Journal of System Simulation

Volume 30 | Issue 2 Article 7

1-2-2019

High Order Numerical Method for System of Fractional Differential Equations

Luan Xin
1.College of Information Science & Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China; ;

Xin Jia
1.College of Information Science & Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China; ;

Dalei Song
2.College of Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China; ;

Weijia Zhao
3.College of Mathematics & Statistics, Qingdao University, Qingdao 266071, China;;

High Order Numerical Method for System of Fractional Differential Equations

Abstract

Abstract: A *spectral deferred correction method* for classical ordinary differential equations is extended and reconstructed to solve a system of fractional differential equations (FDES) by accelerating the convergence of lower order schemes. Based on *the residual function* and *the error equation* deduced from Volterra integral equations equivalent to the fractional differential equations, a *new high order numerical method* for a system of FDES is constructed according to the idea of *spectral deferred correction*. The proposed method allows that one can use a relatively few nodes to obtain the high accuracy numerical solutions of FDES without the penalty of a huge computational cost due to the non-locality of Caputo derivative. The numerical experiments verify the high accuracy and efficiency of the method.

Keywords

system of fractional differential equations, Caputo derivative, residual function, error equation, spectral deferred correction method

Recommended Citation

Luan Xin, Xin Jia, Song Dalei, Zhao Weijia. High Order Numerical Method for System of Fractional Differential Equations[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(2): 421-426.

第 30 卷第 2 期
2018 年 2 月
系统仿真学报©
Journal of System Simulation
Vol. 30 No. 2
Feb., 2018

分数阶微分方程组的一种高精度数值算法

栾新 [1]，辛佳 [1]，宋大雷 [2]，赵维加 [3]
（1.中国海洋大学信息科学与工程学院，青岛 266100；2.中国海洋大学工程学院，青岛 266100；
3.青岛大学数学与统计学院，青岛 266071）

摘要：根据*谱延迟校正法*的思想来设计求解分数阶微分方程组初值问题的高精度格式，减少离散非局部的分数阶微积分算子时节点的使用量。基于分数阶微分方程和 Volterra 积分方程的等价性，从 Volterra 积分方程中推导出了*残差函数*和*误差方程*，并采用*谱延迟校正*的思想来构造一种求解带有 Caputo 导数算子的分数阶微分方程组初值问题的*高精度数值算法*。该算法可以使用相对较少的节点来获得较高精度的数值解，从而有效地减小了由于 Caputo 导数算子的非局部性特征而带来的巨大计算量。通过数值实验验证了提出的新方法的高精度和有效性。

关键词：分数阶微分方程组；Caputo 导数算子；残差函数；误差方程；谱延迟校正法
中图分类号：O241.8　　文献标识码：A　　文章编号：1004-731X (2018) 02-0421-06
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201802007

High Order Numerical Method for System of Fractional Differential Equations

Luan Xin[1], *Xin Jia*[1], *Song Dalei*[2], *Zhao Weijia*[3]
(1.College of Information Science & Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China; 2.College of Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China; 3.College of Mathematics & Statistics, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

Abstract: A *spectral deferred correction method* for classical ordinary differential equations is extended and reconstructed to solve a system of fractional differential equations (FDES) by accelerating the convergence of lower order schemes. Based on *the residual function* and *the error equation* deduced from Volterra integral equations equivalent to the fractional differential equations, a *new high order numerical method* for a system of FDES is constructed according to the idea of *spectral deferred correction*. The proposed method allows that one can use a relatively few nodes to obtain the high accuracy numerical solutions of FDES without the penalty of a huge computational cost due to the non-locality of Caputo derivative. The numerical experiments verify the high accuracy and efficiency of the method.

Keywords: system of fractional differential equations; Caputo derivative; residual function; error equation; spectral deferred correction method

引言

分数阶微积分的历史几乎和整数阶微积分的历史一样悠久[1]。近年来，分数阶微积分被广泛地应用到自然科学和工程计算[2-4]的诸多领域中，如控制理论、粘弹性材料、电磁学、反常扩散、水文地理学等，充分展现出了分数阶微积分在建模复杂动力系统中的优越性和不可替代性。

与整数阶微分方程一样，分数阶微分方程的解析解也很难求得[5]，所以不得不借助数值方法来求解。因此，研究分数阶微分方程的数值算法成为一

收稿日期：2015-12-31　　修回日期：2016-05-08；
基金项目：国家自然科学基金(11426141);
作者简介：栾新(1969-)，女，山东龙口，博士，教授，研究方向为图形图像处理；辛佳(1988-)，女，山东青岛，博士生，研究方向为图形图像处理；宋大雷(1971-)，男，黑龙江哈尔滨，博士，教授，研究方向为机器视觉与图像处理技术。

个热点。至今，已提出了许多经典的数值方法[6-17]：Podlubny[6]提出用矩阵形式来表示分数阶微积分的离散，使用这种三角带状矩阵的方法可明显简化分数阶微分/积分方程的数值求解过程；Diethelm 等[7]提出一种 Adams 型的预估-校正方法，给出了这种算法的误差分析，其中包括在不同光滑性假设下的误差界以及误差的渐近展开式，并指出只要解析解 $y(t)$是二次连续可微的，这种方法就至少是一阶收敛的；林等[8]在 Lubich 方法的基础上，提出了一种线性多步法来求解分数阶微分方程初值问题，并证明了该多步法的相容性、收敛性和稳定性；Kumar 等[9]利用求解 Volterra 方程的 block-by-block 方法设计了一类新的分数阶 block-by-block 方法，数值算例也证明了此方法的有效性和稳定性。但遗憾的是：他们没有证明这种方法的误差估计和收敛阶。因此，随后黄等[10]在给出的一些假设条件下，证明了分数阶 block-by-block 方法的误差估计和收敛精度，并用数值实验进行了验证。实验表明，对任意的分数阶指标 $\alpha>0$，分数阶 block-by-block 方法至少是 3 阶的。李[11]推导出了分数阶积分的 Chebyshev 小波矩阵，并利用它来求解了非线性分数阶微分方程。Scherer 等[12]对含有 Grunwald-Letnikov 分数阶导数的微分方程采用有限差分法进行了计算，并给出了格式的绝对稳定性分析和误差估计。

众所周知，用数值方法求解分数阶微分方程的关键就是如何离散非局部的分数阶微积分算子。由于分数阶微积分算子的“记忆”特性，当节点数 n 很大时，会使得计算速度降低、存储量增大。为了克服这一难题，很多专家学者为此做了大量工作。Yuste 等[13]提出了一种非等步长的隐式有限差分法来离散 Caputo 导数。在本文中，我们将利用谱延迟校正法[14-15]的思想来设计求解分数阶微分方程初值问题的高精度格式，减少离散非局部的分数阶微积分算子时节点的使用量，并将该方法运用到如下分数阶微分方程组的求解中，

$$\begin{cases} D_*^{q_1} y_1(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)), \\ D_*^{q_2} y_2(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)), \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ D_*^{q_n} y_n(t) = f_n(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)), \end{cases}$$

式中：$0 < q_i \leqslant 1,\quad i = 1,2,\cdots,n,\ D_*^{q_i}$ 是 q_i阶的 Caputo 分数阶导数算子，其定义为

$$D_*^{q_i} y_i(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q_i)} \int_0^t (t-\tau)^{-q_i} \frac{dy_i(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

下面为了便于论述，我们以单个分数阶微分方程为例来给出高精度数值格式的构造。

1 残差函数和误差方程

现考虑下列分数阶微分方程的初值问题

$$D_*^q y(t) = f(t, y(t)) \tag{1}$$

$$y(0) = y_0 \tag{2}$$

式中：$0 \leqslant t \leqslant T,\quad 0 < q \leqslant 1.$

设 $f(t,y)$是连续函数，则由文献[16]中的引理 1，初值问题(1)(2)与下面的第二类 Volterra 积分方程等价：

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\tau)^{q-1} f\left(\tau, y(\tau)\right) d\tau \tag{3}$$

显然，若 $0<q<1$，式(3)中的积分核是奇异的；若 $q=1$，(3)式即为经典的 Picard 积分方程。

现假设通过某低阶方法获得方程(3)的一个近似解为 $y^0(t)$，则可定义残差函数：

$$\varepsilon(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\tau)^{q-1} f\left(\tau, y^0(\tau)\right) d\tau - y^0(t) \tag{4}$$

和误差函数：

$$\delta(t) = y(t) - y^0(t) \tag{5}$$

式中：$y(t)$是初值问题(1)(2)的精确解。

把(5)式代入(3)式，则(3)式可以改写为

$$y^0(t) + \delta(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\tau)^{q-1} f\left(\tau, y^0(\tau) + \delta(\tau)\right) d\tau,$$

进一步整理可得，

$$\delta(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\tau)^{q-1} \left[f\left(\tau, y^0(\tau) + \delta(\tau)\right) - f\left(\tau, y^0(\tau)\right) \right] d\tau + \varepsilon(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\tau)^{q-1} G\left(\tau, y^0(\tau), \delta(\tau)\right) d\tau + \varepsilon(t). \tag{6}$$

https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal/vol30/iss2/7
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201802007

在方程(6)中，一旦确定了残差函数，就可以使用分数阶 Adams 法[7]等低阶方法进行求解。因而，我们将针对如何采用高阶精度的插值法和求积法来计算 $\varepsilon(t_i)$进行详细地阐述。

2 残差函数的谱近似

设 $s_0 < s_1 < \cdots < s_n$ 是区间$[-1,1]$上的 $n+1$ 个 Gauss-Legendre-Lobatto 点，其中 $s_0=-1$，$s_n=1$。由于初值问题(1-2)是定义在区间$[0,T]$上的，则可通过下述线性变换，得到$[0,T]$上的 $n+1$ 个 Gauss 节点：

$$t_k = \frac{T}{2}s_k + \frac{T}{2}, \quad k = 0,1,\cdots,n.$$

现使用下述分数阶显式 Euler 法来计算初值问题(1)(2)的初始近似解 $y^0(t)$，对 $k = 0,1,\cdots,n-1$,

$$y_{k+1} = y_0 + \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1} f(t_j, y_j) \tag{7}$$

式中：y_{k+1} 是解 $y(t)$在节点 $t_{k+1}\left(k = 0,1,\cdots,n-1\right)$ 处的近似值，系数 $b_{j,k+1}$ 由下式计算：

$$b_{j,k+1} = \frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(\left(t_{k+1}-t_j\right)^q - \left(t_{k+1}-t_{j+1}\right)^q\right), \quad j = 0,1,\cdots,k.$$

在求得数值解 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 后，在节点 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 上进行 Lagrange 插值，从而可获得初始近似解 $y^0(t)$为

$$y^0(t) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(t) \tag{8}$$

且

$$f\left(t, y^0(t)\right) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(t) \tag{9}$$

式中：$L_k(t)$是 n 次的 Lagrange 插值多项式；$f_k = f\left(t_k, y^0(t_k)\right)$.

在实际计算中，由于需要用到 Lagrange 插值多项式的 Riemann-Liouville 积分，所以，$L_k(t)$还需进行如下转换：

$$L_k(t) = \sum_{j=0}^{n} c_{j,k} t^j, \quad k = 0,1,\cdots,n$$

式中：系数 $c_{j,k}$ 可以通过下述矩阵计算：

$$\begin{pmatrix} t_0^0 & t_0^1 & \cdots & t_0^n \\ t_1^0 & t_1^1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n^0 & t_n^1 & \cdots & t_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,0} & c_{n,1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix} = I_{n+1},$$

这里，I_{n+1} 是 $n+1$ 阶的单位矩阵。

由(8)式，$L_k(t)$的分数阶积分

$$\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-\tau)^{q-1} L_k(\tau)\,d\tau = \sum_{j=0}^{n} c_{j,k}\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-\tau)^{q-1}\tau^j\,d\tau = \sum_{j=0}^{n} c_{j,k}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+q)}t^{j+\alpha} \tag{10}$$

把(9)式和(10)式代入(4)式，再由(10)式，残差函数(4)可近似为

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-\tau)^{q-1} f\left(\tau, y^0(\tau)\right)d\tau - y^0(t) = \\ & y_0 + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-\tau)^{q-1}\sum_{k=0}^{n} f_k L_k(\tau)\,d\tau - y^0(t) = \\ & y_0 + \sum_{k=0}^{n} f_k \sum_{j=0}^{n} c_{j,k}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{q-1}\tau^j\,d\tau - y^0(t) = \\ & y_0 + \sum_{k=0}^{n} f_k \sum_{j=0}^{n} c_{j,k}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+q)}t^{j+q} - y^0(t)\end{aligned} \tag{11}$$

3 谱延迟校正法

一旦由(11)式计算出残差函数后，误差方程(6)就可以用分数阶 Adams 法[7]来求解，也就是说，对 $k = 0,1,\cdots,n-1$,

$$\begin{cases}\delta_{k+1}^p = \varepsilon\left(t_{k+1}\right) + \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1} G\left(t_j, y^0\left(t_j\right), \delta_j\right), \\ \delta_{k+1} = \varepsilon\left(t_{k+1}\right) + \left(\sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1} G\left(t_j, y^0\left(t_j\right), \delta_j\right) + \right. \\ \qquad \left. a_{k+1,k+1} G\left(t_{k+1}, y^0\left(t_{k+1}\right), \delta_{k+1}\right)\right)\end{cases} \tag{12}$$

这里，δ_{k+1}^p 是预估值，式中的系数 $a_{j,k+1}$ 定义为：

$$a_{0,k+1} = \omega_{0,k+1}, \; a_{k+1,k+1} = \gamma_{k+1,k+1},$$
$$a_{j,k+1} = \gamma_{j,k+1} + \omega_{j,k+1}, \quad j = 1,2,\cdots k,$$

第 30 卷第 2 期 系统仿真学报 Vol. 30 No. 2
2018 年 2 月 Journal of System Simulation Feb., 2018

式中：$\gamma_{j+1,k+1}=\dfrac{1}{t_{j+1}-t_j}\left(\dfrac{\left(t_{k+1}-t_j\right)^{q+1}}{\Gamma(q+2)}-\dfrac{\left(t_{k+1}-t_{j+1}\right)^{q+1}}{\Gamma(q+2)}+\dfrac{\left(t_{k+1}-t_{j+1}\right)^{q}\left(t_j-t_{j+1}\right)}{\Gamma(q+1)}\right),$

$$\omega_{j,k+1}=\frac{1}{t_{j+1}-t_j}\left(\frac{\left(t_{k+1}-t_{j+1}\right)^{q+1}}{\Gamma(q+2)}-\frac{\left(t_{k+1}-t_j\right)^{q+1}}{\Gamma(q+2)}+\frac{\left(t_{k+1}-t_j\right)^{q}\left(t_{j+1}-t_j\right)}{\Gamma(q+1)}\right).$$

设初始近似向量 $\mathbf{Y}^{[0]}=\left(y_1,y_2,\cdots y_n\right)^T$，误差向量 $\boldsymbol{\delta}=\left(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\right)^T$，则有

$$\mathbf{Y}^{[1]}=\mathbf{Y}^{[0]}+\boldsymbol{\delta}.$$

得到新的解 $\mathbf{Y}^{[1]}$后，可使用上述方法计算新的残差函数和误差，重复这个过程，直到求得初值问题(1-2)的高精度解。谱延迟校正法的过程如下：

Step1：

设参数 $etol>0$，使用分数阶显式 Euler 法（7）来计算位于区间 $[0,T]$ 上的节点 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 处的初始解 $y_k^{[0]}\approx y\left(t_k\right)$。

Step2：由(11)式计算残差函数的近似值 $\varepsilon_k\left(k=1,2,\cdots,n\right)$。

Step3：使用分数阶 Adams 法（12）来求解误差方程，并计算出其近似值 $\delta_k\left(k=1,2,\cdots,n\right)$。

Step4：计算新的近似解 $y_k^{[1]}=y_k^{[0]}+\delta_k(k=1,2,\cdots,n)$。若 $\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty<etol$，则停止，且近似值 $y_k^{[1]}$ 就是我们最终得到的初值问题(1)(2)的解；若 $\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty>etol$，令 $y_k^{[0]}=y_k^{[1]}$，回到 Step2。

可以证明，只要没有超过所采用的插值多项式和求积公式的精度，算法中的每一次校正迭代都能够提高数值解的精度。

4 数值实例

在这一节中，我们用数值实例来验证本文所提出的高精度数值方法。在这些计算中，统一设定参数 $etol=1e-14$。进行实验的计算机型号是 Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU P7350 2.00 GHz，内存是 2 GB，使用的软件版本是 Matlab 2010b。

例.考虑下述分数阶微分方程组

$$\begin{cases} D^{q_1}y_1(t)=\dfrac{\Gamma(5+q_1)}{24}t^4+t^{8+2q_1}-y_1^2(t)+\left(\dfrac{3}{2}t^{q_1/2}-t^4\right)^3-y_2^{3/2}(t), \\ D_*^{q_2}y_2(t)=\dfrac{40320}{\Gamma(9-q_2)}t^{8-q_2}-3\dfrac{\Gamma(5+q_2/2)}{\Gamma(5-q_2/2)}t^{4-q_2/2}+\dfrac{9}{4}\Gamma(1+q_2)+\left(\dfrac{3}{2}t^{q_2/2}-t^4\right)^3-y_2^{3/2}(t)+t^{12+3q_2}-y_1^3(t), \end{cases}$$

初始条件为 $y_1(0)=y_2(0)=0$。此初值问题的真解为

$$\begin{cases} y_1(t)=t^{4+q_1}, \\ y_2(t)=t^8-3t^{4+q_2/2}+\dfrac{9}{4}t^{q_2}. \end{cases}$$

在表 1、表 2 中，对于不同的节点数 n 和分数阶指标 α，我们给出了使用本文所提高精度算法和预估-校正法[7]求解时相应的迭代步数 *Iter*、CPU 的运行时间 *Time* (单位：s)、以及所求得的数值解与真解 $y_1(t)$、$y_2(t)$间的误差的最大范数 *Error*1、*Error*2。通过比较可以看出，当使用本文提出的方法求解时，只需很少的节点，就可以达到很高的精度，但由此产生的计算量和计算时间却是很小的。

表 1 采用不同节点数和分数阶指标时，本文所提高精度算法的各项运行指标

Tab. 1 Performance of spectral deferred correction method with different node number and fractional index

n	q_1=q_2=0.5				q_1=q_2=0.8			
	Iter.	Time[s]	Error1	Error2	Iter.	Time[s]	Error1	Error2
7	18	1.126 711	1.608 308e-6	4.064 202e-6	15	0.585 209	1.525 502e-7	1.418 366e-6
8	18	1.136 405	1.186 658e-7	3.816 067e-7	14	0.621 153	7.911 841e-8	7.695 817e-7
9	17	1.204 004	5.174 885e-8	1.748 159e-7	13	0.667 354	2.788 936e-8	3.049 835e-7
10	23	1.384 072	2.105 094e-8	7.602 795e-8	12	0.720 014	1.047 977e-8	1.271 294e-7
11	18	1.442 811	9.052 285e-9	3.505 575e-8	13	0.819 669	4.245 840e-9	5.715 328e-8
12	17	1.500 928	6.986 400e-9	2.013 441e-8	13	0.876 569	4.680 621e-9	2.791 918e-8

表 2 采用不同节点数和分数阶指标时，预估-校正法[7]的各项运行指标

Tab. 2 Performance of fractional predictor-corrector approach with different node number and fractional index

n	$q_1=q_2=0.5$			$q_1=q_2=0.8$		
	Time[s]	Error1	Error2	Time[s]	Error1	Error2
10	0.033 429	6.431 505e-2	8.037 747e-2	0.031 711	4.359 034e-2	4.841 162e-2
20	0.064 596	3.260 715e-2	4.506 307e-2	0.067 586	1.280 250e-2	1.583 297e-2
40	0.190 613	1.087 238e-2	1.628 062e-2	0.192 109	3.531 471e-3	4.656 207e-3
80	0.705 205	3.411 599e-3	5.423 319e-3	0.704 164	9.673 878e-4	1.329 881e-3
160	2.747 921	1.083 383e-3	1.796 864e-3	2.702 947	2.663 694e-4	3.771 247e-4
320	10.592 938	3.522 695e-4	6.020 112e-4	10.600 488	7.383 777e-5	1.068 935e-4

从图 1 和图 2 也可以发现，误差快速收敛到机器精度，同时在节点数 n 增加时，误差呈现出指数式递减的趋势。

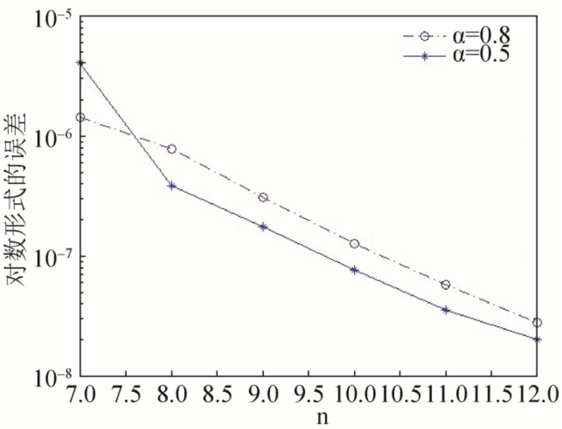

图 1 n 与 α 不同时的 $y_2(t)$ 误差

Fig. 1 Errors of $y_2(t)$ for different n and α

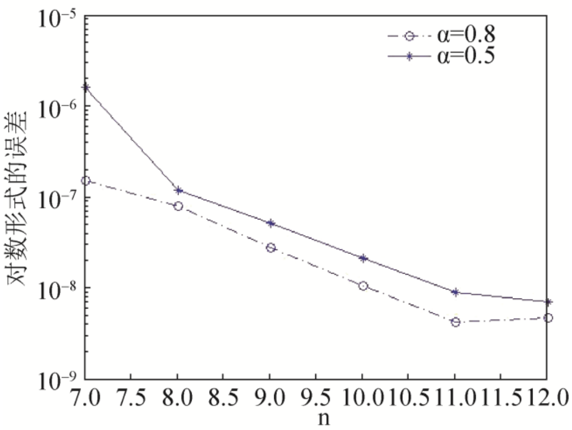

图 2 n 与 α 不同时的 $y_1(t)$ 误差

Fig. 2 Errors of $y_1(t)$ for different n and α

5 结论

本文给出了求解分数阶微分方程组初值问题的谱延迟校正法，通过数值实验发现，使用该方法求得的数值解精度高，且相应的计算量小。但是，关于该算法的理论分析等问题还需进一步研究。

参考文献:

[1] K B Oldham, J Spanier. The Fractional Calculus[M]. New York: Academic Press, 1974.

[2] S Bhalekar, V Daftardar-Gejji, D Baleanu, et al. Fractional Bloch Equation with Delay[J]. Comput. Math. Appl. (S0898-1221), 2011, 61: 1355-1365.

[3] G S Li, W J Gu, X Z Jia. Numerical Inversions for Space-dependent Diffusion Coefficient in the Time Fractional Diffusion Equation[J]. J. Inverse III-Prosed Probl. (S0928-0219), 2012, 20: 339-266.

[4] G S Li, D L Zhang, X Z Jia, et al. Simultaneous Inversion for the Space-dependent Diffusion Coefficient and the Fractional Order in the Time-fractional Diffusion Equation[J]. Inverse Problems (S0266-5611), 2013, 29(6): 36.

[5] A A Kilbas, H M Srivastava, J J Trujillo. Theory and Applications of Fractional Differential Equations[M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.

[6] I Podlubny. Matrix Approach to Discrete Fractional Calculus[J]. Fractional Calculus and Applied Analysis (S1311-0454), 2000, 3(4): 359-386.

[7] K Diethelm, N J Ford, A D Freed. Detailed Error Analysis for A Fractional Adams Method[J]. Numer. Algorithms (S1017-1398), 2004, 36: 31-52.

[8] R Lin, F Liu. Fractional High Order Methods for the Nonlinear Fractional Ordinary Differential Equation[J]. Nonlinear Dynam (S0924-090X), 2007, 66: 856-869.

[9] P Kumar, O P Agrawal. An Approximate Method for Numerical Solution of Fractional Differential Equations [J]. Singal Process (S0165-1684), 2006, 86: 2602-2610.

[10] J F Huang, Y F Tang, L Vazquez. Convergence Analysis of A Block-by-Block Method for Fractional Differential

Equations[J]. Numer. Math. Theor. Meth. Appl. (S1004-8979), 2012, 5(2): 229-241.

[11] Y L Li. Solving a Nonlinear Fractional Differential Equation Using Chebyshev Wavelets[J]. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. (S1007-5704), 2010, 15: 2284-2292.

[12] R Scherer, S L Kalla, Y F Tang, et al. The Grunwald-Letnikov Method for Fractional Differential Equations[J]. Comp. Math. Appl. (S0898-1221), 2011, 62: 902-917.

[13] S B Yuste, J Quintana-Murillo. A Finite Difference Method with Non-Uniform Timesteps for Fractional Diffusion Equations[J]. Comput. Phys. Commun. (S0010-4655), 2012, 183: 2594-2600.

[14] A Dutt, L Greengard, V Rokhlin. Spectral Deferred Correction Methods for Ordinary Differential Equations [J]. Bit Numerical Mathematics (S0006-3835), 2000, 40(2): 241-266.

[15] J Huang, J Jia, M Minion. Accelerating the Convergence of Spectral Deferred Correction Methods[J]. J. Comput. Phys. (S0021-9991), 2006, 214: 633-656.

[16] K Diethelm, N J Ford. Analysis of Fractional Differential Equations[J]. J. Math. Anal. Appl. (S0022-247X), 2002, 265: 229-248.

(上接第 420 页)

[13] Austin L G, Brame K. A comparison of the bond method for sizing wet tumbling mills with a size-mass balance simulation model[J]. Powder Technology (S0032-5910), 1983, 34(2): 261-274.

[14] Capece M, Bilgili E, Dave R. Identification of the breakage rate and distribution parameters in a non-linear population balance model for batch milling[J]. Powder Technology (S0032-5910), 2011, 208(1): 195-204.

[15] Ö Genç. Analysis of grinding media effect on specific breakage rate function of particles in a full-scale open circuit three-compartment cement ball mill[J]. Minerals Engineering (S0892-6875). 2015, 81(1): 10-17.

[16] Luís Marcelo Tavares, Rodrigo M de Carvalho. Modeling breakage rates of coarse particles in ball mills [J]. Minerals Engineering (S0892-6875), 2009, 22(7/8): 650-659.

[17] Reid K J. A solution to the batch grinding equation[J]. Chem Eng Sci (S1385-8947), 1965, 20: 953-963.

[18] 尹蒂, 李松仁. 选矿数学模型[D]. 长沙: 中南工业大学, 1993: 128-162.
Yin D, Li S R. mathematical models of mineral processing[D]. Changsha: Central South University of Technology, 1993: 128-162.