

1-2-2019

## A New Method on Trajectory Planning for Mobile Robots Using Bezier Curves

Sun Lei

*Institute of Robotics and Automatic Information System, Nankai University, Tianjin 300353, China;*

Lishuang Zhang

*Institute of Robotics and Automatic Information System, Nankai University, Tianjin 300353, China;*

Zhou Lu

*Institute of Robotics and Automatic Information System, Nankai University, Tianjin 300353, China;*

Xuebo Zhang

*Institute of Robotics and Automatic Information System, Nankai University, Tianjin 300353, China;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

## A New Method on Trajectory Planning for Mobile Robots Using Bezier Curves

### Abstract

**Abstract:** In view of the trajectory planning for the mobile robots, an efficient method based on Bezier curves is proposed, which produces better solution with shorter path and faster trajectory, compared with the existing methods. The problem of trajectory planning is divided into path planning and velocity planning. *A Bezier curve is used to connect each two line-segments to obtain shorter paths. It is proved that the order of the used Bezier curves is at least five to ensure the curvature continuity of the whole path. Taking a differential-driven wheeled mobile as an example, to follow the planned path steadily and smoothly, velocity profile satisfying the constraints of kinematics and dynamics is generated.* The simulation results verify the feasibility of the method proposed in this paper.

### Keywords

trajectory planning, path planning, Bezier curves, velocity planning

### Recommended Citation

Sun Lei, Zhang Lishuang, Zhou Lu, Zhang Xuebo. A New Method on Trajectory Planning for Mobile Robots Using Bezier Curves[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(3): 962-968.

## 一种基于 Bezier 曲线的移动机器人轨迹规划新方法

孙雷, 张丽爽, 周璐, 张雪波

(南开大学机器人与信息自动化研究所, 天津 300353)

**摘要:** 针对移动机器人的轨迹规划问题, 提出了一种基于 Bezier 曲线的有效解决方法。相对于现有轨迹规划方法, 此方法所产生的路径长度更短, 轨迹所用时间更短。将轨迹规划问题分为路径规划和速度规划两步来解决。采用 Bezier 曲线光滑连接线段序列进行路径规划以减小路径长度; 考虑整条路径的曲率连续性, 证明了 Bezier 曲线的次数至少为 5 次。以差动轮式机器人为例, 产生了满足其运动学和动力学约束的速度命令, 使机器人能平稳光滑地跟踪所规划的路径。仿真结果证明了所提方法的有效性。

**关键词:** 轨迹规划; 路径规划; Bezier 曲线; 速度规划

中图分类号: TP242.6

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2018) 03-0962-07

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201803024

## A New Method on Trajectory Planning for Mobile Robots Using Bezier Curves

Sun Lei, Zhang Lishuang, Zhou Lu, Zhang Xuebo

(Institute of Robotics and Automatic Information System, Nankai University, Tianjin 300353, China)

**Abstract:** In view of the trajectory planning for the mobile robots, an efficient method based on Bezier curves is proposed, which produces better solution with shorter path and faster trajectory, compared with the existing methods. The problem of trajectory planning is divided into path planning and velocity planning. A Bezier curve is used to connect each two line-segments to obtain shorter paths. It is proved that the order of the used Bezier curves is at least five to ensure the curvature continuity of the whole path. Taking a differential-driven wheeled mobile as an example, to follow the planned path steadily and smoothly, velocity profile satisfying the constraints of kinematics and dynamics is generated. The simulation results verify the feasibility of the method proposed in this paper.

**Keywords:** trajectory planning; path planning; Bezier curves; velocity planning

## 引言

轨迹规划是移动机器人的基本功能模块。通常, 移动机器人的轨迹规划包括: 从给定位初始位姿到目标位姿的路径规划以及产生跟踪规划路径

的速度命令<sup>[1]</sup>。本文针对移动机器人从起始位姿到目标位姿的轨迹规划问题, 提出了一种有效且相对于现有算法更优的解决方法, 此方法产生的路径更短, 移动机器人运动所需时间更短。

路径规划问题一直是智能移动机器人研究的核心内容<sup>[2]</sup>。在移动机器人路径规划领域内, 链接图, 可视图, 以及随之一起应用的搜索算法如 A\*, Dijkstra 等经常会被用来寻找二维空间中两点之间的最优路径<sup>[3]</sup>。但是这类算法得出的路径是从初始点到目标点的线段序列, 可表示为“line-point-line”,

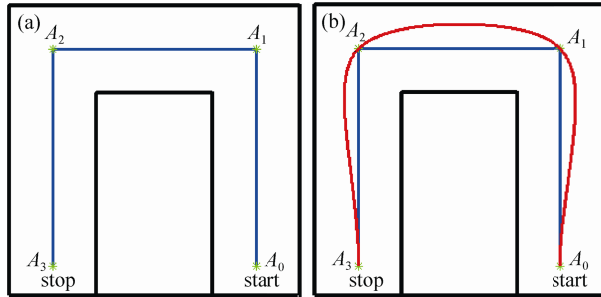


收稿日期: 2016-03-24 修回日期: 2016-05-20;  
基金项目: 国家自然科学基金(61573198), 天津市自然科学基金重点支撑项目(14ZCDZGX00798);  
作者简介: 孙雷(1977-), 男, 山东淄博, 博士, 副教授, 研究方向为移动机器人、控制等; 张丽爽(1991-), 女, 哈尔滨, 硕士, 研究方向为移动机器人运动规划。

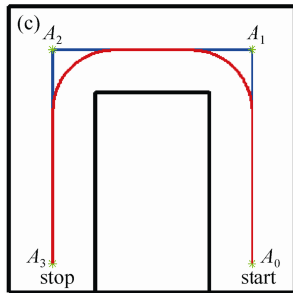
<http://www.china-simulation.com>

• 962 •

这种路径只在位置上连续, 方向不连续, 即包含很多的“尖点”, 如图 1(a)。因此, 当机器人走到两条线段的交点时, 只能停下来, 原地旋转一定的角度, 再继续行驶, 这就造成了机器人运动的不连续性, 这个过程既浪费时间又浪费能量。



(a) 线段序列式路径 (b) 基于 Bezier 曲线的  
即“line-point-line”路径规划方法<sup>[1,4]</sup>



(c) 本文方法规划出的“line-Bezier-line”路径

图 1 路径规划方法比较

Fig.1 The compare of the trajectory planning methods

除了线段序列的路径形式, 还有由线段和圆弧构成的 Dubins 曲线<sup>[4]</sup>, 即“line-arc-line”。这种路径尽管在位置和方向上是连续的, 但曲率不连续, 则角速度不连续。

为得到曲率连续的光滑路径, 很多学者用到了数学曲线, 如 Bezier 系列曲线<sup>[1,4-6]</sup>和  $\eta$  系列曲线<sup>[7-8]</sup>, 这也是目前产生曲率连续路径的常用方法。但是, 目前的方法为生成曲率连续的路径, 从起始位姿到目标位姿的整条路径都是曲线, 这自然就增加了路径的长度(文献[1,4]中的路径规划方法虽然在细节上有所不同, 但在本文认为属于一类规划方法), 如图 1(b)。

因此, 本文针对这个问题提出一种曲率连续且路径长度相对较短的路径规划方法, 即在“line-

point-line”路径中的每两条线段之间用一条 Bezier 曲线来光滑连接, 并通过恰当的曲线生成方法保证了整条路径位置、方向和曲率上的连续, 如图 1(c)。

为了使机器人能够按照规划的路径运动, 需要规划出相应的速度命令。目前常用的一种速度规划方法为“正反向迭代”法<sup>[1,4]</sup>, 本文也采用此规划方法, 但考虑了不同的约束条件。

## 1 Bezier 曲线

Bezier 曲线是由法国雷诺汽车公司的 P. E. Bezier 工程师设计的一种以逼近为基础的参数曲线<sup>[9]</sup>。由于 Bezier 曲线优良的几何性质, 近些年 Bezier 曲线被广泛应用到移动机器人的路径规划中。

一段  $n$  次 Bezier 曲线的表达式为

$$P(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) P_i, \quad u \in [0, 1] \quad (1)$$

$$B_i^n(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

式中:  $u$  是位置参数,  $P_i$  是 Bezier 曲线的控制点。Bezier 曲线的控制点描述了曲线的大体走向, 通过控制曲线的控制点就可以控制曲线的形状, 所有控制点组成的多边形称为曲线的特征多边形。

在规划机器人路径时, 经常用到以下的几何性质:

- 端点性质:

- 1) 曲线起始于第一个控制点, 终止于最后一个控制点。

$$P(0) = P_0, P(1) = P_n \quad (2)$$

- 2) 起始点处和终止点处的 Bezier 曲线分别相切于特征多边形的第一条边和最后一条边。

$$T(0) = n(P_1 - P_0) \quad (3)$$

$$T(1) = n(P_n - P_{n-1})$$

- 3) Bezier 曲线起点处和终点处的二阶导矢分别只与前 3 个控制点和最后 3 个控制点有关。

$$S(0) = n(n-1)(P_2 - 2P_1 + P_0) \quad (4)$$

$$S(1) = n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2})$$

公式(3)中的  $T$  和公式(4)中的  $S$  分别是 Bezier 曲线的一阶和二阶导矢。

- 凸包性: Bezier 曲线  $P(u)$  是各控制点  $P_i$  的凸线性组合, 曲线落在控制点构成的凸包中。当各控制点构成的特征多边形是凸的, 则整条 Bezier 曲线也是凸的, 即曲线没有反曲点(拐点)。
- 几何不变性: Bezier 曲线的位置和几何形状不随坐标系的改变而改变。

## 2 Bezier 曲线的生成算法

假设已知线段序列  $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$  是由一全局规划器产生的由给定起始点到目标点的路径  $\tau$ ,  $A_0$  和  $A_n$  分别为起始点和目标点。

由于路径  $\tau$  存在很多“尖点”, 不满足移动机器人运动学, 机器人无法连续运动。因此, 本文采用一条 Bezier 曲线来生成拐弯路径。

### 2.1 Bezier 曲线次数的选取

采用 Bezier 曲线连接线段来生成光滑路径, 则需曲线与线段在前后连接处位置、方向和曲率都要连续。

根据公式(2)可知, 对于满足位置连续约束条件, 需要两个控制点, 即曲线的第 1 个和最后 1 个控制点; 根据公式(3), 对于满足方向连续条件, 需要 4 个控制点, 除了第 1 个和最后 1 个控制点, 还需第 2 个和倒数第 2 个控制点; 根据曲率公式(5)和公式(4), 对于满足曲率连续约束条件, 除了以上四个控制点, 还需第 3 个和倒数第 3 个控制点。

$$c(u) = \frac{[P'_x(u)P''_y(u) - P''_x(u)P'_y(u)]}{\|P'(u)\|^3} \quad (5)$$

因此, 若要实现 Bezier 曲线对两线段的光滑过渡, Bezier 曲线至少要有 6 个控制点, 由于  $n$  次 Bezier 曲线具有  $n+1$  个控制点, 则 Bezier 曲线的次数至少为 5 次。因此本文采用五次 Bezier 曲线来连接线段序列。

结论 1: 当一条 Bezier 曲线与其他曲线光滑连接, 以实现位置、方向和曲率连续时, Bezier 曲线的次数至少为 5 次。

### 2.2 Bezier 曲线控制点的计算

一条 5 次 Bezier 曲线的表达式为

$$P(u) = (1-u)^5 P_0 + 5(1-u)^4 u P_1 + 10(1-u)^3 u^2 P_2 + 10(1-u)^2 u^3 P_3 + 5(1-u) u^4 P_4 + u^5 P_5 \quad (6)$$

式中:  $u \in [0, 1]$ 。确定一条 5 次 Bezier 曲线, 就是要确定其 6 个控制点。

如图 2, 以连接路段  $A_{i-1}A_i$  和  $A_iA_{i+1}$  为例。设直线  $A_{i-1}A_i$  和  $A_iA_{i+1}$  与横轴正方向夹角分别为  $\alpha$  和  $\beta$ , 对于曲线的起始点和终止点(也可称为“入弯点”和“出弯点”)的位置, 设其距离  $A_i$  的距离分别为  $d_1$  和  $d_2$ , 此距离值可以通过参数优化方法确定, 也可以根据移动机器人转弯能力等实际情况和具体工作环境来确定, 则可得到第一个和第六个控制点。

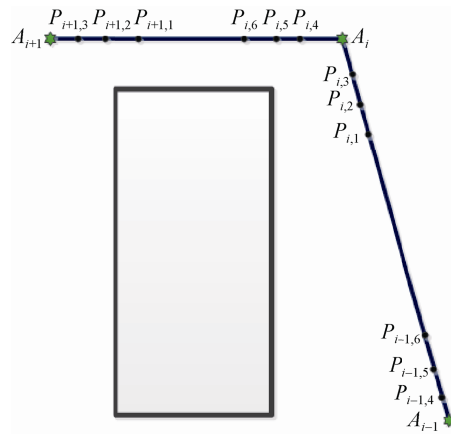


图 2 控制点位置示意  
Fig.2 The location of Control point

$$P_{1,x} = A_{i,x} - d_1 \cos \alpha \quad (7)$$

$$P_{1,y} = A_{i,y} - d_1 \sin \alpha$$

$$P_{6,x} = A_{i,x} + d_2 \cos \beta \quad (8)$$

$$P_{6,y} = A_{i,y} + d_2 \sin \beta$$

曲线在前后连接处一阶导矢  $T$  的方向角分别等于  $\alpha$  和  $\beta$ , 并设控制点  $P_2$  和  $P_5$  距离  $A_i$  的距离分别为  $d_3$  和  $d_4$ , 则根据公式(3)得:

$$P_{2,x} = A_{i,x} - d_3 \cos \alpha \quad (9)$$

$$P_{2,y} = A_{i,y} - d_3 \sin \alpha$$

$$P_{5,x} = A_{i,x} + d_4 \cos \beta \quad (10)$$

$$P_{5,y} = A_{i,y} + d_4 \sin \beta$$

第三、四个控制点的位置决定了曲线与线段的连接处的曲率连续性。由于线段的曲率为 0, 则

Bezier 曲线的首尾处的曲率值都为 0。对于曲线的起始点处,  $c(0)=0$ , 即

$$c(0) = [P'_x(0)P''_y(0) - P''_x(0)P'_y(0)] / \|P'(0)\|^3 \quad (11)$$

根据公式(3)和(4), 可得  $P'_x(0), P'_y(0), P''_x(0), P''_y(0)$  与控制点的关系

$$\begin{aligned} P'_x(0) &= 5(P_{2,x} - P_{1,x}) \\ P'_y(0) &= 5(P_{2,y} - P_{1,y}) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P''_x(0) &= 20(P_{3,x} - 2P_{2,x} + P_{1,x}) \\ P''_y(0) &= 20(P_{3,y} - 2P_{2,y} + P_{1,y}) \end{aligned} \quad (13)$$

将式(12)和(13)带入到(11)中, 整理得

$$c(0) = \frac{4}{5m^3} [(P_{2,x} - P_{1,x})(P_{3,y} - 2P_{2,y} + P_{1,y}) - (P_{2,y} - P_{1,y})(P_{3,x} - 2P_{2,x} + P_{1,x})] \quad (14)$$

式(14)中的  $m = \sqrt{(P_{2,x} - P_{1,x})^2 + (P_{2,y} - P_{1,y})^2}$ 。

若  $P_{2,x} - P_{1,x} \neq 0$ , 则式(14)可整理成

$$P_{3,y} = \frac{P_{2,y} - P_{1,y}}{P_{2,x} - P_{1,x}} P_{3,x} + 2(P_{2,y} - \frac{P_{2,y} - P_{1,y}}{P_{2,x} - P_{1,x}} P_{2,x}) - (P_{1,y} - \frac{P_{2,y} - P_{1,y}}{P_{2,x} - P_{1,x}} P_{1,x}) + \frac{5c(0)m^3}{4(P_{2,x} - P_{1,x})} \quad (15)$$

设控制点  $P_1$  和  $P_2$  所在的直线  $P_1P_2$  表达式为:

$$y = kx + b \quad (16)$$

$$k = \frac{P_{2,y} - P_{1,y}}{P_{2,x} - P_{1,x}} = \tan \alpha$$

则式(15)继续整理成

$$P_{3,y} = kP_{3,x} + b + \frac{5c(0)m^3}{4(P_{2,x} - P_{1,x})} \quad (17)$$

因此, 当  $c(0)=0$  时, 根据式(17)得

$$P_{3,y} = kP_{3,x} + b \quad (18)$$

则可以看出控制点  $P_3$  在直线  $P_1P_2$  上。即当  $c(0)=0$  时, 控制点  $P_1, P_2$  和  $P_3$  三点共线。

若  $P_{2,x} - P_{1,x} = 0$ , 式(14)可整理为

$$P_{3,x} = P_{2,x} - \frac{5m^3 c(0)}{4(P_{2,y} - P_{1,y})} \quad (19)$$

当  $c(0)=0$  时,  $P_{3,x} = P_{2,x}$ , 则控制点  $P_1, P_2$  和  $P_3$  三点共线。

对于曲线的终点处,  $c(0)=0$ , 同理可得控制点  $P_4, P_5$  和  $P_6$  共线。

结论 2: 当 Bezier 曲线的起始点处曲率为 0 时, 曲线的前三个控制点共线; 当 Bezier 曲线的终点处曲率为 0 时, 曲线的最后三个控制点共线。

因此设控制点  $P_3$  和  $P_4$  与  $A_i$  的距离分别为  $d_5$  和  $d_6$ , 则

$$P_{3,x} = A_{i,x} - d_5 \cos \alpha \quad (20)$$

$$P_{3,y} = A_{i,y} - d_5 \sin \alpha$$

$$P_{4,x} = A_{i,x} + d_6 \cos \alpha \quad (21)$$

$$P_{4,y} = A_{i,y} + d_6 \sin \alpha$$

参数  $d = \cup d_i, i = \{1, 2, \dots, 6\}$  是一组需要确定的参数。

### 2.3 参数确定

参数  $d = \cup d_i, i = \{1, 2, \dots, 6\}$  可以通过优化算法来确定, 这里采用序列二次优化算法(SQP)。通常情况下, 当一条路径长度较短且平滑时, 移动机器人跟随这条路径的时间才会较短。因此, 本文将曲线的路径长度作为 SQP 算法的最小目标函数, 路径的平滑性用限制曲率的模值来体现。

为了保证路径的绝对安全性, 要求线段  $P_3P_4$  不能与障碍物相交, 则曲线的特征多边形不会与障碍物相交, 根据 Bezier 曲线的性质, 则曲线不会与障碍物相交。由于系统总是存在误差, 因此要求线段  $P_3P_4$  与障碍物的最小距离  $d(u)$  要大于一定的阈值  $d_{safe}$ 。

为了得到凸的曲线, 根据 Bezier 曲线的性质, 只要曲线的特征多边形是凸的, 则参数之间需要满足一定的大小关系。综上, 此约束优化问题可表达为

$$\min_{d_i \in d} \int_0^1 \sqrt{P'_x(u)^2 + P'_y(u)^2} \quad (22)$$

$$\|c(u)\| \leq c_{\max} \quad (23)$$

$$d(u) \geq d_{safe} \quad (24)$$

$$d_5 \leq d_3 \leq d_1 \quad (25)$$

$$d_6 \leq d_4 \leq d_2 \quad (26)$$

约束(22)~(25)通常不是相互制约的关系, 如当曲率约束(22)满足了, 约束(24)和(25)通常也就自然满足了。

对于参数范围, 前3个控制点必须在线段  $A_{i-1}A_i$  上, 同样后3个控制点必须在线段  $A_iA_{i+1}$  上, 则

$$0 \leq d_1 \leq |A_i P_{i-1,6}| \quad (27)$$

$$0 \leq d_6 \leq |A_i P_{i+1,1}| \quad (28)$$

除了采用优化算法来确定参数大小, 也可以根据图2中控制点的相对位置确定, 也会得到凸的曲率连续的曲线, 结果可能不是最优的, 但是可以接受的。

### 2.4 初始路段与目标路段的处理

本文解决的是移动机器人从任意初始位姿  $(x_s, y_s, \theta_s)$  到任意目标位姿  $(x_g, y_g, \theta_g)$  的轨迹规划问题。对于初始路段, 当机器人初始姿态  $\theta_s$  与初始路段  $A_0A_1$  与横轴正方向夹角不相等时, 机器人应以最大转弯能力运动回到路段  $A_0A_1$  上, 此时机器人的姿态需平行于  $A_0A_1$ , 且曲率为0。假设机器人的初始曲率为0, 则规划方法类似于上述方法。

对于目标路段, 当目标姿态与  $A_{n-1}A_n$  方向不相等时, 机器人应以最大转弯能力运动到目标位姿, 假设目标曲率为0, 处理方法类似于上述方法。

## 3 速度规划

移动机器人的轨迹是其世界坐标系下的位置、姿态与时间的对应。路径只是纯粹的几何信息, 因此还需求取速度命令。本文致力于求解时间最优或近似最优的轨迹, 因此求解的是满足移动机器人运动学和动力学约束的最大可行速度。在求取机器人最大可行速度时, 需要考虑机器人的运动学模型和所受到的约束限制。本文以差速轮式机器人为例, 其他类型的机器人同样适用此规划过程。

### 3.1 移动机器人模型

图3为一典型的差速轮式移动机器人,  $(x, y)$  为机器人在二维空间中的位置信息,  $\theta$  为姿态信息即机器人的朝向与横轴正方向的夹角,  $v$  和  $\omega$  分别为机器人的线速度和角速度,  $\dot{\phi}_L$  和  $\dot{\phi}_R$  为左右主动轮的速度。轮式移动机器人的运动学模型为

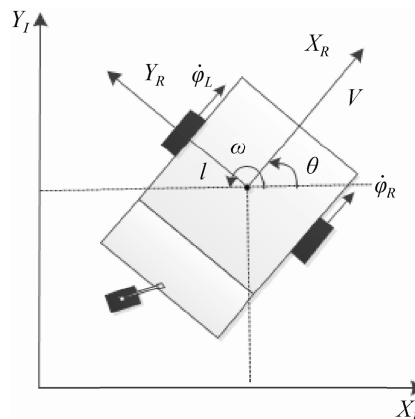


图3 移动机器人结构

Fig.3 The structure of the mobile robot

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (29)$$

线速度、角速度和主动轮轮速的关系为

$$\begin{aligned} v &= r \frac{\dot{\phi}_R + \dot{\phi}_L}{2} \\ \omega &= r \frac{\dot{\phi}_R - \dot{\phi}_L}{2l} \end{aligned} \quad (30)$$

式中:  $r$  为主动轮的半径;  $l$  为两主动轮轮距的一半。

### 3.2 运动学及动力学约束

已知移动机器人运动学模型和路径信息, 便可获得该机器人沿此路径运动时所受到的最大约束, 进而得到所允许的最大限制速度, 然后再考虑加速度约束, 便得到整条路径的最大可行速度。由于,  $\omega = v c$ , 因此只需求最大可行线速度。

在规划移动机器人速度命令时, 需要考虑以下约束:

- 最大线速度: 考虑到机器人的安全性和动力特性, 机器人的最大线速度应受到限制, 且本文只考虑机器人向前运动, 因此, 此约束可表达为:

$$0 \leq v \leq v_{\max} \quad (31)$$

- 最大角速度: 移动机器人有最大转弯能力, 其角速度有最大的模值:

$$0 \leq v \leq \omega_{\max} / c \quad (32)$$

- 最大轮速: 由于移动机器人的动力特性和电机驱动力, 轮速有最大模值, 并结合式(29)得:

$$0 \leq v \leq r \dot{\phi}_{\max} / (1 + |lc|) \quad (33)$$

• 最大加速度约束: 前面三个约束为独立约束, 加速度约束为连续约束, 因为由于加速度约束的存在使得前后速度之间存在着相互制约的关系。加速度约束包括切向加速度约束  $a_t$  和径向加速度约束  $a_r$ 。切向加速度是线速度随时间的变化率, 产生于速度的变化。径向加速度是由于曲线曲率的存在, 机器人不停地在做圆周运动。根据文献[10], 两者的关系为:

$$a_t^2/a_{t\text{Max}}^2 + a_r^2/a_{r\text{Max}}^2 = 1 \quad (34)$$

式(34)中的  $a_{t\text{Max}}$  和  $a_{r\text{Max}}$  分别为最大切向加速度和最大径向加速度。

### 3.3 速度规划过程

有路径规划模块规划出路径  $\hat{P}(u)$ , 将路径细分成若干段, 得到若干规划点  $p_k$ , 计算每个规划点  $p_k$  处的最大可行速度。已知初始速度  $v_0$  和终止速度  $v_g$ , 规划出整条路径每个规划点对应速度的过程分为以下 3 步:

第 1 步: 首先计算出每个规划点  $p_k$  满足独立约束(31)~(33)的最大限制速度;

第 2 步: 从初始速度开始, 向前迭代。因为有加速度的约束, 每个点的速度都受到相邻点速度的制约。从前一个点用最大加速度计算下一个点的速度, 此速度值不能超过第一步得到的最大限制速度。对于规划点  $p_{k-1}$  和  $p_k$  有:

$$v_k \leq v_{k-1} + a_t \Delta t \quad (35)$$

式(35)中的  $\Delta t$  为从  $p_{k-1}$  运动到  $p_k$  所需的时间, 则可推导为:

$$v_k^2 - v_{k-1}^2 \leq 2a_t \Delta s \quad (36)$$

式(36)中的  $\Delta s$  为  $p_{k-1}$  和  $p_k$  之间的距离,  $a_t$  可由以下公式计算:

$$a_t = a_{t\text{Max}} \sqrt{1 - a_r^2/a_{r\text{Max}}^2} \quad (37)$$

$$a_r = v_{k-1}^2 c_{k-1}$$

这样, 便已知  $p_{k-1}$  点的速度  $v_{k-1}$  得到了  $p_k$  点的速度  $v_k$ , 从初始点开始迭代这个过程直至到终点;

第 3 步: 类似于步骤二, 从终止速度往回迭代, 这一步是为了考虑减加速度的约束。

经过 3 步的规划, 便可得到既满足独立约束(31)~(33), 又满足了加速度约束的速度命令。

## 4 仿真结果

假设机器人的初始位姿  $A(0.75, 0.5, \pi/3)$  和目标位姿  $B(4.5, 0.5, 0)$ , 以及初始曲率和终止曲率都为 0, 初始速度和终止速度为 0, 以图 3 中的差速机器人为例, 规划出机器人初始位姿到目标位姿的轨迹。该差速机器人的参数如表 1 所示(机器人参数来源于一 863 项目中的家庭服务机器人)。

表 1 机器人各项参数  
Tab. 1 The parameters of the robot

序号	参数项	参数值
1	主动轮半径 $r$	0.195 5 m
2	主动轮距 $2l$	0.479 7 m
3	最大曲率模值 $ c_{\text{max}} $	$2 \text{ m}^{-1}$
4	最大线速度 $v_{\text{max}}$	0.53 m/s
5	最大角速度 $\omega_{\text{max}}$	0.55 rad/s
6	最大切向加速度 $a_{t\text{max}}$	$0.2 \text{ m/s}^2$
7	最大径向加速度 $a_{r\text{max}}$	$0.4 \text{ m/s}^2$
8	最大轮速 $\dot{\varphi}_{\text{max}}$	$2.2 \text{ rad/s}^2$

首先, 由上述的路径规划算法产生从 A 到 B 的最优路径。如图 4, A 到 B 的线段序列是某一全局规划器产生的线段序列式路径, 红色曲线路径为本文方法产生的曲率连续的光滑路径, 路径长度为 8.338 m。整条路径一共由 8 部分组成: Bezier0-line1-Bezier1-line2-Bezier2-line3-Bezier3-line4。绿色路径为现有常用的基于 5 次 Bezier 的规划方法<sup>[1]</sup>的规划结果, 路径长度为 10.183 6 m。可以看出, 本文方法规划的路径在长度上更短。

图 5 为两条路径相应的曲率值, 可看出本文方法规划的路径的曲率值较小, 即路径轨迹较平滑。

然后由上述的速度规划算法规划出满足移动机器人的运动学和动力学的速度命令。图 6 为跟踪相应曲线路径的速度命令, 可看出, 由于“line-Bezier-line”路径较平滑, 因此速度也较大, 所用时间只需 25.570 6 s, 若采用现有方法, 从点 A 到 B 则需 29.082 5 s。



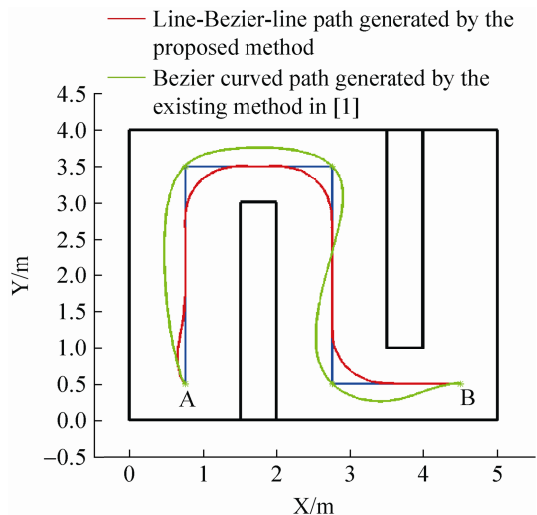


图4 路径的仿真结果

Fig.4 The simulation results of path planning

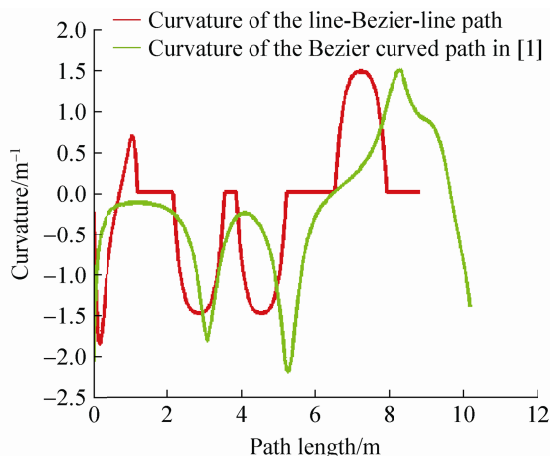


图5 路径曲线的曲率

Fig.5 The curvature of the path curve

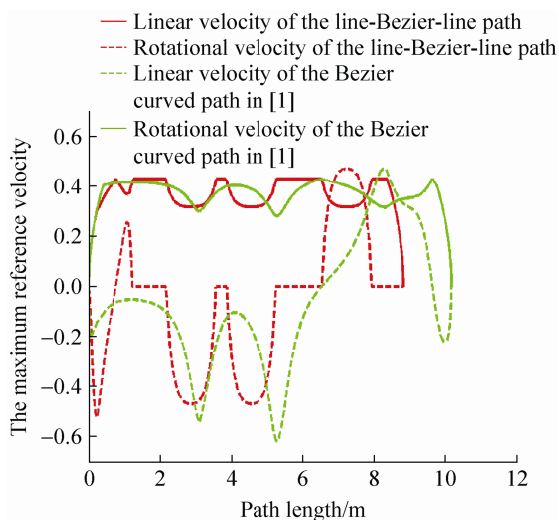


图6 路径曲线的速度

Fig.6 The speed of the path curve

## 5 结论

基于 Bezier 曲线的轨迹规划方法, 产生的路径长度和轨迹所用时间都较短, 机器人也能平稳光滑地跟踪所规划的路径。

### 参考文献:

- [1] Lau B, Sprunk C, Burgard W. Kinodynamic Motion Planning for Mobile Robots Using Splines [C] // International Conference on Intelligent Robots and Systems, St. Louis, USA, 2009: 2427-2433.
- [2] Zhu D, Yan M. Survey on technology of mobile robot path planning [J]. Control and Decision (S1001-0920), 2010, 25(7): 961-967.
- [3] Morales Y, Watanabe A. Including Human Factors for Planning Comfortable Paths [C]//International Conference on Robotics and Automation, Washington, USA, 2015: 6153-6159.
- [4] Dubins L. On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents [J]. Amer. J. Math (S0002-9327), 1957, 79: 497-516.
- [5] Kjaergaard M, Andersen N A, Ravn O. Generic Trajectory Representation and Trajectory Following for Wheeled Robots [C]//International Conference on Robotics and Automation, Hong Kong, China, 2014: 4073-4080.
- [6] Chen C, He Y. Quartic Bezier Curve Based Trajectory Generation for Autonomous Vehicles with Curvature and Velocity Constraints [C] // International Conference on Robotics and Automation, Hong Kong, China, 2014: 6108-6113.
- [7] Piazzì A, Bianco G L, Romano M. 3-splines for the Smooth Path Generation of Wheeled Mobile Robots [J], IEEE Trans. Robotics (S1552-3098), 2007, 23(5): 1089-1095.
- [8] Ghilardelli F, Lini G, Piazzì A. Path Generation Using-splines for a Truck and Trailer Vehicle [J]. IEEE Trans. On Automation Science and Engineering (S1545-5955), 2014, 11(1):187-203.
- [9] Duncan M. Applied Geometry for Computer Graphics and CAD [M]. Berlin: Springer, 2005.
- [10] Lepetic M, Klančar G, Skrjanc I. Time Optimal Path Planning Considering Acceleration Limits [J]. Robotics and Autonomous Systems (S0921-8890), 2003, 45(3): 199-210.