N}_{22} K_s \bar{\zeta} \end{aligned} \quad (12)$$

若令  $\mu=0$ , 那么根据(12)式, 可得

$$\ddot{q}_r = (\bar{N}_{11s} - \bar{N}_{12s} \bar{N}_{22s}^{-1} \bar{N}_{21s}) (-\bar{H}_{11s} \dot{q}_r + \bar{\tau}_s) \quad (13)$$

式中: 下标“s”表示当  $\mu=0$  时得到与之相应的矩阵或者向量。即可得柔性臂慢变(刚性)子系统的动力方程。

$$\bar{D}_s \ddot{q}_r + \bar{H}_s \dot{q}_r = \bar{\tau}_s \quad (14)$$

式中:  $\bar{D}_s = (\bar{N}_{11s} - \bar{N}_{12s} \bar{N}_{22s}^{-1} \bar{N}_{21s})^{-1}$ ,  $\bar{H}_s = \bar{H}_{11s}$ ,  $\bar{\tau}_s = [\bar{\tau}_0 \quad \bar{\tau}_{ms}^T]^T$ 。

定义快变时标  $t_\delta (\varepsilon t_\delta = t - t_0)$  及边界层修正项  $z_1 = \bar{\zeta} - \bar{\zeta}_s$ 、 $z_2 = \mu \dot{\bar{\zeta}}$ , 可得柔性臂快变子系统

$$\dot{z} = A_\delta z + B_\delta \tau_\delta \quad (15)$$

式中:  $z = [z_1^T \quad z_2^T]^T$ ,  $A_\delta = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\bar{N}_{22s} K_s & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{N}_{21s} \end{bmatrix}$ ,  $\tau_\delta$  为柔性臂快变控制。

### 3 控制器的设计

根据第2节可知, 为了给柔性关节、柔性臂空间机器人系统设计控制器  $\tau$ , 将系统分解为柔性关节快变子系统、柔性臂快变子系统和慢变(刚性)子系统。由于这三个子系统在时标上具有独立性, 因此可分别对每个子系统进行相应控制器的设计, 并最终组成系统的总控制器。设计控制器为

$$\tau = \bar{\tau}_s + \tau_f + \tau_\delta \quad (16)$$

式中:  $\tau_f$  为柔性关节快变子系统控制,  $\tau_\delta$  为柔性臂快变子系统控制,  $\bar{\tau}_s$  慢变子系统控制。

### 3.1 慢变子系统控制器设计

令  $x_1 = q_r$  和  $x_2 = \dot{q}_r$ , 对于给定的期望轨迹  $x_d = [q_{d0} \quad q_{d1} \quad q_{d2}]^T$  针对柔性臂、柔性关节空间机器人慢变子系统动力学方程(14)式, 考虑外部干扰  $\tau_d \in R^3$  的情况下, 可写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = F(x) + G(x) \bar{\tau}_s + \tau_d, \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $G(x) = \bar{D}(\theta)^{-1}$ ,  $F(x) = -G(x) \bar{H}_s \dot{q}_r$ 。

采用 Backstepping 设计方法<sup>[17]</sup>, 取如下变量

$$z_1 = x_1 - x_d \quad (18)$$

$$z_2 = x_2 - \dot{x}_d - \beta \quad (19)$$

针对式(17)中的第一个子方程, 定义 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (20)$$

对上式求导得

$$\dot{V}_1 = z_1(z_2 + \beta) \quad (21)$$

选取虚拟控制输入  $\beta$  如下

$$\beta = -(k + \frac{1}{2}) z_1 \quad (22)$$

$k$  为正的常数。另外定义系统性能输出  $z = [z_1 \quad z_2]^T$ , 同时也是系统的评判指标, 用来评价非线性系统的性能。

综合式(21)和式(22), 可得

$$\dot{V}_1 = z_1 z_2 - (k + \frac{1}{2}) z_1^2 \quad (23)$$

由上式可知, 通过适当的  $\beta$  选取, 可使得当  $z_2 = 0$  时,  $\dot{V}_1 \leq 0$ , 这样可保证  $z_1$ , 即跟踪误差将渐近收敛至 0; 当且仅当  $z_1 = 0$  时, 取  $\dot{V}_1 = 0$ 。

定义对于干扰信号  $\tau_d(t)$ , 其  $L_2$  范数为

$$\|\tau_d(t)\|_2 = \left\{ \int_0^\infty \tau_d^T(t) \tau_d(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

该范数可衡量  $\tau_d(t)$  的能量大小。

为了评判系统的干扰抑制能力, 定义性能指标为

$$J = \sup_{\|\tau_d\| \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|\tau_d\|_2} \quad (24)$$

其中,  $J$  称为系统的  $L_2$  增益, 可表示系统鲁棒性大小;  $J$  越小表示该系统的鲁棒性能越好。

设计控制器使得  $L_2$  增益  $J$  尽量小, 就能让整个系统渐近稳定。这就等价于求解一个基于 Lyapunov 稳定性理论的耗散不等式问题。在对系统进行稳定性证明时, 常常需要构造一个 Lyapunov 函数, 而存在一个可微函数  $V \geq 0$  满足耗散不等式的充分必要条件是  $V$  满足 HJI(Hamilton-Jacobi Inequality)<sup>[18]</sup>。

对于 HJI(Hamilton-Jacobi Inequality)定理可描述为: 对一个正数  $\gamma$ ,  $\gamma$  称作干扰抑制水平因子, 如果存在一个正定且可微函数  $V \geq 0$ , 使得 Hamilton-Jacobi 不等式  $H = \dot{V} - 0.5(\gamma^2 \tau_d^2 - \|z\|^2)$ ,  $(\forall \tau_d) \leq 0$  成立, 则  $L_2$  增益  $J \leq \gamma$ , 即表示整个系统渐近稳定。而要找到满足 Hamilton-Jacobi 不等式的函数  $V(x)$ , 至少需要求解偏微分方程, 然而一般的非线性系统 HJI 偏微分方程或不等式的求解过程是非常困难<sup>[19]</sup>。

所以常用 Lyapunov 递推函数的思想来构造系统的存储函数  $V(x)$ , 其基本思想是将复杂的非线性系统分解成不超过系统阶数的子方程系统, 然后为每个子方程系统分别设计 Lyapunov 函数 (简称  $V$  函数) 和中间虚拟控制量, 一直后退到整个系统, 直到完成整个控制器的设计, 并最终证明  $\dot{V}$  是负定的, 从而使得系统稳定。

考虑系统(17)式, 设计控制器如下

$$\bar{\tau}_s = \frac{1}{G(x)}(\tau_a + \tau_b) \quad (25)$$

$$\tau_a = -F(x) + \ddot{x}_d + \dot{\alpha} - z_1 - pz_2 \quad (26)$$

$$\tau_b = -\frac{\gamma^2 + 1}{2\gamma^2} z_2 \quad (27)$$

式中:  $\tau_a$  和  $\tau_b$  分别为自适应控制器和鲁棒控制器。 $P = \text{diag}[p_1 \ p_2 \ p_3]$  为正的的控制参数, 则闭环系统是一致最终有界稳定的。

结合(17)、(18)、(19)和(25)式可得

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_d = z_2 + \beta \quad (28)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \ddot{x}_d - \dot{\beta} = -z_1 - pz_2 + \tau_b + \tau_d \quad (29)$$

针对式(17)中的第二个子方程, 定义 Lyapunov 函数

$$V_2 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (30)$$

对(30)式两边求导, 结合(28)和(29)式, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= z_1(z_2 + \beta) + z_2(\tau_d - z_1 - pz_2 - \tau_b z_2) = \\ &= -(k + \frac{1}{2})z_1^2 - pz_2^2 + z_2(\tau_d - \tau_b z_2) \leq \\ &= -\frac{1}{2}z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 - \frac{1}{2}(\frac{z_2}{\gamma} - \tau_d)^2 + \frac{\gamma^2}{2}\tau_d^2 \leq \\ &= -\frac{1}{2}\|z\|^2 + \frac{\gamma^2}{2}\tau_d^2 \end{aligned} \quad (31)$$

即存在可微函数  $V_2 \geq 0$  满足耗散不等式

$$H = \dot{V}_2 - 0.5(\gamma^2 \tau_d^2 - \|z\|^2) (\forall \tau_d) \leq 0 \quad (32)$$

由式(32)可知, 从干扰  $\tau_d$  到性能输出  $z$  的  $L_2$  增益  $J \leq \gamma$ , 即表示整个系统渐近稳定。

### 3.2 柔性关节快变子系统控制器设计

由式(8)可知, 柔性关节快变子系统为一个线性完全可控系统, 则设计如下一个柔性关节快变子系统控制器

$$\tau_f = -K_f \xi \quad (33)$$

通过合理选择  $K_f$  可保证柔性关节快变子系统稳定。

### 3.3 柔性臂快变子系统控制器设计

忽略不确定部分, 由式(15)可知,  $A_\delta$  和  $B_\delta$  为完全状态可控, 则柔性臂快变子系统为线性系统且完全可控, 可采用线性二次最优控制器 (LQR) 来调节系统状态  $z$ , 使其最终达到零, 从而实现对柔性臂引起的系统振动的主动抑制。为此, 定义系统性能指标函数为

$$J_\delta = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\tau_\delta^T R_\delta \tau_\delta + z^T Q_\delta z) dt \quad (34)$$

式中:  $R_\delta \in R^{3 \times 3}$  和  $Q_\delta \in R^{4 \times 4}$  分别为正定、半正定常值矩阵。

设  $P_\delta$  为如下 Ricatti 方程的唯一解

$$P_\delta A_\delta + A_\delta^T P_\delta - P_\delta B_\delta R_\delta^{-1} B_\delta^T P_\delta + Q_\delta = 0 \quad (35)$$

快变最优控制器可定义为

$$\tau_\delta = -R_\delta^{-1} B_\delta^T P_\delta z \quad (36)$$

## 4 数值仿真

对图1所示的柔性关节、柔性臂空间机器人进

行动力学数值仿真, 系统控制流程方框如图 3 所示。利用由柔性关节快变子控制器、柔性臂快变子系统控制器和关节运动慢变子控制器组成的总控制律式(16), 对系统进行仿真分析。系统惯性参数的真实值为  $m_0=40\text{ kg}$ ,  $m_1=2\text{ kg}$ ,  $j_0=34.17\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $j_1=1.5\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $l_0=1.5\text{ m}$ ,  $l_1=l_2=3\text{ m}$ ,  $J_1=J_2=0.8\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ 。柔性臂的单位长度线密度取为  $\rho=1.0\text{ kg/m}$ , 和抗弯界面模量为  $EI=30\text{ N}\cdot\text{m}^2$ 。第一个和第二个柔性关节扭转刚度分别为  $k_1=100\text{ N}\cdot\text{m/rad}$  和  $k_2=100\text{ N}\cdot\text{m/rad}$ 。同时, 控制系统相关参数选取为  $k=1$ ,  $p_1=p_2=p_3=40$ ,  $\gamma=1$ ,  $\mathbf{K}_f=0.09\times\text{diag}[1,1,1]$ ,  $\mathbf{R}_\delta=100\times\text{diag}[1,1,1]$ ,  $\mathbf{Q}_\delta=10\times\text{diag}[1,1,1]$ 。

设系统载体和两个关节的期望运动轨迹为  $q_{0d}=\pi/2\text{ rad}$ ,  $q_{1d}=7\pi/16\text{ rad}$ ,  $q_{2d}=3\pi/8\text{ rad}$ 。系统初始运动位置为  $q_0(0)=1.68\text{ rad}$ ,  $q_1(0)=1.25\text{ rad}$ ,  $q_2(0)=1.25\text{ rad}$ ,  $q_{m1}(0)=1.25\text{ rad}$ ,  $q_{m2}(0)=1.25\text{ rad}$ ,  $q_{\delta 1}(0)=q_{\delta 2}(0)=0\text{ m}$ 。确定外部干扰为  $\tau_d=[\sin(20t)]^T$ 。

$\cos(20t)\sin(20t)]^T$ 。

系统的柔性杆  $B_2$  被视为 Euler-Bernoulli 悬臂梁, 其模态试函数  $\varphi_i(x_2)$  取为

$\varphi_i(x_2)=[\cos(\varphi_i x_2)-\cosh(\varphi_i x_2)]+A_i[\sin(\varphi_i x_2)-\sinh(\varphi_i x_2)]$   
其中,  $A_i=-[\cos(\gamma_i)+\cosh(\gamma_i)]/[\sin(\gamma_i)+\sinh(\gamma_i)]$ ,  
 $\varphi_i=\gamma_i/l_2 (i=1,2)$ ,  $\gamma_1=1.8751$ ,  $\gamma_2=4.6941$ 。

利用文中所设计的具有  $L_2$  干扰抑制力的鲁棒控制器对漂浮基柔性关节、柔性臂空间机器人进行仿真运算, 仿真过程全部耗时:  $t=50\text{ s}$ 。仿真结果如图 4~7 所示。图 4 为空间机器人载体姿态、各关节角度的轨迹跟踪对比图; 图 5 为驱动电机转子的关节角度运动轨迹跟踪对比图; 图 6 为开启柔性臂快变子系统(实线)和关闭柔性臂快变子系统(虚线)情况下, 柔性臂振动模态变化曲线图; 图 7 为关闭柔性关节快变子系统情况下, 载体姿态、各关节角度的轨迹跟踪对比图。

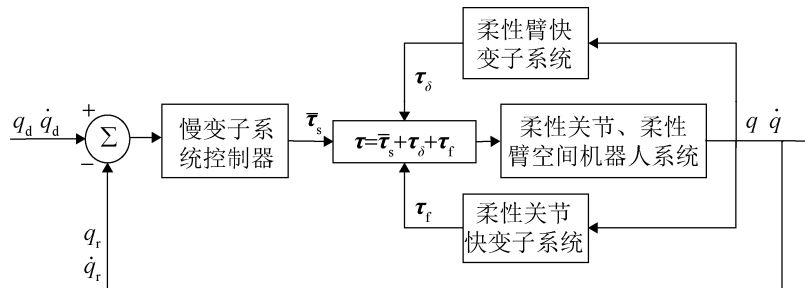


图3 柔性关节、柔性臂空间机器人控制流程图

Fig. 3 Control flow chart of space robot with flexible-joint and flexible-link

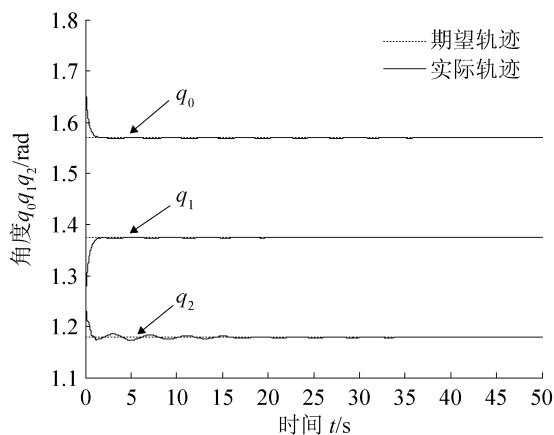


图4 载体姿态、各关节角度轨迹跟踪图

Fig. 4 The trajectory tracking of attitude angle of base and joints

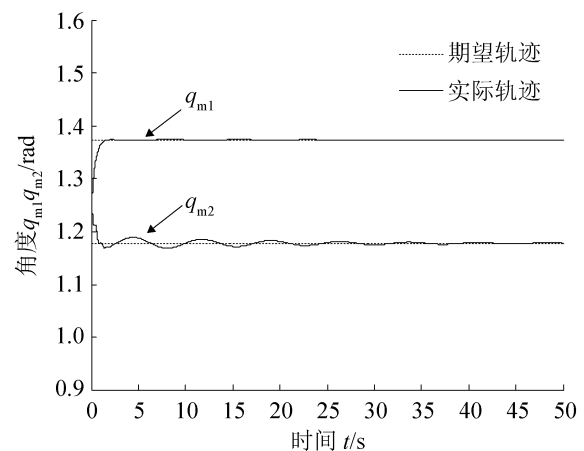


图5 驱动电机转子的关节角度轨迹跟踪图

Fig. 5 Trajectory tracking of the motor rotors

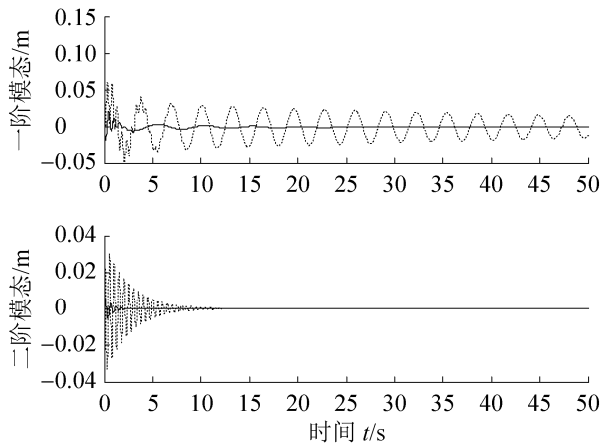
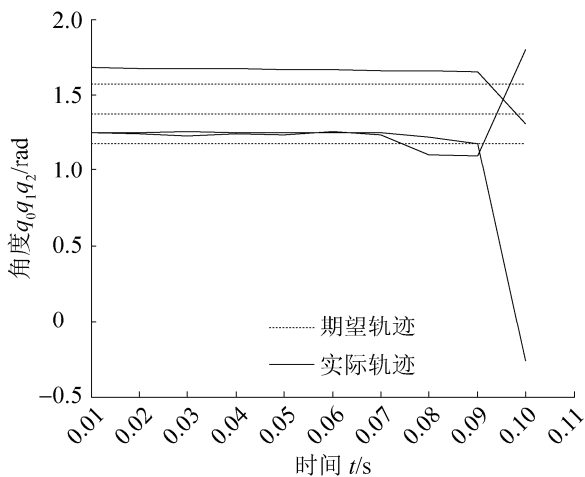


图6 柔性臂振动模态曲线图

Fig. 6 The vibration modes of the flexible link

图7 载体姿态、各关节角度轨迹跟踪图( $\tau=0$ )Fig. 7 The trajectory tracking of attitude angle of base and joints ( $\tau=0$ )

仿真结果表明,文中所设计的控制算法能够稳定地跟踪上期望运动轨迹,柔性关节和柔性臂在运动过程中所引起的柔性振动得到了有效的抑制。通过与关闭柔性臂快变子系统对比:开启柔性臂快变子系统使得柔性臂的振动能够快速得到抑制,且使得一阶振动模态最终抑制达到  $10^{-5}\text{m}$ ,二阶振动模态最终抑制达到  $10^{-6}\text{m}$ ;而关闭柔性臂快变子系统使得一阶振动模态仅能抑制到  $10^{-2}\text{m}$ ,而二阶振动模态虽能达到  $10^{-5}\text{m}$ ,但在仿真开始的前10s内其振动模态在  $10^{-2}\text{m}$ 。通过关闭柔性关节快变子系统,轨迹跟踪在不到0.1s时跟踪运动轨迹偏差已

经很大,进而发散,导致控制失效。

## 5 结论

本文研究了外部干扰、载体不受控和姿态受控的情况下,漂浮基柔性关节、柔性臂空间机器人关节运动轨迹的控制问题。基于奇异摄动理论将系统分解成一个刚性子系统、一个柔性关节快变子系统与一个柔性臂快变子系统。设计由刚性子系统的具有  $L_2$  干扰抑制力的鲁棒控制、柔性关节快变子系统的速度差值反馈控制与柔性臂快变子系统的线性二次最优控制组成的混合控制器,避免了直接求解 HJI(Hamilton-Jacobi Inequality)不等式,该混合控制算法能够有效地消除由关节和臂杆柔性引起的系统振动造成的不利影响。仿真试验结果证实了文中所设计的控制算法的有效性,并验证所设计的控制算法能抑制外部有界干扰给系统带来的影响。

## 参考文献:

- [1] Flores-Abad A, Ma O, Pham K. A Review of Space Robotics Technologies for on-orbit Servicing [J]. Progress in Aerospace Sciences (S0376-0421), 2014, 68(6): 1-26.
- [2] Ulrich S, Sasiadek J Z, Barkana I. Nonlinear Adaptive Output Feedback Control of Flexible-joint Space Manipulators with Joint Stiffness Uncertainties [J]. Journal of Guidance Control and Dynamics (S0731-5090), 2014, 37(6): 1961-1975.
- [3] Sabatini M, Gasbarri P, Monti R, et al. Vibration control of a flexible space manipulator during on orbit operations [J]. Acta Astronautica (S0094-5765), 2012, 73(2): 109-121.
- [4] Efimova P, Shymanchuk D. Dynamic Model of Space Robot Manipulator [J]. Applied Mathematical Sciences (S0066-5452), 2015, 9(94): 4653-4659.
- [5] 戈新生, 崔玮, 赵秋玲. 刚柔性耦合机械臂轨迹跟踪与振动抑制[J]. 工程力学, 2005, 22(6): 188-191.  
Ge X S, Cui W, Zhao Q L. Trajectory Tracking Control and Vibration Suppression of Rigid Flexible Manipulators [J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(6): 188-191.
- [6] Park Y J, Wan K C. External Torque-sensing Algorithm for Flexible-joint Robot Based on Kalman Filter [J]. Electronics Letters (S0013-5194), 2013, 49(14):

- 877-878.
- [7] Yeon J S, Yim J, Park H. Robust Control Using Recursive Design Method for Flexible Joint Robot Manipulator [J]. Journal of Mechanical Science and Technology (S1738-494X), 2011, 25(12): 3205-3213.
- [8] Delavari H, Lanusse P, Sabatier J. Fractional Order Controller Design For a Flexible Link Manipulator Robot [J]. Asian Journal of Control (S1561-8625), 2013, 15(3): 783-795.
- [9] Li Y, Tong S, Li T. Fuzzy Adaptive Dynamic Surface Control for a Single-link Flexible-joint Robot [J]. Nonlinear Dynamics (S0924-090X), 2012, 70(3): 2035-2048.
- [10] Zhang L J, Chen L. Indirect Adaptive Fuzzy  $H_\infty$  Control of Free-floating Space Robot System with Flexible Joints[C]// The 66th International Astronautical Congress, Jerusalem, Israel, 2015.
- [11] Halalchi H, Laroche E, Bara G I. Flexible-link Robot Control Using a Linear Parameter Varying Systems Methodology [J]. International Journal of Advanced Robotic Systems (S1729-8806), 2014, 11(46): 1-12.
- [12] 章定国, 周胜丰. 柔性杆柔性铰机器人动力学分析[J]. 应用数学和力学, 2006, 27(5): 615-623.
- Zhang D G, Zhou S F. Dynamic Analysis of Flexible-Link and Flexible-Joint Robots [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2006, 27(5): 615-623.
- [13] Wilson D G, Starr G P, Parker G G, et al. Robust Control Design for Flexible-link Flexible-joint Robots[C]// Proceedings of the 2000 International Conference on Robotics and Automation. San Francisco 2000: 1496-1501.
- [14] Yu X Y, Chen L. Dynamic Modeling and Control of a Free-flying Space Robot with Flexible-link and Flexible-joints[C]// Robotics and Automation (ICRA), 2014 IEEE International Conference on. IEEE, 2015: 6625-6630.
- [15] Spong M W. Modeling and Control of Elastic Joint Robots [J]. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control (S0022-0434), 1987, 109(4): 310-319.
- [16] 刘华平, 孙富春, 何克忠, 等. 奇异摄动控制系统: 理论与应用[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(1): 1-7.
- Liu H P, Sun F C, He K Z, et al. Survey of Singularly Perturbed Control Systems: Theory and Applications [J]. Control Theory and Applications, 2003, 20(1): 1-7.
- [17] De Luca A, Siciliano B. Closed-form Dynamic Model of Planar Multilink Lightweight Robots [J]. Systems Man & Cybernetics IEEE Transactions on (S1094-6977), 1991, 21(4): 826-839.
- [18] Van der Schaft, A.J. L2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state-feedback  $H_\infty$  control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(6): 770-784.
- [19] Sassano M. Dynamic Solution of the Hamilton-Jacobi Inequality in the L2-Disturbance Attenuation Problem[C]// Nonlinear Control Systems. 2010: 623-628.