

1-2-2019

## Correlation Analysis Model of Generalized Stochastic System Dynamics

Guangqiu Huang

*School of Management, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China;*

Qiuqin Lu

*School of Management, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

## Correlation Analysis Model of Generalized Stochastic System Dynamics

### Abstract

**Abstract:** In order to solve the problem of system dynamics (SD) simulation and correlation analysis of complex system containing random possesses, *the generalized stochastic Petri-net (GSPN) is expanded into the generalized stochastic function Petri-net (GSFPN), and a GSFPN-SD model is proposed by combining GSFPN and SD. The GSFPN-SD model has the following advantages: (1) the process of state evolution is more clear by firing transits; (2) it describes the autonomous dynamic evolution of complex system more realistically as system's dynamic change is driven by events; (3) transits are fired by tokens' movement, thus the system states can conditionally or unconditionally transit; (4) dynamic simulation and correlation analysis of complicated systems containing some delayed transits possess can be executed.* Case studies show that, compared with SD, the GSFPN-SD model has stronger and more comprehensive ability of describing the simulation and correlation analysis of complex system.

### Keywords

system dynamics, Petri-net, system simulation, correlation analysis, generalized stochastic Petri-net

### Recommended Citation

Huang Guangqiu, Lu Qiuqin. Correlation Analysis Model of Generalized Stochastic System Dynamics[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(1): 69-79.

## 广义随机系统动力学相关性分析模型

黄光球, 陆秋琴

(西安建筑科技大学 管理学院, 陕西 西安 710055)

**摘要:** 为解决存在随机现象的系统动力学模拟与相关性分析问题, 将广义随机Petri网(GSPN)进行扩展, 建立广义随机函数Petri网GSFPN, 将GSFPN与SD模型相结合, 提出了一种GSFPN-SD模型, 该模型具有如下优势: (1) 通过变迁的激发, 使得状态的演变的过程更明确; (2) 系统变化动态性是通过事件激发的, 从而更逼真地描述了复杂系统的自主动态演变行为; (3) 变迁的激发是通过托肯的移动而实现的, 从而实现了系统可以有条件或无条件转移; (4) 可以实现部分变迁具有延时特征, 而其他变迁没有延时特征的系统动力学模拟与相关性分析。例子研究表明, GSFPN-SD模型要比SD模型具有更强、更全面对复杂系统的描述模拟与相关性分析能力。

**关键词:** 系统动力学; Petri网; 系统模拟; 相关性分析; 广义随机Petri网

中图分类号: TP391.9

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X(2018)01-0069-11

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201801009

## Correlation Analysis Model of Generalized Stochastic System Dynamics

Huang Guangqiu, Lu Qiuqin

(School of Management, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

**Abstract:** In order to solve the problem of system dynamics (SD) simulation and correlation analysis of complex system containing random possesses, the generalized stochastic Petri-net (GSPN) is expanded into the generalized stochastic function Petri-net (GSFPN), and a GSFPN-SD model is proposed by combining GSFPN and SD. The GSFPN-SD model has the following advantages: (1) the process of state evolution is more clear by firing transits; (2) it describes the autonomous dynamic evolution of complex system more realistically as system's dynamic change is driven by events; (3) transits are fired by tokens' movement, thus the system states can conditionally or unconditionally transit; (4) dynamic simulation and correlation analysis of complicated systems containing some delayed transits possess can be executed. Case studies show that, compared with SD, the GSFPN-SD model has stronger and more comprehensive ability of describing the simulation and correlation analysis of complex system.

**Keywords:** system dynamics; Petri-net; system simulation; correlation analysis; generalized stochastic Petri-net

## 引言

系统动力学模型(System Dynamics, SD)<sup>[1]</sup>被誉为



收稿日期: 2015-11-25 修回日期: 2016-03-09;  
基金项目: 教育部人文社会科学研究规划基金(15YJA910002), 陕西省社会科学基金(2014P07), 西安市软科学研究项目(SF201505(09)), 陕西省自然科学基金基础研究计划-重点项目(2015JZ010);  
作者简介: 黄光球(1964-), 男, 湖南桃源, 博士, 教授, 研究方向为系统仿真。

为实际系统的实验室, 是美国麻省理工学院(MIT) J. W. Forrester 教授提出的一种运用结构、功能、历史相结合的方法, 借助于计算机仿真而定量地研究非线性、多重反馈、复杂时变系统的系统分析技术<sup>[2]</sup>。SD 加强了与控制理论、系统科学、结构稳定性分析、灵敏度分析、参数估计、最优化技术应用等方面的联系, 已在世界范围内广泛地传播和应用, 获

<http://www.china-simulation.com>

得了许多新的发展<sup>[3-4]</sup>。多年来,大量学者采用SD方法来研究社会经济问题,涉及到社会的方方面面,相应的研究至今依然层出不穷。近年来,SD模型应用研究主要有:航空客流量预测<sup>[5]</sup>、石油需求预测<sup>[6]</sup>、粮食需求分析<sup>[7]</sup>、港口经济可持续发展研究<sup>[8-9]</sup>、水资源需求分析<sup>[10]</sup>、配电网规划动态综合评价<sup>[11]</sup>、供应链仿真分析<sup>[12]</sup>、库存系统动力机制研究<sup>[13]</sup>、居民收入与GDP的关系研究<sup>[14]</sup>、煤炭应急储备研究<sup>[15]</sup>,等等。

然而,尽管SD模型已在预测领域取得广泛应用,但该模型仍存在如下缺点:

(1) SD模型的动态性是计算驱动的。也就是SD模型的动态性是通过计算才有所体现,这与复杂系统的自主动态演变有所差异。

(2) SD模型图中的顶点的含义是定性的,没有任何一个复杂系统所拥有的基本要素——系统状态——这一基本含义。

(3) SD模型图中每个顶点间的转换是无条件的。然而,在现实世界确实存在这样的复杂系统,其中某个节点(对应于SD图中的顶点)转移到其他某个节点是有条件的。

(4) SD模型难以描述具有随机延迟特征的复杂系统动态行为。

为了解决上述SD模型中存在的问题,本文将广义随机Petri网(Generalized Stochastic Petri-net, GSPN)<sup>[16]</sup>进行扩充,建立了广义随机函数Petri网(Generalized Stochastic Function Petri-net, GSFPN),将GSFPN和SD相结合,从一个新的角度提出了一种新的系统动力学描述方法,即基于GSFPN的系统动力学模型,简称GSFPN-SD模型。该模型既保留了SD模型全部特征,又能融入了GSPN的所有特征;既具有稳固的数学基础,又使SD的一些悬而未决的难题迎刃而解,适合于进行延迟具有随机特征复杂系统模拟、相关性分析和行为预测。

## 1 广义随机函数Petri网的定义

为了使GSPN能够描述SD模型,需要对基本

GSPN进行扩充。下面给出广义随机函数Petri网GSFPN的定义。

**定义1** 广义随机函数Petri网GSFPN的结构为一个14要元:

$GSFPN=(P, T; A, M, M_0, I, O, \lambda, S_P, S_T, F, G, H)$

(1)  $P=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 是一个库所的有限集合; $T=\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ 是一个变迁的有限集合; $P \cap T = \emptyset$ ; $A$ 为流关系<sup>[16]</sup>; $M=\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ 是托肯的有限集合, $M_0$ 为 $M$ 的初始值集合; $I: P \rightarrow T$ 为输入矩阵, $I=[\delta_{ij}]_{n \times m}$ , $\delta_{ij}$ 为逻辑量, $\delta_{ij} \in \{0, 1\}$ ,当 $p_i$ 是 $t_j$ 的输入时, $\delta_{ij}=1$ ,当 $p_i$ 不是 $t_j$ 的输入时, $\delta_{ij}=0$ , $i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$ ; $O: T \rightarrow P$ 为输出矩阵, $O=[\gamma_{ij}]_{n \times m}$ , $\gamma_{ij}$ 为逻辑量, $\gamma_{ij} \in \{0, 1\}$ ,当 $p_i$ 是 $t_j$ 的输出时, $\gamma_{ij}=1$ ,当 $p_i$ 不是 $t_j$ 的输出时, $\gamma_{ij}=0$ , $i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$ ; $\lambda=\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ 为变迁平均激发速率集合, $\lambda_i \in \lambda$ 是变迁 $t_i \in T$ 的平均激发速率,表示在可激发的情况下单位时间内平均激发次数,单位是次数/单位时间。特别地,有时激发速率依赖于托肯,是托肯的函数。平均激发速率的倒数 $\tau_i=1/\lambda_i$ 称为变迁 $t_i$ 的平均激发延时<sup>[16]</sup>; $S_P=\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ 为库所集 $P$ 的状态的集合; $S_T=\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ 为变迁集 $T$ 的状态的集合; $F$ 为库所状态依时间变化函数的集合, $F=\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ ; $G=\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ 为库所托肯值依状态变化函数; $H$ 为变迁状态依时间变化函数的集合, $H=\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ 。

(2)  $A$ 中允许有禁止弧,禁止弧仅存在于从位置到变迁的弧。禁止弧所连接的位置的原可激发条件变为不可激发条件,原不可激发条件变为可激发条件,且在相连变迁激发时,没有托肯从相连的位置中移出。

(3) 变迁集 $T$ 划分为两个子集: $T=T_i \cup T_i$ , $T_i \cap T_i = \emptyset$ ,延时(timed)变迁集 $T_i=\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ ,瞬时(immediate)变迁集 $T_i=\{t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_m\}$ ,与延时变迁集相关联的平均变迁激发速率集合为 $\lambda=\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ 。

(4) 为在一个托肯  $M$  下多个可激发瞬时变迁定义一个随机开关, 确定它们之间实施概率选择。

在 GSFPN 中, 延时变迁的激发速率同 SPN 一样<sup>[16]</sup>, 也可能依赖于托肯。

**定义 2** 对于一个广义随机函数 Petri 网 GSFPN= $(P, T; A, M, M_0, I, O, \lambda, S_P, S_T, F, G, H)$ , 若对任一库所  $p_i \in P$  和任一变迁  $t_j \in T$  来说, 其托肯值  $M_i \in M$  是其状态  $S_i \in S_P$  的函数, 且库所  $p_i$  和变迁  $t_j$  在时期  $t+1$  的状态与时期  $t$  的状态有关联关系, 即

$$\begin{aligned} S_i^{t+1} &= f_i(S_i^t), i=1, 2, \dots, n \\ T_j^{t+1} &= h_j(T_j^t), j=1, 2, \dots, m \\ M_i^{t+1} &= g_i(S_i^{t+1}), i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

则称该类型的 GSFPN 为 SM 型 SFPN, 简称 SM\_GSFPN。

**定义 3** 对于一个广义随机函数 Petri 网 GSFPN= $(P, T; A, M, M_0, I, O, \lambda, S_P, S_T, F, H)$ , 若对任意一个库所  $p_i \in P$  和任一变迁  $t_j \in T$  来说, 来说, 其托肯值  $M_i \in M$  不是其状态  $S_i \in S$  的函数, 但库所  $p_i$  和变迁  $t_j$  在时期  $t+1$  的状态与时期  $t$  的状态有关联关系, 即

$$\begin{aligned} S_i^{t+1} &= f_i(S_i^t), i=1, 2, \dots, n \\ T_j^{t+1} &= h_j(T_j^t), i=1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

则称该类型的 GSFPN 为 S 型 GSFPN, 简称 S\_GSFPN。

对于 SM\_GSFPN, 托肯的移动会改变库所的状态, 而库所状态的改变会反过来影响托肯的移动。该特征可以模拟系统的级联变化; 对于 S\_GSFPN, 托肯的移动会改变库所的状态, 而库所状态的改变不会影响托肯的移动。该特征可以模拟系统的动态变化。

在本文中, 我们将采用 GSFPN 描述的 SD 模型称为 GSFPN-SD 模型。GSFPN 与普通 Petri 网的差异在于:

(1) GSFPN 的某些库所和变迁携带有状态变量, 从而增强了 GSFPN 描述复杂系统动态行为的

能力;

(2) 某库所所携带的状态变量的演变是通过托肯到达该库所后所驱动, 某变迁所携带的状态变量的演变是通过托肯到达穿越该变迁后所激发, 从而体现了演变的事件驱动特征。

## 2 广义随机系统动力学模型的 GSFPN 表示

### 2.1 系统动力学变量

#### 2.1.1 水平变量(Level)

**定义 4**<sup>[21]</sup> 水平变量(L 变量)是系统的流的积累量, 水平变量又称积累变量或状态变量。

水平变量的含义如图 1 所示。一个水平方程相当于一个容器, 它积累变化的流速率。其流速有输入流速和输出流速, 容器内的水平正是其输入流速  $R_1$  与输出流速  $R_2$  的差量的积累。平变量  $L$  计算方法如下:

$$L(t+\Delta t)=L(t)+(R_1-R_2)DT \tag{1}$$

式(1)是一阶差分方程, 符号  $DT$  表示时间的差分, 即两次计算之间时间间隔的长度。

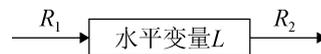


图 1 水平变量的含义  
Fig.1 Meaning of level variable

#### 2.1.2 速率(Rate)变量

**定义 5**<sup>[21]</sup> 速率(流速)变量(R 变量)是系统中的流的流动速度, 即系统中水平变量变化的强度。

水平变量是系统活动结果的状态变量, 而速率则是对水平变量变化过程及其控制的描述。速率的基本形式有两种, 流入速率和流出速率。从速率的控制作用上说, 速率变量, 又可叫“控制变量”, “决策函数”、“政策变量”。速率  $R$  是流入或者流出水平变量(容器)的流的瞬时速度, 其含义如图 2 所示, 用微分形式可以表示为:

$$R(t) = \frac{dL(t)}{dt}$$



图2 速率变量计算方法  
Fig. 2 Computation method of rate variable

### 2.1.3 辅助变量(Auxiliary)

**定义 6<sup>[2]</sup>** 辅助变量(A 变量)用于描述系统中除 L 变量和 R 变量之外的所有其他变量。

为了简化系统动力学模型, A 变量被广泛使用。

### 2.1.4 延迟(Delay)

**定义 7<sup>[2]</sup>** 延迟是将系统中流入速率变为流出速率所消耗的时间。

延迟的“阶”是指流的通道中延迟水平的个数。“n 阶”就是有 n 个延迟水平。“指数延迟”是说这种延迟具有指数性质。一阶指数延迟的流出速率等于水平变量除以平均延迟:

$$OUT(t) = \frac{L(t)}{DEL}$$

式中,  $OUT(t)$  为时期  $t$  流出速率(出流率);  $L(t)$  为时期  $t$  存贮于延迟中的水平(积累);  $DEL$  为延迟常数, 它代表经过延迟所需要的平均时间。

## 2.2 系统动力学模型的 S\_GSF PN 网表示

### 2.2.1 辅助变量的 S\_GSF PN 网表示

辅助变量的 S\_GSF PN 网表示如图 3(a)所示。图中, 一个辅助变量对应一个库所, 称为辅助库所, 用虚线园表示, 辅助变量是辅助库所的状态变量。辅助库所的辅助变量仅用于保存临时信息, 不进行累积运算。

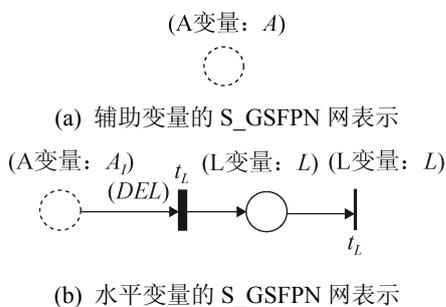


图3 辅助变量和水平变量的 S\_GSF PN 网表示  
Fig. 3 S\_GSF PN representation of auxiliary and level variable

### 2.2.2 水平变量的 S\_GSF PN 网表示及随机性体现

水平变量的 GSPN 表示如图 3(b)所示。图中, 一个水平变量对应一个库所, 该库所称为水平库所, 水平变量是水平库所的状态变量。实心变迁  $t_L$  表示水平变量的累积过程, 称为水平变迁。若水平变迁存在时延, 则用实心长方形表示, 其时延是  $DEL > 0$ 。时延  $DEL > 0$  的水平变迁称为延时水平变迁, 延时水平变迁周围有时具有“(DEL)”标记; 若水平变迁不存在时延, 则用长棒表示, 其时延是 0。时延为 0 的变迁又称瞬时水平变迁, 瞬时水平变迁周围没有“(DEL)”标记。水平变迁  $t_L$  激发完成, 相当于从输入变量(可以是 A 变量或 L 变量)变成输出变量(可以是 A 变量或 L 变量)的耗时, 因此, 水平变迁  $t_L$  不表示任何变量。由于 L 变量的状态不是托肯状态值的函数, 因此, L 变量的 Petri 网是 S\_GSF PN。水平库所总是用实线园表示, 水平库所总是进行累积运算, 即

$$L(t+DEL) = L(t) + (A_i(t) - R_2)DT \quad (2)$$

延时水平变迁  $t_L$  的延时  $DEL$  是服从某个分布的随机变量, 延时水平变迁  $t_L$  从开始激发到激发完成所消耗的时间  $DEL$  是随机变量, 在大多数情况下,  $DEL$  服从负指数分布。

### 2.2.3 速率变量的 S\_GSF PN 网表示及随机性体现

速率变量的 S\_GSF PN 表示如图 4 所示。图中, 一个空心变迁  $t_R$  对应于一个速率变量, 该变迁  $t_R$  称为速率变迁, 速率变量是速率变迁的状态变量。若一个速率变迁存在延时, 此时该变迁  $t_R$  称为延时速率变迁, 延时速率变迁周围有时具有“(DEL)”标记; 若一个速率变迁不存在延时, 此时该变迁  $t_R$  称为瞬时速率变迁, 瞬时速率用空心虚线长方形表示, 其周围没有“(DEL)”标记。速率变迁  $t_R$  激发完成, 速率变量被传递。输入库所对应于一个 X 变量, X 变量可以是辅助变量(A 变量)或水平变量(L 变量), 而输出库所也对应一个 X 变量。当输出库所是水平库所时, 则用实线园表示, 如图 4(a)所示; 若输出库所对应一个 A 变量, 则用虚线园表示, 如图 4(b)所示。当输出库所是辅助库所时, 速率变迁  $t_R$  激发不存在

时延, 即输入库所、输出库所和速率变迁  $t_R$  均对应于时刻  $J$ ; 当输出库所是水平库所时, 速率变迁  $t_R$  激发存在时延, 即输入库所对应于时刻  $J$ 、输出库所对应于时刻  $L$  和速率变迁  $t_R$  对应于时刻  $K$ 。

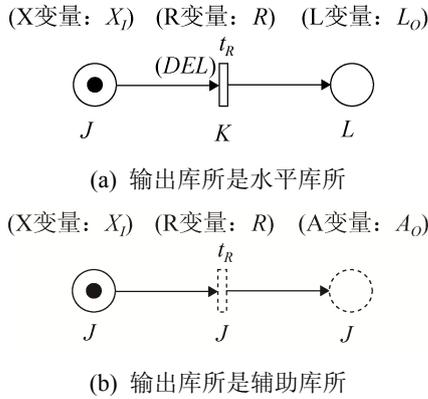


图 4 速率变量的  $S\_GSFPN$  网表示  
Fig. 4  $S\_GSFPN$  representation of rate variable

(1) 假设输入库所对应的  $X$  变量为  $X_J$ , 输出库所对应的是水平变量  $L_O$ , 速率变迁  $t_R$  对应的速率变量为  $R$ , 则变量  $X_J$ 、 $L_O$  与  $R$  三者之间的关系按水平变量处理, 如式(2)所示。

(2) 假设输入库所对应的  $X$  变量为  $X_J$ , 输出库所对应的是辅助变量  $A_O$ , 速率变迁  $t_R$  对应的速率变量为  $R$ , 则变量  $X_J$ 、 $L_O$  与  $R$  三者之间的关系为

$$A_O(t) = X_J(t)R$$

即辅助库所保存临时信息  $A_O(t)$ 。由于  $R$  变量的状态不是托肯状态值的函数, 因此, 速率变量的 Petri 网是  $S\_GSFPN$ 。

速率变迁  $t_R$  的输出库所适当采用  $L$  变量或  $A$  变量来表示, 可使  $S\_GSFPN$  网描述问题更合乎逻辑、更细致。

类似地, 延时速率变迁  $t_R$  的延时  $DEL$  是服从某个分布的随机变量, 速率变迁  $t_R$  从开始激发到激发完成所消耗的时间  $DEL$  是随机变量, 在大多数情况下,  $DEL$  服从负指数分布。

### 2.3 SD 的因果关系链及其 $S\_GSFPN$ 网表示

系统由相互依存、相关作用的要素组成。如果要素  $A$  的量的变化会引起要素  $B$  的量的变化, 则

称  $A$  与  $B$  之间存在着因果关系。反映系统各要素之间因果关系的图就称为因果关系图。系统动力学用矢线表示系统中两个要素(变量)之间的联系, 称为因果链或因果环(Causal Link)。如果有两个因素(变量) $A$  和  $B$ , 它们之间存在因果联系, 如果  $A$  变化  $\Delta A$ , 则引起  $B$  变化  $\Delta B$  或  $-\Delta B$ 。这时, 可把  $A$  看作  $B$  变化的原因,  $B$  是  $A$  的结果。

**定义 8**  $GSFPN-SD$  中的因果链极性:

(1) 因果链  $A \rightarrow +B$ , 如图 5(a)所示: 连接  $A$  与  $B$  的因果链取正号, a)若增加  $A$  使  $B$  也增加, 或 b)若  $A$  的变化使  $B$  在同一方向上发生变化。

(2) 因果链  $A \rightarrow -B$ , 如图 5(b)所示: 连接  $A$  与  $B$  的因果链取负号, a)若  $A$  的增加使  $B$  减少, 或 b)若  $A$  的变化使  $B$  在相反方向上发生变化。

**定义 9**  $GSFPN-SD$  中的反馈回路是由一系列的因果与相互作用链组成的闭合回路或者说是由信息与动作构成的闭合路径。

反馈回路包括正反馈回路和负反馈回路, 如图 5(c)和(d)所示。正反馈回路的极性为正, 如图 5(c)所示, 负反馈回路的极性为负, 如图 5(d)所示。确定回路极性的一般原则: 若反馈回路包含偶数个负的因果链, 则其极性为正; 若反馈回路包含奇数个负的因果链, 则其极性为负。

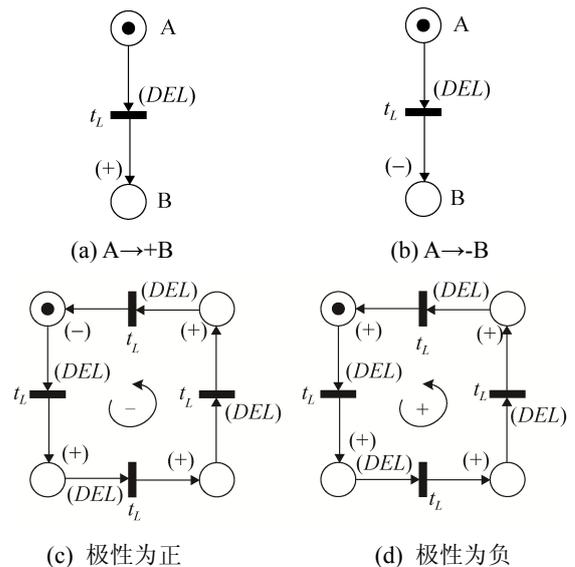


图 5 因果链  $A \rightarrow +B$  和  $A \rightarrow -B$  对应的函数 Petri 网模型  
Fig. 5 Function Petri-net model of causal link  $A \rightarrow +B$  and  $A \rightarrow -B$

## 2.4 GSFPN-SD 模型的性能特征

GSFPN-SD 模型的性能特征继承了 GSPN 模型的性能特征,即如果在一个托肯  $M$  下,有若干个变迁构成一个可激发变迁集合  $H$ ,则有下列 4 种特点<sup>[16]</sup>:

(1) 如果  $H$  全部由延时变迁(包括延时水平变迁和延时速率变迁)组成,则  $H$  中任一延时变迁  $t_i$  激发的概率为  $\lambda_i / \sum_{k \in H} \lambda_k$ 。

(2) 如果  $H$  包含若干瞬时变迁(包括瞬时水平变迁和瞬时速率变迁)和若干个延时变迁,或者不包含延时变迁,则只有瞬时变迁能被激发,延时变迁不能被激发。选择哪个瞬时变迁激发,要根据一个概率分布函数。 $H$  的全部瞬时变迁所构成的子集连同相关的概率分布一起称为一个随机开关,相应的概率分布称为一个开关分布。不同的托肯可以分配同一个随机开关:它们具有相同的瞬时变迁集合并且定义同一个开关分布。若与一个可激发的瞬时变迁相关的概率为 0,则该变迁不能被激发。

(3) 与 GSPN 模型类似,GSFPN-SD 模型中的瞬时变迁的激发优先于延时变迁,其状态空间较相同问题的 SPN 有所减少。

(4) GSFPN-SD 模型的可达集是相关 SPN 可达集的一个子集,这是因为 GSFPN-SD 模型中瞬时变迁优先于延时变迁的激发,从而造成一些托肯不可达。另外,GSFPN-SD 的可达集可以划分为两个不相交的子集:仅使延时变迁可激发的托肯集;可使瞬时变迁可激发的托肯集;前者托肯在稳定状态下有滞留时间;后者托肯没有滞留时间。

为使 GSFPN-SD 便于应用,假设下列条件成立:

(1) 可达集是有穷的。

(2) 变迁激发速率与时间无关,但可能与托肯相关。

(3) 任何可达托肯返回初始托肯的概率不为零,亦即,在可达集中的托肯相互之间都是可达的。

这样的可达图同构于一个齐次有穷状态、连

续时间随机点过程(stochastic point process, SPP)。在 GSFPN-SD 中,托肯和 SPP 状态之间存在一一对应关系。由于 GSFPN-SD 中存在瞬时变迁的激发,相应的 SPP 的采样函数可能出现多个“断点”,即状态跃变。SPP 在那些仅使延时变迁可激发的托肯上有时间延迟,而在那些使瞬时变迁可激发的托肯上发生跃变。称前一种为实存状态,后一种为消失状态。于是,GSFPN-SD 的状态空间被分为两个不相交的子集:实存状态集和消失状态集。

## 2.5 GSFPN-SD 模型的稳定状态概率计算方法

文献[16]提出了两种求解 GSFPN-SD 的稳定状态概率分布的方法,但这两种方法均很复杂,且难以理解。本文提出一种新的且非常简单的方法,既可达图简化法。该方法的基本思路是先将 GSFPN 同构于嵌入马尔可夫链 EMC,然后从 EMC 中逐步移出消失状态,对每个被移出消失状态所涉及的输入变迁弧和输出变迁弧进行合并处理,最后形成压缩的 EMC。该压缩的 EMC 只存在实存状态,求解该压缩的 EMC,获得 GSFPN-SD 模型的稳定状态概率。可达图简化法的操作步骤如下:

步骤 1: (1)将 GSFPN 可达集  $S$  分为两个不相交的集  $S_1$  和  $S_2$ ,假定  $|S|=n$ 。 $S_1$  包含托肯:既不可实施任何瞬时变迁,也不是由瞬时变迁直接可达的,令  $|S_1|=k$ , $S_1=\{S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1k}\}$ ;  $S_2$  包含其他托肯, $S_2=\{S_{21}, S_{22}, \dots, S_{2(n-k)}\}$ 。

步骤 2: (2)将  $S_2$  分成几个子集  $S_{2i}$ , $i=1, 2, \dots, l$  和  $S_{2T}$ 。每一个  $S_{2i}$  可包含一个仅使延时变迁可激发的托肯或者在瞬时变迁激发下几个可回归的托肯。 $S_{2T}$  包含了在瞬时变迁激发下的消失托肯。

步骤 3: 将可达图中所有延时变迁换成对应的平均激发速率,所有瞬时变迁换成概率值 1,所有随机开发换成对应的开关分布;延时变迁、瞬时变迁和随机开关对应的弧分别称为延时变迁弧、瞬时变迁弧和随机开关弧。

步骤 4: 对于  $S_{2T}$  中的某个消失状态  $M$ ,假设

$M$  有  $in_1, in_2, \dots, in_a$  条入弧;  $out_1, out_2, \dots, out_b$  条出弧, 进行如下处理:

(1) 若  $M$  的  $a$  条入弧和  $b$  条出弧都是瞬时变迁弧, 则删除  $M$  的  $a$  条入弧、 $b$  条出弧, 再删除消失状态  $M$ 。

(2) 若  $M$  的所有入弧和出弧中既有延时变迁弧、随机开关弧, 又有瞬时变迁弧, 则只删除消失状态  $M$ , 将  $M$  的每一条入弧  $in_i$  分别与  $M$  的所有出弧  $out_j, j=1, 2, \dots, b$ , 进行合并, 形成  $b$  条新入弧, 新入弧  $in_{i-j}$  对应的平均激发速率为入弧  $in_i$  的平均激发速率、概率或开关分布与出弧  $out_j$  的概率或开关分布、平均激发速率的乘积。这样一来, 状态  $M$  可产生  $ab$  条新入弧。

(3) 简化后, 若某个状态出现单向环弧, 则删除该单向环弧。

(4) 简化后, 若两个状态之间出现多条同向弧, 则将这些同向弧合并成一条弧, 其对应的平均激发速率为合并前这些弧的平均激发速率之和。

步骤 5: 不断重复步骤 4, 直到可达图只有实存状态为止。

步骤 6: 利用简化后的可达图, 采用下列方法求出各实存状态的状态转移概率。首先定义一个  $(k+l) \times (k+l)$  阶转移矩阵  $Q=[q_{ij}]_{(k+l) \times (k+l)}$ 。

(1) 当  $i \neq j$  时, 若存在  $t_k \in T: M_i[t_k > M_j]$ , 则

$$q_{ij} = \left. \frac{dP(\lambda_k, \tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0}, \text{ 否则 } q_{ij}=0.$$

$$(2) \text{ 当 } i=j \text{ 时, } q_{ii} = \left. \frac{d \prod_k (1-P(\lambda_k, \tau))}{d\tau} \right|_{\tau=0}.$$

其中,  $k \neq i$ , 且有存在  $M' \in [M_0 >]$ , 存在  $t_k \in T: M_i[t_k > M']$ ,  $\lambda_k$  是  $t_k$  的速率;  $P(\lambda_k, t)$  为变迁  $t_k$  延迟的概率分布。对于负指数分布,  $P(\lambda_k, t) = 1 - \exp(-\lambda_k t)$ , 则有: 当  $i \neq j$  时, 若存在  $t_k \in T: M_i[t_k > M_j]$ , 则  $q_{ij} = \lambda_k$ , 否则  $q_{ij} = 0$ ; 当  $i=j$  时,  $q_{ii} = -\sum_k \lambda_k$ 。

令  $Y=(P(M_{s1}), \dots, P(M_{sk}), P(M_{21}), \dots, P(M_{2l}))$  表示压缩状态稳态概率行向量, 则有

$$\begin{cases} YQ = 0 \\ P(M_{s1}) + \dots + P(M_{sk}) + \\ P(M_{21}) + \dots + P(M_{2l}) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $M_{si} \in S_1, 1 \leq i \leq k$  和  $M_{2i} \in S_2, 1 \leq i \leq l$ 。解此方程组, 即可求得每个压缩状态的稳态概率。

另一方面, 可以直接列出所有平衡状态方程, 对于任一托肯  $M_i \in [M_0 >]$ , 若所有  $M_j, M_k \in [M_0 >]$ , 且有  $M_i[t_j > M_j], M_k[t_k > M_i]$ , 则有方程

$$\begin{cases} \left( \sum_j \lambda_j \right) x_i = \sum_k \lambda_k x_k & i = 1, 2, \dots, k+l-1 \\ \sum_i x_i = 1 \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $x_1, x_2, \dots, x_{k+l-1}$ , 与  $P(M_{s1}), \dots, P(M_{sk}), P(M_{21}), \dots, P(M_{2l})$  相对应。

### 3 应用实例

图 6 依据文献[2]所给出的交通与能源需求系统 SD 模型(本文对其略作了一定的修改), 依据 2.2 给出的方法, 可以很容易地构造出其对应的 GSFPN-SD 模型, 如图 7 所示, 图 7 中给出了该 GSFPN-SD 模型中各库所和变迁的含义。图 6 所示的 SD 模型中延迟在其对应的 GSFPN-SD 模型表现为变迁激发的延迟, 物理含义明确。

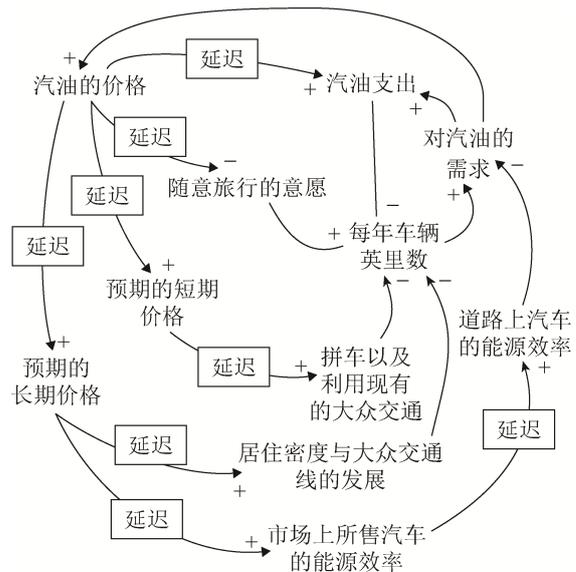


图 6 交通与能源需求相关性分析的 SD 模型  
Fig. 6 SD model of correlation analysis of transportation and energy demand

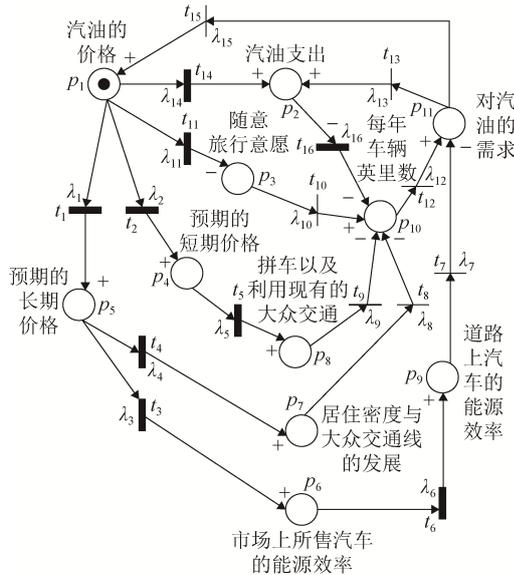


图7 交通与能源需求相关性分析的GSFPN-SD模型  
Fig. 7 GSFPN-SD model of correlation analysis of transportation and energy demand

现在我们假定图6中的延迟时间都是随机变量，且均服从负指数分布。也就是说，其对应的GSFPN-SD模型中的变迁 $t_1 \sim t_6$ 、 $\lambda_{11}$ 、 $\lambda_{14}$ 、 $\lambda_{16}$ 的延迟时间 $DEL$ 都是随机变量，分别服从参数为 $\lambda_1 \sim \lambda_6$ 、 $\lambda_{11}$ 、 $\lambda_{14}$ 、 $\lambda_{16}$ 的负指数分布，其值分别为 $\lambda_1=1$ 、 $\lambda_2=4$ 、 $\lambda_3=0.5$ 、 $\lambda_4=0.5$ 、 $\lambda_5=1$ 、 $\lambda_6=0.5$ 、 $\lambda_{11}=2$ 、 $\lambda_{14}=2$ 、 $\lambda_{16}=2$ (次数/月)；瞬时变迁 $t_{13}$ 和 $t_{15}$ 对应一个随机开关，其分布为 $S_{13}=0.4$ ， $S_{15}=0.6$ 。若采用SD方法对图6所示的SD模型进行模拟是困难的，特别是对其性能分析更困难。但对图7所示的GSFPN-SD模型，则进行系统模拟和性能分析变得很容易。依据Petri网基本理论<sup>[16]</sup>，可得该GSFPN-SD模型对应的可达图如图8所示，其对应的 $M_1 \sim M_{11}$ 如表1所示。

利用图9，采用式(3)或式(4)可得：

$$\begin{cases} \lambda_4 S_{15} x_2 + \lambda_3 S_{15} x_3 + \lambda_{16} S_{15} x_5 + \lambda_6 S_{15} x_6 - \\ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{14} + \lambda_{11} S_{13}) x_1 = 0 \\ \lambda_1 x_1 - (\lambda_4 + \lambda_3) x_2 = 0 \\ \lambda_2 x_1 - (\lambda_3 S_{15} + \lambda_5 S_{13}) x_3 = 0 \\ (\lambda_{14} + \lambda_{11} S_{13}) x_1 + \lambda_5 S_{13} x_3 + \lambda_4 S_{13} x_2 + \\ \lambda_6 S_{13} x_6 - \lambda_{16} S_{15} x_5 = 0 \\ \lambda_3 x_2 - \lambda_6 x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

解方程组(5)可得出实存状态的转移概率为 $P(M_1)=0.0753$ 、 $P(M_2)=0.0753$ 、 $P(M_3)=0.4301$ 、 $P(M_5)=0.3441$ 、 $P(M_6)=0.0753$ 。

依据步骤1，由图8可知， $S_1=\{M_2, M_3, M_6\}$ ， $S_2=\{M_1, M_4, M_5, M_7, M_8, M_9, M_{10}, M_{11}\}$ 。由步骤2知，在 $S_2$ 中， $M_1$ 可使延时变迁 $t_1$ 或 $t_2$ 激发，故 $S_{21}=\{M_1\}$ ； $M_{15}$ 可使延时变迁 $t_{16}$ 激发，故 $S_{22}=\{M_5\}$ ； $S_{27}=\{M_4, M_7, M_8, M_9, M_{10}, M_{11}\}$ 。由2.5节提出的可达图简化法可得EMC，如图9所示。

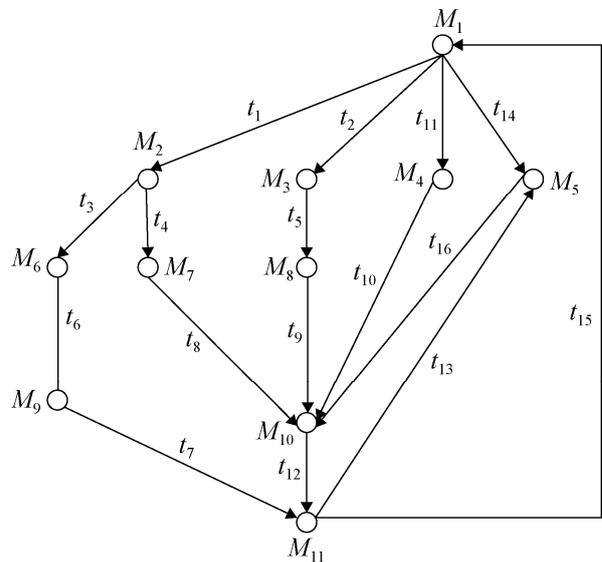


图8 GSFPN-SD模型对应的可达图  
Fig. 8 Accessibility graphics of GSFPN-SD model

表1 GSFPN-SD模型对应的 $M_1 \sim M_{11}$   
Tab. 1  $M_1 \sim M_{11}$  of GSFPN-SD model

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$
$M_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$M_2$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$M_3$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$M_4$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$M_5$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$M_6$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$M_7$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$M_8$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$M_9$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$M_{10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$M_{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

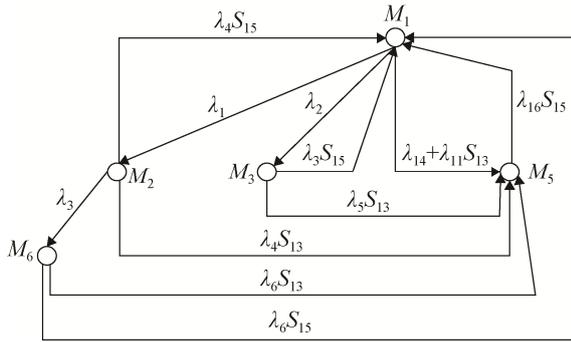


图 9 简化后的实存状态转移矩阵  
Fig. 9 Simplified existential state transition matrix

令图 7 所示的 GSFPN-SD 模型运行, 运行规律是: 库所  $p_1$  所对应的汽油价格随时间不断上升。GSFPN-SD 模型运行后, 除库所  $p_1$  外的其它库所的状态也跟随  $p_1$  发生变化, 其结果如图 10 所示。也就是说, 图 10 描述了当汽油价格随时间上涨时,

能源需求系统中的其他因素如预期的短期价格、预期的长期价格、随意的旅行、市场上所售汽车的能源效率、居住密度与大众交通线的发展、拼车以及利用现有的大众交通、每年车辆英里数等对汽油价格上涨的反应模拟曲线。

在图 10 中, 各分图中的红线代表汽油价格随时间的变化曲线, 各分图中的绿线分别代表汽油支出费用、随意旅行意愿、预期的短期价格、预期的长期价格、市场上所售汽车的能源效率、居住密度与大众交通线的发展、拼车以及利用现有的大众交通、道路上汽车的能源效率、每年车辆英里数、对汽油的需求等因素对汽油价格上涨的反应。能源需求系统中各种因素的反应如表 2 所示。从表 2 可以看出, 当汽油价格随时间上升时, 能源需求系统中的各种因素的反应与实际情况相符。

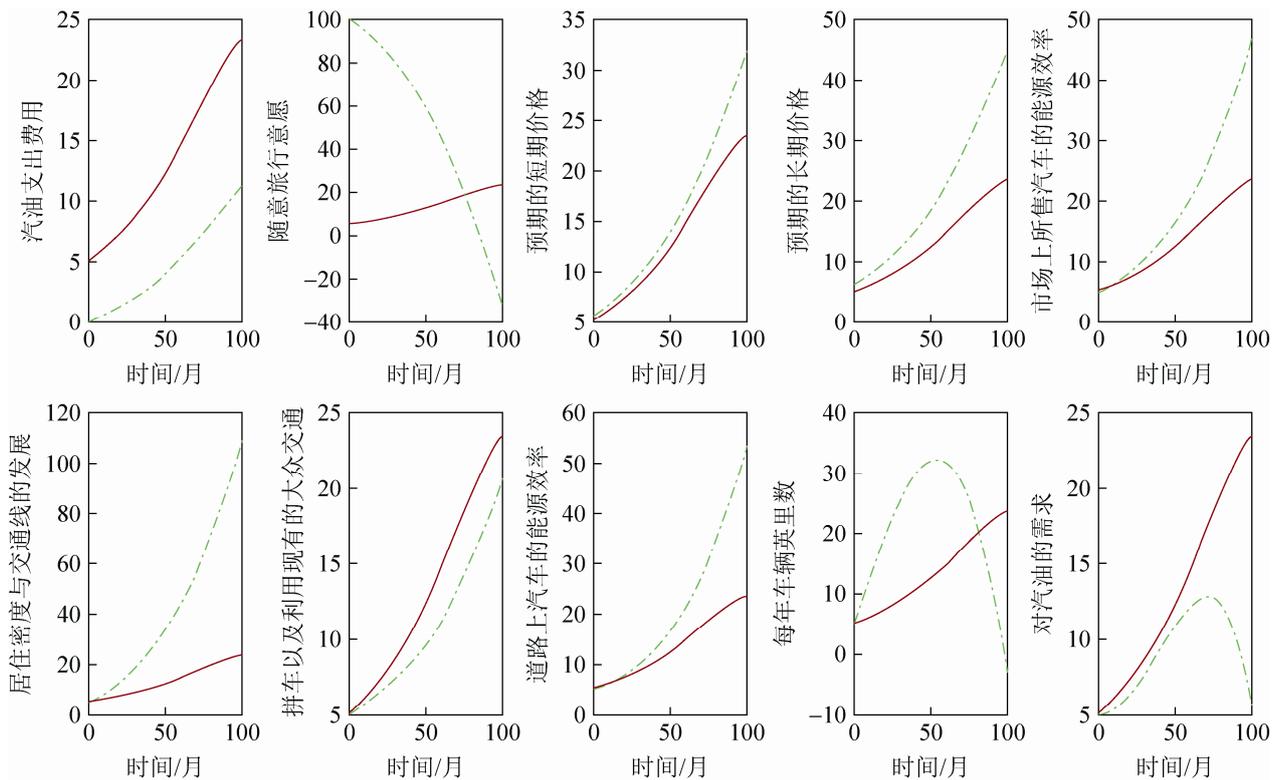


图 10 交通与能源需求动态行为  
Fig. 10 Dynamic behaviors of transportation and energy demand

表2 能源需求系统中各种因素的反应

Tab. 2 Reaction of each factor in energy demand system

能源需要系统各因素	对汽油价格随时间不断上升时的反应	反应速度超前或滞后
汽油支出费用	跟随上升	滞后
随意旅行意愿	跟随下降	-
预期的短期价格	跟随上升	超前
预期的长期价格	跟随上升	超前
市场上所售汽车的能源效率	跟随上升	超前
居住密度与大众交通线的发展	跟随上升	超前
拼车以及利用现有大众交通	跟随上升	滞后
道路上汽车的能源效率	跟随上升	超前
每年车辆英里数	先上升后下降	超前
对汽油的需求	先上升后下降	滞后

## 4 结论

SPN 的状态空间会随着问题的增大而指数性地增长,使得 SPN 同构的 MC 难以求解。广义随机 Petri 网的提出为缓解状态爆炸提供一种途径。GSPN 是 SPN 的一种扩充。主要表现在:将变迁分成两类,一种为瞬时变迁与随机开关相关联且激发延时为零;另一种为时间变迁与概率分布的激发延时相关联。GSPN 的状态空间较相同问题的 SPN 有所减少。本文将 GSPN 扩充为广义随机函数 Petri 网 GSFPN,并 GSFPN 和 SD 模型相结合而提出的 GSFPN-SD 模型,很好地继承了 SD 模型的全部特征,同时,又将 GSPN 的全部特征融入到 GSFPN-SD 模型中。与 SD 模型相比,GSFPN-SD 模型具有如下优势:

(1) 在 GSFPN-SD 模型中,系统的状态及其类型的含义更明确;通过变迁的激发,使得状态的演变的过程更明确。

(2) 在 GSFPN-SD 模型中,系统变化动态性是通过事件激发的,而不是通过计算驱动的,从而更逼真地描述了复杂系统的自主动态演变。

(3) 在 GSFPN-SD 模型中,变迁的激发是通过托肯的移动而实现的,从而天然地实现了系统可以

有条件或无条件转移。

(4) GSFPN-SD 模型可以描述系统的随机性现象。

(5) GSFPN-SD 模型的各种性能分析可更深入地揭示复杂系统的本质特征。

(6) GSFPN-SD 模型可以描述部分变迁具有延时特征,而其他变迁没有延时特征的系统动力学模拟和相关性分析。

因此,GSFPN-SD 模型要比 SD 模型具有更强、更全面对复杂系统的描述模拟和相关性分析能力。限于篇幅,本文只介绍了 GSFPN-SD 模型的定义及其建模方法,给出了几个简单的例子说明了 GSFPN-SD 模型的使用方法和优势。下一步的工作是:

(1) 将随机高级 Petri 网与 SD 模型相结合,给出建模方法和应用案例,用以更进一步简化 GSFPN-SD 模型。

(2) 提出 GSFPN-SD 模型的分解和压缩技术。

(3) GSFPN-SD 模型只涉及到变迁的延迟具有随机性,当随机函数 Petri 网中的状态变量具有随机性时,如何解决此类 GSFPN-SD 模型的性能分析问题。

## 参考文献:

- [1] Forrester J W. Industrial Dynamics[M]. Cambridge, Massachusetts, USA: The MIT Press, 1961.
- [2] 钟永光,贾晓菁,钱颖,等.系统动力学[M].2版.北京:清华大学出版社,2015.  
ZHONG Yong-guang, JIA Xiao-jing, QIAN Ying, et al. System Dynamics[M]. Second Edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2015.
- [3] 陈国卫,金家善,耿俊豹.系统动力学应用研究综述[J].控制工程,2012,19(6):921-928.  
CHEN Guo-wei, JIN Jia-shan, GENG Jun-bao. Application research overview of system dynamics[J]. Control Engineering of China, 2012, 19(6): 921-928.
- [4] 马国丰,陆居一.国内外系统动力学研究综述[J].经济研究导刊,2013(6):218-220.  
MA Guo-feng, LU Ju-yi. Research overview of system dynamics home and abroad [J]. Economic Research Guide, 2013 (6): 218-220.

- [5] Erma Suryani, Shuo-Yan Chou, Chih-Hsien Chen. Air passenger demand forecasting and passenger terminal capacity expansion: A system dynamics framework[J]. Expert Systems with Applications(S0957-4174), 2010, 37(3): 2324-2339.
- [6] 陈海涛. 基于系统动力学的中国石油需求系统模型及预测[J]. 统计与决策, 2010, 43(20): 98-101.  
CHEN Hai-tao. System model and forecast of oil demand of China based on system dynamics[J]. Statistics and Decision-making, 2010, 43(20): 98-101.
- [7] 王海燕, 刘鲁, 杨方廷, 等. 基于SD的粮食预测和政策仿真模型研究[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(10): 3079-3083.  
WANG Hai-yan, LIU Lu, YANG Fang-ting, et al. System dynamics modeling of China's grain Forecasting and policy simulation[J]. Journal of System Simulation, 2009, 21(10): 3079-3083.
- [8] 侯剑. 基于系统动力学的港口经济可持续发展[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(1): 56-61.  
HOU Jian. Sustainable development of port economics based on system dynamics[J]. System Engineerings: Theory and Practice, 2010, 30(1): 56-61.
- [9] Krystyna Stave. Participatory system dynamics modeling for sustainable environmental management: Observations from four cases[J]. Sustainability (S2071-1050), 2010, 23(2): 2762-2784.
- [10] Cheng Qi, Ni-Bin Chang. System dynamics modeling for municipal water demand estimation in an urban region under uncertain economic impacts[J]. Journal of Environmental Management(S0301-4797), 2011, 92(6): 1628-1641.
- [11] 顾洁, 秦玥, 包海龙. 基于熵权与系统动力学的配电网规划动态综合评价[J]. 电力系统保护与控制, 2013, 41(1): 76-83.  
GU Jie, QIN Yue, BAO Hai-long. Comprehensive and dynamic evaluation of the distribution network planning based on entropy weight and system dynamics[J]. Power System Protection and Control, 2013, 41(1): 76-83.
- [12] 周鹏飞, 陈栋, 王秋良. 建筑绿色供应链实施的仿真分析: 以大连为例[J]. 系统仿真学报, 2014, 26(1): 173-180.  
ZHOU Peng-fei, CHEN Dong, WANG Qiu-liang. Simulation and analysis of construction green supply chain implementation: A case of Dalian[J]. Journal of System Simulation, 2014, 26(1): 173-180.
- [13] 杨建华, 宋扬. 大型装备备件库存系统动力机制研究[J]. 系统仿真学报, 2014, 26(7): 1589-1598.  
YANG Jian-hua, SONG Yang. Dynamic mechanism of spare parts inventory system for large scale equipment[J]. Journal of System Simulation, 2014, 26(7): 1589-1598.
- [14] 邓逸, 张圣书, 陈蓉. 居民收入增长与GDP增长的互动关系仿真[J]. 系统仿真学报, 2014, 26(10): 2507-2513.  
DENG Yi, ZHANG Shengshu, CHEN Rong. Simulation of interaction of resident income growth and economic growth[J]. Journal of System Simulation, 2014, 26(10): 2507-2513.
- [15] 孙金玉, 张力波, 汤铭端. 不同规模下华东地区煤炭应急储备库仿真研究[J]. 系统仿真学报, 2014, 26(2): 248-253.  
SUN Jin-yu, ZHANG Li-bo, TANG Ming-duan. Study on simulation of coal emergency reserve rotating in east China under different scales[J]. Journal of System Simulation, 2014, 26(2): 248-253.
- [16] 林闯. 随机Petri网和系统性能评价[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2005.  
LIN Chuang. Performance evaluation of systems using stochastic Petri nets[M]. Second Edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.