

6-2-2020

Low-Thrust Trajectory in Interplanetary Flight Solved by Pseudospectral Method

Ruiye Jiang

Harbin Institute of Technology, Heilongjiang Province, Harbin 150001, China;

Chao Tao

Harbin Institute of Technology, Heilongjiang Province, Harbin 150001, China;

Songyan Wang

Harbin Institute of Technology, Heilongjiang Province, Harbin 150001, China;

Yang Ming

Harbin Institute of Technology, Heilongjiang Province, Harbin 150001, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Low-Thrust Trajectory in Interplanetary Flight Solved by Pseudospectral Method

Abstract

Abstract: The local low-thrust trajectory optimization problem in interplanetary flight was obtained with pseudo spectral method. The dynamic equations of the low-thrust orbit and the design ideas of the indirect method to solve the low-thrust trajectory were introduced. How to use the pseudospectral method to solve the trajectory optimization problem was given. The GPOPS solver (General Pseudospectral Optimal Control Software) was used to design the optimal low-thrust orbit, and the performance indexes of designing the low-thrust orbit are chosen as time-optimal, fuel-optimal and energy-optimal condition. *The GPOPS solver was used to obtain the initial values of the costate variables which were used to solve the local orbit optimization with indirect method.* The comparison between the optimal trajectories solved by the direct and indirect methods was obtained, which proves the feasibility of the GPOPS solver to solve the local orbit optimization problem in interplanetary flight.

Keywords

pseudospectral method, indirect method, GPOPS solver, initial values of costate variables

Recommended Citation

Jiang Ruiye, Chao Tao, Wang Songyan, Yang Ming. Low-Thrust Trajectory in Interplanetary Flight Solved by Pseudospectral Method[J]. Journal of System Simulation, 2017, 29(9): 2043-2053.

伪谱法求解深空探测小推力轨道

蒋瑞晔, 晁涛, 王松艳, 杨明

(哈尔滨工业大学, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 采用伪谱法完成深空探测小推力轨道的局部轨道优化问题。介绍小推力轨道的动力学方程及间接法设计思想, 给出伪谱法求解的步骤。选用 GPOPS 求解器(General Pseudospectral Optimal Control Software) 设计小推力优化轨道, 得到性能指标为时间最优、燃料最优及能量最优条件下的小推力轨道, 利用 GPOPS 求解器解得的协态变量初值, 进行局部轨道优化的间接法求解。将直接法和间接法得到的小推力局部优化轨道进行比较, 证明了 GPOPS 求解器进行深空探测局部轨道优化的可行性。

关键词: 伪谱法; 间接法; GPOPS 求解器; 协态变量初值

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2017) 09-2043-11

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201709022

Low-Thrust Trajectory in Interplanetary Flight Solved by Pseudospectral Method

Jiang Ruiye, Chao Tao, Wang Songyan, Yang Ming

(Harbin Institute of Technology, Heilongjiang Province, Harbin 150001, China)

Abstract: The local low-thrust trajectory optimization problem in interplanetary flight was obtained with pseudo spectral method. The dynamic equations of the low-thrust orbit and the design ideas of the indirect method to solve the low-thrust trajectory were introduced. How to use the pseudospectral method to solve the trajectory optimization problem was given. The GPOPS solver (General Pseudospectral Optimal Control Software) was used to design the optimal low-thrust orbit, and the performance indexes of designing the low-thrust orbit are chosen as time-optimal, fuel-optimal and energy-optimal condition. The GPOPS solver was used to obtain the initial values of the costate variables which were used to solve the local orbit optimization with indirect method. The comparison between the optimal trajectories solved by the direct and indirect methods was obtained, which proves the feasibility of the GPOPS solver to solve the local orbit optimization problem in interplanetary flight.

Keywords: pseudospectral method; indirect method; GPOPS solver; initial values of costate variables

引言

随着科技的不断进步, 人类对于太空的探测活动由地球引力中心发展到脱离地球引力场后, 对于

太阳系天体乃至宇宙空间的探测。随着深空探测活动的逐渐展开, 人类对探索太阳系乃至宇宙的起源与进化都有了更进一步的了解。通过进一步的探测活动, 科学家们可能发现更多的可开发和利用的资源, 这对于逐步扩展人类的生存空间的设想提供了重要信息, 为人类社会的长期可持续发展提供重要保障。

飞行器轨迹优化设计是完成深空探测任务的关键技术之一, 可根据采用的发动机不同分为脉冲



收稿日期: 2017-05-20 修回日期: 2017-07-16;
基金项目: 国家自然科学基金(61403096); 中国博士后科学基金(2014M551242);
作者简介: 蒋瑞晔(1993-), 女, 浙江海宁, 博士生, 研究方向为制导与控制。

<http://www.china-simulation.com>

• 2043 •

推力(大推力)探测轨道和小推力探测轨道。传统的化学燃料发动机产生脉冲推力,其特点是发动机推力大、质量重、比冲小(通常为 10^2 级,比冲 I_{sp} 定义为(单位时间)消耗单位燃料所获得的推力(再除以常量加速度 g_0 则变为时间量纲),因此它是推进系统的效率度量参数^[1]),因此飞行器具有的有效载荷比重低,无法满足探测远距离天体的要求。连续小推力技术采用电推进发动机,系统的特点是推力小 $10\sim 10\text{ mN}$ 量级、质量轻、比重大(通常为 10^3 级),大幅提高飞行器的有效载荷,代价是小推力轨迹任务时间长,轨道非线性强,使得小推力轨迹设计具有较大难度^[2]。为适应飞行距离的进一步增长,近些年又出现了太阳帆、磁帆等比冲无限大的无燃料推进技术^[3]也将逐步投入深空探测任务中去。

深空探测轨道设计通常可分为全局轨道优化过程和局部轨道优化过程,全局轨道优化可理解为在众多可选择的目标小卫星范围内,基于轨道优化设计的性能指标进行筛选,确定探测器探测小行星的顺序和大致的时间节点安排^[4];局部轨道优化即在选定探测小行星顺序和时间节点的基础上,进行进一步的轨道优化,目前常用的方法小推力轨道优化方法可分为:直接优化法、间接优化法和混合优化方法。

小推力轨迹优化是对一个连续、动态的过程的优化问题,即小推力轨迹优化问题的本质是求解泛函极值的问题。而求解泛函极值的经典方法是变分法和极大值原理(即最优控制),即间接法。故利用间接法求解最优控制问题的核心思想是在极小值原理的基础上,将最优控制问题转换为一个 Hamilton 边值问题(HBVP),它们一般是状态变量和协状态变量共同构成的函数。这样,Hamilton 方程组、状态终端约束、横截条件、控制约束以及可能含有的路径约束等共同构成的一个两点边值问题(TPBVT),求解此问题就可以解出最优控制以及相对应的最优轨迹。间接法求解 TPBVT 的难度在于,求解方程时只知道 n 个状态变量的初值,而不知道 n 个协状态变量的初值。当 n 个协状态变量初值

确定后,TPBVT 就可以转化为已知初值的微分方程求解,此时利用欧拉法、龙格库塔法等数值积分方法,通过对微分方程逐步积分就可以求解两点边值问题^[5]。然而由于协态变量本身缺少实际意义,又存在初值敏感的问题,即满足要求的小推力轨道对应的协态变量初值选择区间很小,故协态变量的初值选择难度较大,因而产生了通过将连续优化问题离散为参数优化问题来求解最优轨迹的直接法。

直接法是利用对控制量进行参数化的方法,利用将控制变量和状态变量在插值结点处的值表示每一时刻的值,进而将最优控制问题转化为参数优化问题^[6],然后采用非线性规划算法对该参数优化问题进行求解。其基本思想为将原有的动态随时间连续的问题通过离散法,转化为一个优化变量有限的静态离散优化问题。直接法的优点在于,这类方法容易构造,对初值的敏感性差,不足在于通常优化变量数目很大,求解结果的最优性和精度往往不如间接法。

混合法则是在直接法和间接法的基础上,提出的一种兼二者优点的求解方法,其基本思路为将间接法推导得到的协状态方程和最优控制率及状态方程进行离散化,将问题转化为带约束的参数优化问题,进而可用非线性规划的方法进行求解^[7]。

本文选用伪谱法进行小推力轨迹优化设计。伪谱法是直接法中的配点法的一种。伪谱法的最大亮点在于可以利用其结果来估计间接法中的协态变量。GPOPS 工具箱(General Pseudospectral Optimal Control Software)是一款基于 MATLAB 软件^[8],应用 hp-自适应伪谱法求解多阶段复杂最优控制问题的工具箱^[5]。目前 GPOPS 工具箱已经被广泛应用于无人机轨迹优化^[9]、航空飞行器航迹优化问题^[10]、深空探测轨迹优化中^[11]。

本文利用伪谱法求解器 GPOPS 求解器进行深空探测局部轨道优化,得到性能指标为时间最优、燃料最优及能量最优条件下的小推力轨道,并且由 GPOPS 求解器解得的协态变量初值,进行局部轨道优化的间接法求解,最后,将直接法和间接法得

到的局部优化轨道进行比较, 证明了 GPOPS 求解器进行深空探测局部轨道优化的可行性。

1 深空探测优化问题的描述

1.1 坐标系选择

小推力轨道优化常用的动力学模型包括: 笛卡尔坐标系下的动力学模型、传统轨道根数描述下的动力学模型、球形坐标系下的动力学模型^[12]、改进春分点描述下的动力学模型^[13]。

本文选择在笛卡尔坐标系下建立动力学模型, 小推力飞行器在笛卡尔坐标系运动学方程 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$ 如下:

$$\begin{cases} \dot{m} = -\frac{T}{g_0 I_{sp}} \\ \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{T}{m} \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{f}_p \end{cases}$$

式中: \mathbf{r} 为飞行器的位置矢量, $r = \|\mathbf{r}\|$; \mathbf{v} 为飞行器的速度矢量; m 为飞行器总质量(飞行器和推进剂的质量和); μ 为中心天体引力系数; $\boldsymbol{\alpha}$ 为指向推力方向的单位矢量; g_0 为海平面重力加速度; I_{sp} 为发动机比冲; \mathbf{f}_p 为除发动机推力加速度之外的摄动加速度(忽略); T 为推力幅值: $T = T_{\max} \cdot u$; u 为实际推力和最大推力的比值 $u \in [0, 1]$ 。

1.2 时间最优的小推力轨道求解

由小推力飞行器的动力学模型:

$$\begin{cases} \dot{m} = -\frac{T}{g_0 I_{sp}} \\ \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{T}{m} \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \quad (1)$$

对于时间最优控制问题的性能指标如下:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (2)$$

定义协态变量: $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_r, \lambda_v, \lambda_m)$

则哈密顿函数为

$$H = \lambda_r^T \cdot \mathbf{v} + \lambda_v^T \cdot \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + T_{\max} \frac{u}{m} \boldsymbol{\alpha}\right) - \lambda_m^T \frac{T_{\max} \cdot u}{I_{sp} \cdot g_0} + 1$$

由哈密顿函数, 得到协态方程:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_r = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \lambda_v^T \frac{\mu}{r^3} - \frac{3\mu \mathbf{r} \cdot \lambda_v^T}{r^5} \mathbf{r} \\ \dot{\lambda}_v = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = -\lambda_r^T \\ \dot{\lambda}_m = -\frac{\partial H}{\partial m} = -T_{\max} \frac{u}{m^2} \|\lambda_v\| \end{cases}$$

哈密顿函数对于发动机推力的偏导数为:

$$\Gamma = \frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_v^T \frac{1}{m} \boldsymbol{\alpha} - \frac{\lambda_m}{I_{sp} \cdot g_0} \quad (3)$$

又由发动机推力方向 $\boldsymbol{\alpha}$ 应使哈密顿函数 H 取最小值, 且有 $\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} = 1$, 则最优控制力

$$\boldsymbol{\alpha}^* = -\frac{\lambda_v}{\|\lambda_v\|} \quad (4)$$

此时方程(3)可写为

$$\Gamma = \frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_v^T \frac{1}{m} \boldsymbol{\alpha} - \frac{\lambda_m}{I_{sp} \cdot g_0} = -\frac{\|\lambda_v\|}{m} - \frac{\lambda_m}{I_{sp} \cdot g_0}$$

发动机实际推力和最大推力的比值 u 应使哈密顿函数取最小值, 故

$$\begin{cases} u = 0, & \rho > 0 \\ u = 1, & \rho < 0 \\ u \in [0, 1], & \rho = 0 \end{cases}$$

其中开关函数

$$\rho = -\frac{I_{sp} g_0 \|\lambda_v\|}{m} - \lambda_m \quad (5)$$

若航天器的末端质量没有约束(若求解时间最优轨迹则对于发动机燃料消耗没有要求), 根据横截条件: $\lambda_m(t_f) = 0$

$$\text{又由 } \dot{\lambda}_m = -\frac{\partial H}{\partial m} = -T_{\max} \frac{u}{m^2} \|\lambda_v\| \leq 0, \text{ 故 } \lambda_m(t) \geq 0,$$

可知开关函数 $\rho = -\frac{I_{sp} g_0 \|\lambda_v\|}{m} - \lambda_m \leq 0$, 故

$$u \equiv 1 \quad (6)$$

推力一直处于最大值状态。

在深空探测问题的求解过程中, 时间最优情况应用较少, 大多为能量最优和燃料最优情况。

1.3 燃料最优的小推力轨道求解

小推力飞行器运动学方程与方程(1)相同。

燃料最优轨道的性能指标如下^[14]:

$$J = \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \int_{t_0}^{t_f} u dt \quad (7)$$

则有哈密顿函数

$$H = \lambda_r^T \cdot \mathbf{v} + \lambda_v^T \cdot \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + T_{\max} \frac{u}{m} \boldsymbol{\alpha}\right) - \lambda_m^T \frac{T_{\max} \cdot u}{I_{sp} \cdot g_0} + \frac{T_{\max} \cdot u}{I_{sp} \cdot g_0}$$

式中: $\boldsymbol{\alpha}$ 表示小推力的喷气方向, $\boldsymbol{\alpha}$ 应使哈密顿函数 H 取最小值

$$\text{设 } \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \beta \\ \cos \delta \sin \beta \\ \sin \delta \end{bmatrix}, \text{ 则哈密顿函数改写为:}$$

$$\begin{aligned} H = & \lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y} + \lambda_3 \dot{z} + \lambda_4 \\ & \left(-\frac{\mu x}{r^3} + \frac{T_{\max} \cdot u}{m} \cos \delta \cos \beta\right) + \\ & \lambda_5 \left(-\frac{\mu y}{r^3} + \frac{T_{\max} \cdot u}{m} \cos \delta \sin \beta\right) + \\ & \lambda_6 \left(-\frac{\mu z}{r^3} + \frac{T_{\max} \cdot u}{m} \sin \delta\right) + \\ & \frac{T_{\max} \cdot u}{I_{sp} \cdot g_0} (1 - \lambda_7) \end{aligned}$$

设控制参数 $u = (\alpha, \delta, \beta)$, 由控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$,

则有 $\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0, \frac{\partial H}{\partial \delta} = 0$, 可得发动机最优推力方向

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \beta \\ \cos \delta \sin \beta \\ \sin \delta \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}} \begin{bmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix}$$

为使哈密顿函数 H 取最小值则上式应取负号

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \beta \\ \cos \delta \sin \beta \\ \sin \delta \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}} \begin{bmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} \quad (8)$$

此时

$$\begin{aligned} H = & \lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y} + \lambda_3 \dot{z} - \frac{\mu x}{r^3} \lambda_4 - \frac{\mu y}{r^3} \lambda_5 - \frac{\mu z}{r^3} \lambda_6 + \\ & \frac{T_{\max} \cdot u}{m} \frac{-(\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2)}{\sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}} + \frac{T_{\max} \cdot u}{I_{sp} \cdot g_0} (1 - \lambda_7) \end{aligned}$$

发动机实际推力和最大推力的比值 u 应使哈

密顿函数取最小值, 由

$$\frac{\partial H}{\partial u} = T_{\max} \left[\frac{1 - \lambda_7}{I_{sp} g_0} - \frac{\sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}}{m} \right]$$

则有发动机实际推力和最大推力的比值 u 为

$$\begin{cases} u = 0, & \Gamma > 0 \\ u = 1, & \Gamma < 0 \\ u \in [0, 1], & \Gamma = 0 \end{cases} \quad (9)$$

开关函数为:

$$\Gamma = 1 - \frac{I_{sp} g_0 \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}}{m} - \lambda_7 \quad (10)$$

1.4 能量最优的小推力轨道求解

小推力飞行器运动学方程与方程(1)相同。

对于能量最优情况的性能指标为:

$$J = \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt \quad (11)$$

则有哈密顿函数

$$\begin{aligned} H = & \lambda_r^T \cdot \mathbf{v} + \lambda_v^T \cdot \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + T_{\max} \frac{u}{m} \boldsymbol{\alpha}\right) - \\ & \lambda_m^T \frac{T_{\max} \cdot u}{I_{sp} \cdot g_0} + \frac{T_{\max} \cdot u^2}{I_{sp} \cdot g_0} \end{aligned}$$

易得小推力的喷气方向 $\boldsymbol{\alpha}$ 与式(8)相同

此时哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H = & \lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y} + \lambda_3 \dot{z} - \frac{\mu x}{r^3} \lambda_4 - \frac{\mu y}{r^3} \lambda_5 - \\ & \frac{\mu z}{r^3} \lambda_6 + \frac{T_{\max} \cdot u}{m} \frac{-(\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2)}{\sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}} - \\ & \lambda_7 \frac{T_{\max} \cdot u}{I_{sp} \cdot g_0} + \frac{T_{\max} \cdot u^2}{I_{sp} \cdot g_0} \end{aligned}$$

发动机实际推力和最大推力的比值 u 应使哈

密顿函数取最小值, 由

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} = & T_{\max} \left[-\frac{\lambda_7}{I_{sp} g_0} - \frac{\sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}}{m} \right] + 2u \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \end{aligned}$$

则有发动机实际推力和最大推力的比值 u 为

$$\begin{cases} u = 0, & \Gamma < 0 \\ u = 1, & \Gamma > 1 \\ u \in \Gamma, & 0 \leq \Gamma \leq 1 \end{cases} \quad (12)$$

开关函数为:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left[\frac{I_{sp} g_0 \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}}{m} + \lambda_7 \right] \quad (13)$$

1.5 间接法求解小推力轨道

由正则方程 $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$ 及边界条件

$$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}^*(t_f) = \mathbf{x}_f \text{ 可得}$$

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad m(t_0) = m_0$$

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \quad \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f, \quad m(t_f) \geq m_p$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \\ \dot{v}_x = -\frac{m}{r^3}x + \frac{T}{m}\alpha_1 \\ \dot{v}_y = -\frac{m}{r^3}y + \frac{T}{m}\alpha_2 \\ \dot{v}_z = -\frac{m}{r^3}z + \frac{T}{m}\alpha_3 \\ \dot{m} = -\frac{T}{g_0 I_{sp}} \\ \dot{\lambda}_x = \frac{\mu \lambda_{v_x}}{r^3} - \frac{3\mu x(\lambda_{v_x}x + \lambda_{v_y}y + \lambda_{v_z}z)}{r^5} \\ \dot{\lambda}_y = \frac{\mu \lambda_{v_y}}{r^3} - \frac{3\mu y(\lambda_{v_x}x + \lambda_{v_y}y + \lambda_{v_z}z)}{r^5} \\ \dot{\lambda}_z = \frac{\mu \lambda_{v_z}}{r^3} - \frac{3\mu z(\lambda_{v_x}x + \lambda_{v_y}y + \lambda_{v_z}z)}{r^5} \\ \dot{\lambda}_{v_x} = -\lambda_x \\ \dot{\lambda}_{v_y} = -\lambda_y \\ \dot{\lambda}_{v_z} = -\lambda_z \\ \dot{\lambda}_m = -\frac{T}{m^2}(\lambda_{v_x}^2 + \lambda_{v_y}^2 + \lambda_{v_z}^2)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (14)$$

其中: $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}} \begin{bmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix}$ 。对于时

间最优轨迹、燃料最优轨迹和能量最优轨迹 α 的取值分别见式(4)和式(8)所示。

2 伪谱法求解轨迹优化问题

根据伪谱法选择离散网格点的不同常见伪谱法格式有 Legendre-Guass(LG), Legendre-Guass-Lobatto

(LGL), Legendre-Guass-Radau(LGR), Chebyshev-Guass-Lobatto(CGL)等^[14]。

伪谱法可以有效估计间接法中的协态变量值, 利用伪谱离散首先可将问题转化为一个非线性规划问题, 可以证明这个非线性规划问题的一阶必要条件与最优控制所诱导的最优必要条件经过伪谱离散后是等价的^[14-16]。

本文选择 Legendre-Guass-Radau 积分点(LGR), 利用伪谱法对轨迹优化动力学方程(1)进行离散, 可得伪谱离散的系统方程, 具体计算方法如下:

定义归一化时间: $\tau \in [-1, 1]$, 则有 $t = \frac{t_f + t_0}{2} + \frac{t_f - t_0}{2}\tau$, 小推力飞行器运动学方程 $\dot{x} = f(x, t)$ 可写成:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{x} = \frac{t_f - t_0}{2} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (15)$$

用 Lagrange 插值多项式表示状态变量 $\mathbf{x}(\tau)$:

$$\mathbf{x}(\tau) = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}(\tau_i) l_i(\tau) \quad (16)$$

其中 $l_i(\tau)$ 为 Lagrange 插值基函数:

$$l_i(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (17)$$

其中: $l_i(\tau) = \delta_{ij}, \begin{cases} \delta_{ij} = 0, & i \neq j \\ \delta_{ij} = 1, & i = j \end{cases}$, τ 为 Lagrange 插

值节点, 这里采用 LGR 积分点。边界节点 $\tau_N = 1$, 其他积分点 $-1 = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N-1} < 1$ 为下式的根:

$$L_{N-2}(\tau) + L_{N-1}(\tau) = 0$$

式中 $L_N(\tau)$ 是 N 次 Legendre 多项式。

由式(15)、(16)可知

$$\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}(\tau_i) \frac{dl_i(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_k} = \sum_{i=1}^N D_{ki} \mathbf{x}(\tau_i), k = 1, 2, \dots, N-1$$

这里 D_{ki} 代表 $(N-1) \times N$ 维的 D 矩阵的第 (k, i) 个元素。

同样用 Lagrange 插值多项式表示控制变量

$$\mathbf{u}(\tau): \mathbf{u}(\tau) = \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{u}(\tau_k) l'_k(\tau)$$

其中插值节点为 $-1 = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N-1} < 1$, 无边界

节点。这是由于在伪谱法离散的轨道动力学模型(1)中,离散动态约束只在 LGR 积分点成立。

下面对小推力轨迹优化问题的系统方程,约束条件,性能指标进行伪谱法离散。

伪谱法离散后的系统方程为:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N D_{ki} \mathbf{r}(\tau_i) = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{v}(\tau_k) \\ \sum_{i=1}^N D_{ki} \mathbf{v}(\tau_i) = \frac{t_f - t_0}{2} \left[-\frac{\mu}{\|\mathbf{r}(\tau_k)\|^3} \mathbf{r}(\tau_k) + \frac{\mathbf{u}(\tau_k)}{m(\tau_k)} \right] \\ \sum_{i=1}^N D_{ki} m(\tau_i) = -\frac{t_f - t_0}{2} \frac{\|\mathbf{u}(\tau_k)\|}{I_{sp} g_0} \end{cases}$$

其中: $\mathbf{u}(\tau) = u T_{\max} \mathbf{a}(\tau)$, $\tau_k (k=1, 2, \dots, N-1)$ 为 LGR 积分点。

伪谱法离散后的初、末状态约束为:

$$\mathbf{r}(-1) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(-1) = \mathbf{v}_0, \quad m(-1) = m_0$$

$$\mathbf{r}(1) = \mathbf{r}_f, \quad \mathbf{v}(1) = \mathbf{v}_f, \quad m(1) \geq m_p$$

伪谱法离散后的路径约束(控制变量约束)为:

$$\|\mathbf{u}(\tau_k)\|^2 - T_{\max}^2 \leq 0, k=1, 2, \dots, N-1$$

伪谱法离散后的性能指标为:

时间最优情况

$$J_1 = \frac{1}{I_{sp} g_0 T_{\max}} \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 1 \times d\tau \approx \frac{1}{I_{sp} g_0 T_{\max}} \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \omega_k$$

燃料最优情况

$$J_1 = \frac{1}{I_{sp} g_0 T_{\max}} \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 \|\mathbf{u}(\tau)\| d\tau \approx \frac{1}{I_{sp} g_0 T_{\max}} \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \|\mathbf{u}(\tau)\| \omega_k$$

能量最优情况

$$J_1 = \frac{1}{I_{sp} g_0 T_{\max}} \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 \|\mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau \approx \frac{1}{I_{sp} g_0 T_{\max}} \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \|\mathbf{u}(\tau)\|^2 \omega_k$$

这里 $\omega_k (k=1, 2, \dots, N-1)$ 是 LGR 积分节点对应的权函数,有

$$\omega_1 = \frac{2}{(N-1)^2},$$

$$\omega_k = \frac{1}{(N-1)^2} \frac{1 - \tau_k}{[L_{N-2}(\tau_k)]^2}, k=2, 3, \dots, N-1.$$

3 仿真实验结果

本文应用 GPOPS(伪谱法)工具箱求解小推力最优轨道,并将 GPOPS 给出的协态变量初值用于间接法的求解,比较分析两种方法得到的结果。

注意使用工具箱求解前需要调整各状态变量和控制变量的数值,使他们在数量级上相近,便于求解最优轨迹。常量值及转化关系如表 1 所示。

本章将研究从地球出发与小行星交会的飞行器轨迹,选取算例的设计参数如表 2 所示^[11]。

表 1 常量值及转化关系

常量及转化单位	参数值
天文单位/AU	1.49 597 870 691×10 ⁸ m
时间单位/a	31 557 600 s
太阳引力系数/ μ	1.327 124 40 018×10 ¹¹ km ³ /s ²
海平面重力加速度/g	9.80 665 m/s ²

表 2 算例设计参数

描述量	数值
飞行器初始位置/AU	$\mathbf{r}_0 = [1.0, 0.0]^T$
飞行器初始速度/(AU/a)	$\mathbf{v}_0 = [0.0, 2\pi]^T$
小行星终端位置/AU	$\mathbf{R}(t_f) = [-0.694 328, -0.790 895]^T$
小行星终端速度/(AU/a)	$\mathbf{V}(t_f) = [-4.602 576, -4.040 613]^T$
初始总质量/kg	1 500
发动机比冲/s	3 000
推力幅值/N	0.135

本文采用了 GPOPS 工具箱求解最优轨道,由 GPOPS 工具箱得出的离散的点,并用 Lagrange 插值法得到了这些轨迹上的点对应的连续轨迹。由 GPOPS 工具箱得到的协态变量初值应用到间接法的求解中,比较直接法和间接法得到的结果,证明了 GPOPS 工具箱求解小推力轨道的可行性。

3.1 时间最优交会轨道分析

对于时间最优飞行器轨道的算例设计参数如表 2 所示,选取飞行总时间为 233 d(多次实验得到的结果),允许误差为 10⁻⁵。由 GPOPS 工具箱求解

得到的飞行器轨道如图 1(对于能量最优和燃料最优情况得到的飞行器轨道基本相同, 后面将不再给出飞行器轨道示意图)、发动机推力比值(发动机实际推力与发动机最大推力的比值)如图 2。可以看出由 GPOPS 工具箱得到的时间最优轨迹对应的发动机一直为推力最大值, 这与 2.1 节的最优控制理论分析结果一致。

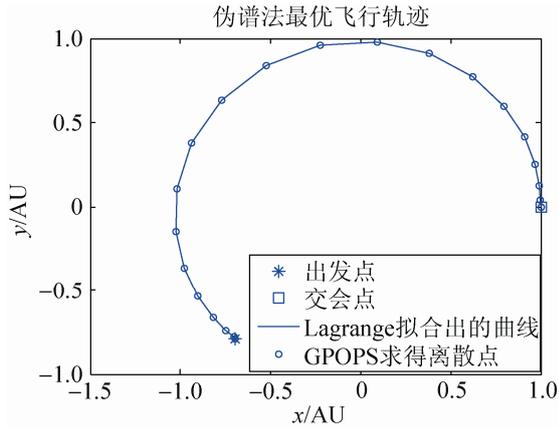


图 1 最优飞行轨迹
Fig. 1 Optimal trajectory

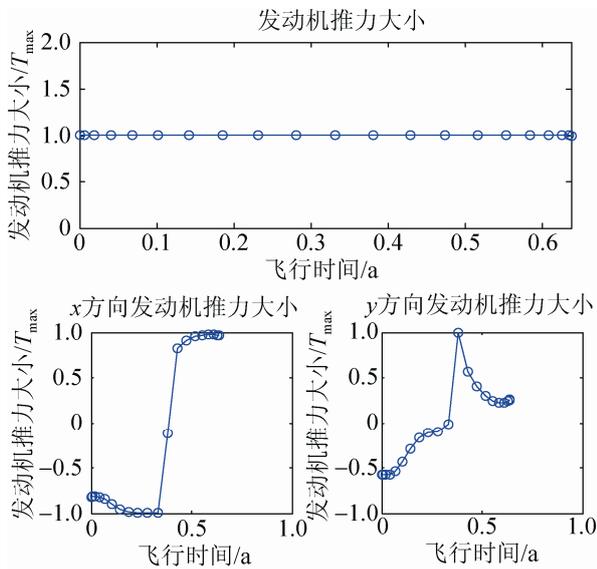


图 2 时间最优控制发动机推力比值
Fig. 2 Engine thrust in time-optimal control

将 GPOPS 工具箱求得的协态变量初值作为间接法的协态变量初值, 按照式(14), 迭代求解飞行轨迹, 由伪谱法得到的协态变量值和间接法求解时间最优飞行器轨道的协态变量值的对比图

见图 3。得到的发动机质量随飞行时间变化示意图见图 4。

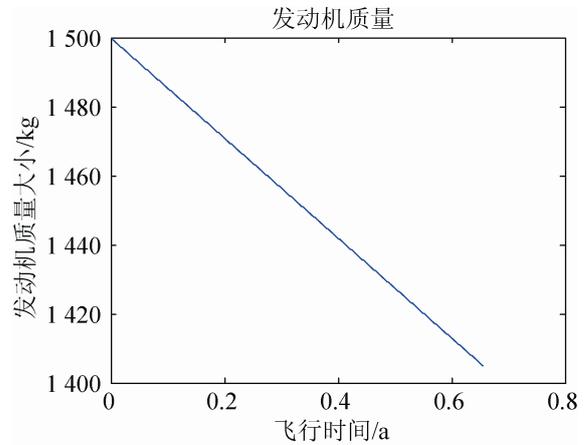


图 3 时间最优情况发动机质量变化
Fig. 3 Changing of engine mass in time-optimal situation

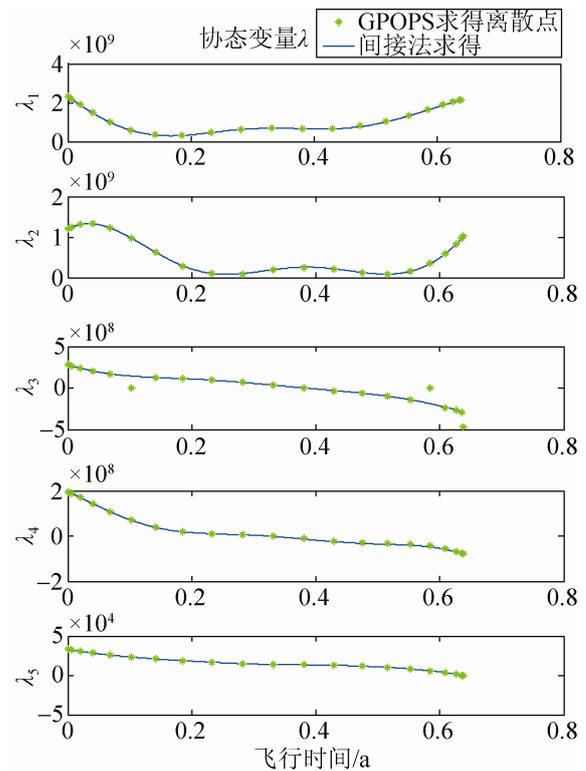


图 4 比较时间最优协态变量值
Fig. 4 Comparison in values of costate variables in energy-optimal situation

可以看出由 GPOPS 工具箱和由间接法求得协态变量 λ_3 有一定差异。 λ_3 的曲线放大如图 5 所示。

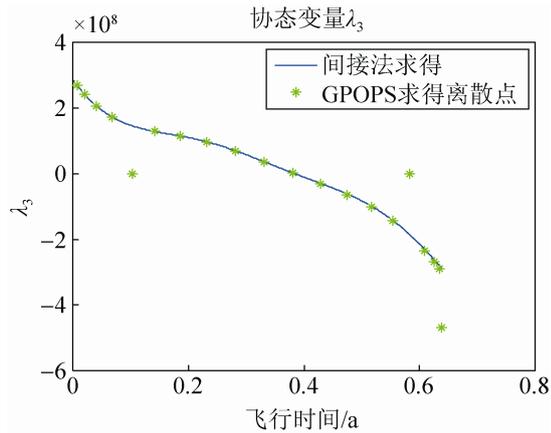


图5 比较协态变量 λ_3
Fig. 5 Comparison in value of λ_3

将误差允许调整为 10^{-6} , 比较两种方法得到的协态变量 λ_3 , 见图6。可以看到将工具箱的允许误差值减小后, 两种方法求得协态变量 λ_3 趋于一致。证明了伪谱法工具箱求解时间最优的小推力飞行轨道的可行性。

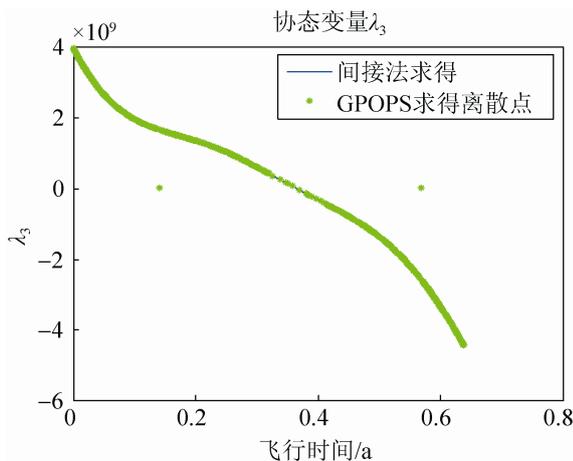


图6 比较协态变量 λ_3
Fig. 6 Comparison in value of λ_3

3.2 能量最优飞行器轨道分析

对于能量最优飞行器轨道的算例设计参数如表2所示, 选取飞行总时间为240 d, 选取的误差允许值为 10^{-5} 。由GPOPS工具箱求解得到的发动机推力比值(发动机实际推力与发动机最大推力的比值)见图7。由伪谱法得到的协态变量值和间接法求解能量最优飞行器轨道的协态变量值的对比图和发动机质量随飞行时间变化示意图见图8~9。

3.3 燃料最优交会轨道分析

对于燃料最优飞行器轨道的算例设计参数如表2所示, 选取飞行总时间为240 d, 选取的误差允许值为 10^{-5} 。由GPOPS工具箱求解得到的发动机推力比值(发动机实际推力与发动机最大推力的比值)如图10所示。

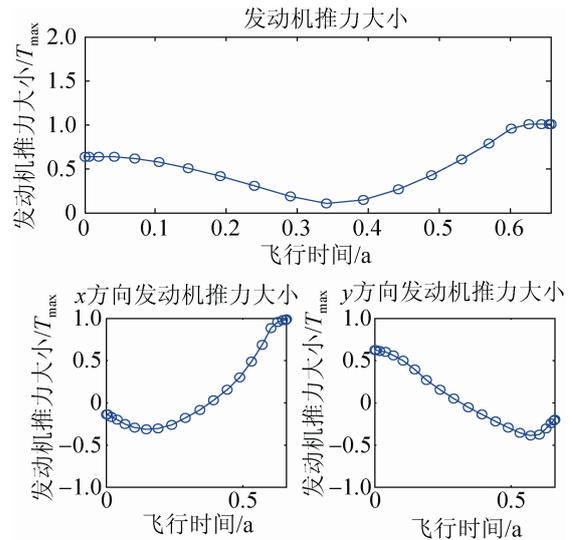


图7 能量最优控制发动机推力比值
Fig. 7 Engine thrust in energy-optimal control

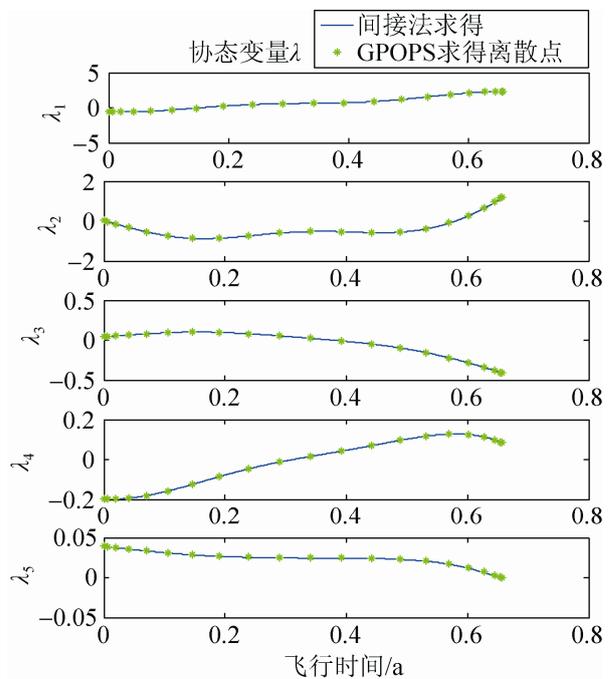


图8 比较能量最优协态变量值
Fig. 8 Comparison in values of costate variables in energy-optimal situation

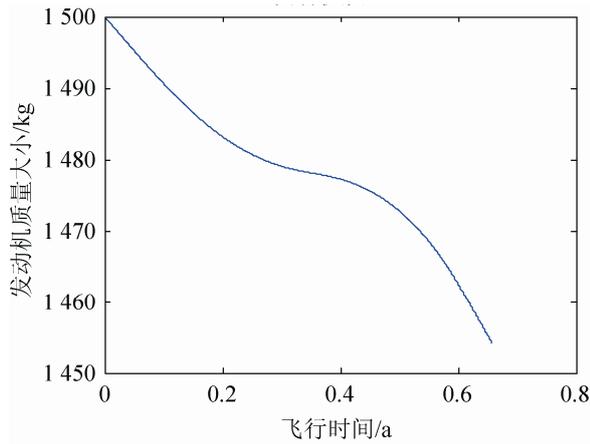


图 9 能量最优情况发动机质量变化
Fig. 9 Changing of engine mass in energy-optimal situation

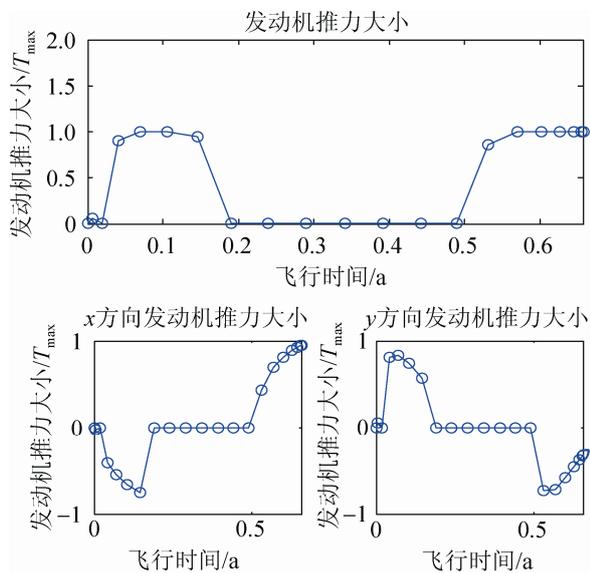


图 10 燃料最优控制发动机推力比值
Fig. 10 Engine thrust in fuel-optimal control

由伪谱法得到的协态变量值和间接法求解能量最优飞行器轨道的协态变量值的对比见图 11。发动机质量随飞行时间变化示意图见图 12。间接法得到的发动机工作情况如图 13, 可认为是发动机真实工作情况。伪谱法工具箱得到的发动机工作情况和基于最优控制理论的理论值(由式(9), (10)得到, 当 $\Gamma=0$ 时, $u=0.5$)比较结果如图 14。

3.4 小推力最优飞行轨道仿真分析

由 3.1~3.3 节的发动机燃料消耗整理得到选择不同的性能指标对应的发动机燃料消耗见表 3。

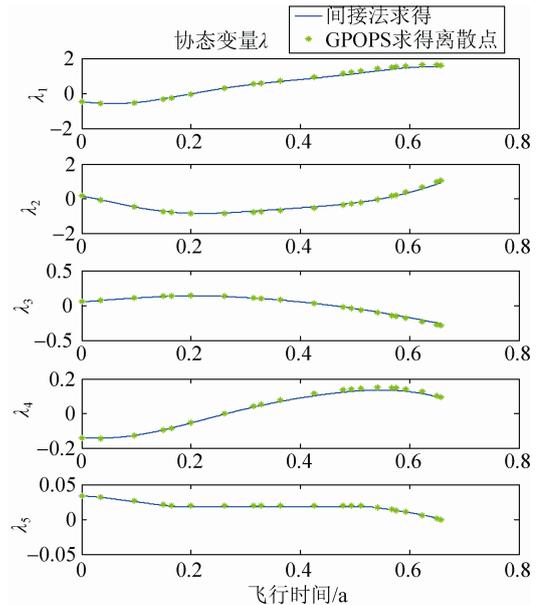


图 11 比较燃料最优协态变量值
Fig. 11 Comparison in values of costate variables in fuel-optimal situation

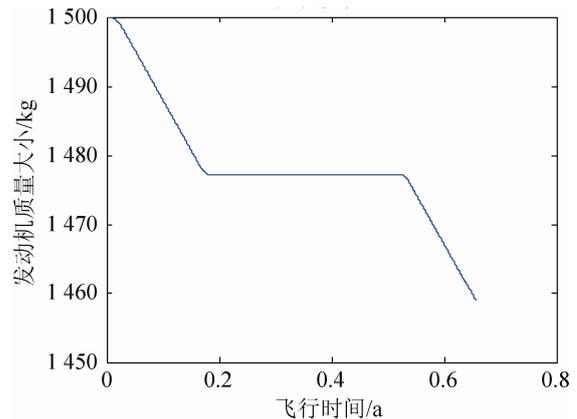


图 12 燃料最优情况发动机质量变化
Fig. 12 Changing of engine mass in fuel-optimal situation

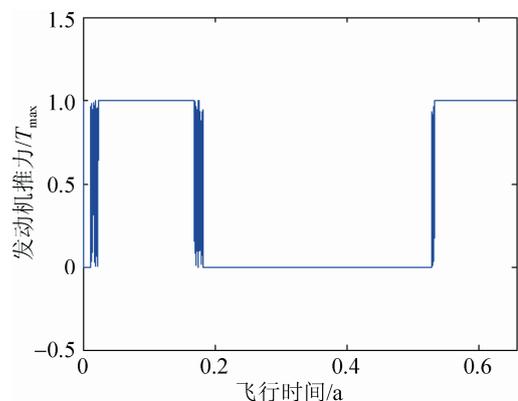


图 13 间接法求得燃料最优情况发动机推力比值变化
Fig. 13 Changing of engine thrust in fuel-optimal situation obtained by indirect method

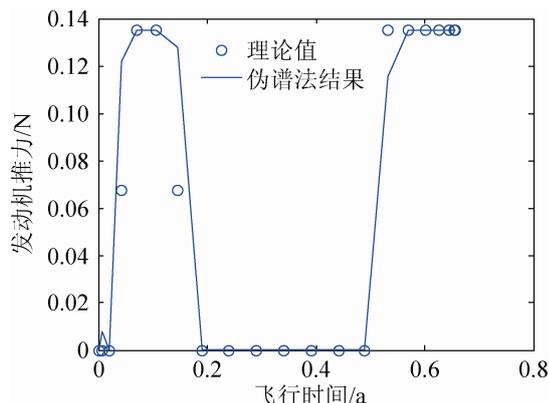


图 14 伪谱法求得燃料最优情况发动机推力比值比较
Fig. 14 Comparison in changing of engine thrust in fuel-optimal situation obtained by pseudospectral method

表 3 不同性能指标对应发动机燃料消耗

Tab. 3 Fuel consume with different performance indexes

性能指标	时间最优	能量最优	燃料最优
燃料消耗	86.94	44.54	39.69

由表 3 可知, 时间最优控制消耗燃料最多, 能量最优指标消耗燃料略多于燃料最优控制的情况。

根据前述分析可得到以下结论:

当性能指标为时间最优时, 其本质是以消耗燃料为代价, 减少飞行时间。

能量最优控制与燃料最优控制都是基于节省燃料设计飞行器飞行轨迹, 但燃料最优控制发动机工作状态变化剧烈(图 10), 当开关函数 $\Gamma = 0$ 时, 理论上控制变量 $u \in [0, 1]$, 为不确定的值。燃料最优控制轨道设计难度较大, 其本质原因是燃料最优控制对于协态变量初值更为敏感^[11]。

为解决燃料最优控制协态变量初值敏感收敛域小的困难, 学者们提出了能量最优的性能指标。基于能量最优的飞行器飞行轨迹较为平滑, 发动机基本不存在零推力和满推力的情况(见图 7)。这样不但降低了轨迹设计难度, 也得到了燃料消耗相对较少的最优飞行轨迹。

值得注意的是, GPOPS 工具箱给出的协态变量值与设定的求解精度、单位归一化的方式等都有关系, 求解精度选择过低, 得到的结果误差较大, 单位归一化选择的单位不同, 对得到的协态变量值数量级将会产生影响。对于时间较长的深空探测过

程, 需要使用 GPOPS 工具箱的多端轨迹优化功能。

4 结论

本文利用基于 MATLAB 软件的伪谱法求解器——GPOPS 求解器, 求解深空探测小推力轨道的局部轨道优化问题。选择性能指标为时间最优、燃料最优及能量最优的条件, 通过 SNOPT 求解器解得的协态变量初值, 进行局部轨道优化的间接法求解, 通过比较两种方法协态变量随时间变化的一致性, 证明了伪谱法求解小推力轨道的可行性。由发动机推力的仿真分析结果, 总结了三种性能指标对应的发动机工作特点, 通过比较燃料最优轨迹和能量最优轨迹的发动机工作状态, 比较了两个性能指标的优劣情况。

参考文献:

- [1] 郭铁丁. 深空探测小推力轨迹优化的间接法与伪谱法研究 [D]. 北京: 清华大学, 2012: 1-13. (Guo Tieding. Study of Indirect and Pseudospectral Methods for Low Thrust Trajectory Optimization in Deep Space Exploration [D]. Beijing, China: Tsinghua University, 2012: 1-13.)
- [2] 郭彦余. 深空探测任务小推力转移轨道设计与优化方法研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013: 1-13. (Guo Yanyu. Transfer Trajectory for Deep Space Exploration Mission [D]. Harbin, China: Harbin Institute of Technology, 2013: 1-13.)
- [3] 李俊峰, 宝音贺西. 深空探测中的动力学与控制 [J]. 力学与实践, 2007, 29(4): 1-8. (Li Junfeng, Baoyin Hexi. Dynamics and Control in Deep Space Exploration [J]. Mechanics in Engineering, 2007, 29(4): 1-8.)
- [4] 李俊峰, 蒋方华. 连续小推力航天器的深空探测轨道优化方法综述 [J]. 力学与实践, 2011, 33(3): 1-6. (Li Junfeng, Jiang Fanghua. Survey of Low-Thrust Trajectory Optimization Methods for Deep Space Exploration [J]. Mechanics in Engineering, 2011, 33(3): 1-6.)
- [5] 张洪倩, 马磊, 钱龙军. 高斯伪谱法弹道优化与优化弹道的实现 [C]// 第三十三届中国控制会议论文集(A 卷), 上海: 上海系统科学出版社, 2014: 1007-1012. (Zhang Hongqian, Ma Lei, Qian Longjun. Trajectory optimization by Gauss pseudospectral method and it's realization in flight [C]// Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference(A). Shang Hai, China: Shanghai system science Press, Xu Shengyuan, 2014: 1007-1012.)

(下转第 2058 页)