

6-1-2020

ECT Image Reconstruction Algorithm Based on Generalized Regularization

Ma Min

College of Electronic Information and Automation, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China;

Guo Qi

College of Electronic Information and Automation, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China;

Chaoqi Yan

College of Electronic Information and Automation, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

ECT Image Reconstruction Algorithm Based on Generalized Regularization

Abstract

Abstract: Aiming at the numerical instability caused by the singular value decomposition algorithm and the over-smooth caused by the Tikonov regularization in the image reconstruction of electrical capacitance tomography (ECT) system, a more generalized regularization algorithm was proposed. *The penalty phase of the regularized objective function was modified by the positive definite matrix so that it could reconstruct the image with non smooth information, In the process of solving the objective function, the diagonal weight matrix was introduced, and the data items based on l_2 -norm were improved. By comparing the image quality, the relative error of the image and the relative coefficient of the image, the three algorithms were evaluated.* Resultsshow that the generalized regularization algorithm compared to Tikonov regularization algorithm and singular value decomposition algorithm, can distinguish the substance field in different medium effectively and obtain high quality reconstruction images while avoiding over-smooth.

Keywords

electrical capacitance tomography, over-smooth, positive definite matrix, generalized regularization algorithm, image reconstruction

Recommended Citation

Ma Min, Guo Qi, Yan Chaoqi. ECT Image Reconstruction Algorithm Based on Generalized Regularization[J]. Journal of System Simulation, 2017, 29(8): 1851-1858.

基于广义正则化的 ECT 图像重建算法

马敏, 郭琪, 闫超奇

(中国民航大学电子信息与自动化学院, 天津 300300)

摘要: 针对电容层析成像(Electrical Capacitance Tomography, ECT)系统图像重建过程中 Tikhonov 正则化引起的解的过度光滑和奇异值分解算法引起的数值不稳定, 提出了一种更为广义的正则化算法。利用正定矩阵对正则化目标函数的惩罚相修正, 使其可以对包含非光滑性信息的图像进行更准确重构, 在目标函数求解过程中引入对角权值矩阵, 对基于 l_2 范数的数据项改进, 通过重建图像质量、图像相对误差、图像相对系数等指标对 3 种算法进行评估。实验结果表明, 广义正则化算法相比 Tikhonov 正则化算法和奇异值分解算法, 可以对物场中不同介质有效区分, 避免图像的过度平滑, 分辨率较高, 重建质量较好。

关键词: 电容层析成像; 过度光滑; 正定矩阵; 广义正则化算法; 图像重建

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2017) 08-1851-08

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201708028

ECT Image Reconstruction Algorithm Based on Generalized Regularization

Ma Min, Guo Qi, Yan Chaoqi

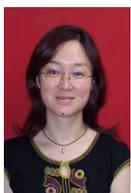
(College of Electronic Information and Automation, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

Abstract: Aiming at the numerical instability caused by the singular value decomposition algorithm and the over-smooth caused by the Tikhonov regularization in the image reconstruction of electrical capacitance tomography (ECT) system, a more generalized regularization algorithm was proposed. The penalty phase of the regularized objective function was modified by the positive definite matrix so that it could reconstruct the image with non smooth information. In the process of solving the objective function, the diagonal weight matrix was introduced, and the data items based on l_2 -norm were improved. By comparing the image quality, the relative error of the image and the relative coefficient of the image, the three algorithms were evaluated. Results show that the generalized regularization algorithm compared to Tikhonov regularization algorithm and singular value decomposition algorithm, can distinguish the substance field in different medium effectively and obtain high quality reconstruction images while avoiding over-smooth.

Keywords: electrical capacitance tomography; over-smooth; positive definite matrix; generalized regularization algorithm; image reconstruction

引言

电容层析成像技术是一种多用在工业管道上



收稿日期: 2016-11-15 修回日期: 2017-01-26;
基金项目: 国家自然科学基金(61401466), 中国民航大学科研启动基金(2013QD01S);
作者简介: 马敏(1971-), 女, 安徽六安, 博士, 教授, 研究方向为电学层析成像算法; 郭琪(1990-), 男, 山西吕梁, 硕士生, 研究方向为电学层析成像算法; 闫超奇(1992-), 男, 河南新乡, 硕士生, 研究方向为电学成像。

的多相流检测的技术, 其研究对象是两相流或多相流, 具备以下优点: 构造简单、成本低廉、非侵入性和良好的安全性等。其原理是运用传感器阵列形成旋转的空间敏感场, 根据被测物场各相介质具有不同介电常数的物理性质, 从不同观测视角, 扫描包含多相介质的工业容器或管道内流体, 获得被测物场的各相介质的介电常数分布信息, 在此基础上利用图像重建算法, 显示出被测物场的二维或三维

<http://www.china-simulation.com>

• 1851 •

介质分布图像^[1]。

图像重建作为 ECT 反问题的主要研究对象之一, 实质上是建立采样电容值到图像像素灰度的非线性映射关系模型, 用相应的图像重建算法实现这一映射的逼近, 从而由测量值直接反演出介质分布图像。但是由于 ECT 系统的软场特性、强非线性和不适定性, 使得现今使用的各种图像重建算法并没有达到工业生产的期望要求。近年来, 国内外很多学者投入到图像重建算法的研究中。SoleimaniM 和 LionheartWRB 等人用正则化的高斯-Newton 方法利用实验数据实现电容层析成像的非线性图像重建^[2] YanH 等人在电容层析成像的图像重建中同时引入正则化和多元线性回归方法^[3]。LiuS 等人提出了对灵敏度矩阵进行预迭代的图像重建算法, 该算法在成像效果上与 Landweber 迭代算法相差不多, 其成像速率可以媲美 LBP 算法^[4]。王化祥等针对电容层析成像技术的“软场”效应和不适定问题, 在灵敏度矩阵的奇异值分解理论基础上, 用共轭梯度图像重建算法及其改进算法——正则化共轭梯度法来重建图像, 成像效果较好^[5]。此外, 近年来人们也进行了 ECT 三维成像算法的研究, 取得了一定的成果。

Tiknonov 正则化方法虽然能有效地解决 ECT 病态逆问题, 但由于标准正则法解的过度光滑性, 若真解伴随着尖角或者其他的不光滑性, 会导致在图像重建过程中错失某些细节信息, 得到并不理想的重建图像^[6-9]。奇异值分解法虽然能解决 ECT 系统逆问题的系数矩阵病态问题, 但由于灵敏度矩阵条件数太大及灵敏度矩阵中的奇异值逐渐趋向于零会引起数值的不稳定^[10]。本文针对 Tiknonov 正则化方法和奇异值分解法中存在的问题, 提出了一种更为广义的正则化方法, 并将其应用于 ECT 系统的图像重建。

1 ECT 系统描述

1.1 ECT 成像原理

ECT 系统中, 以 16 电极为例, 为计算方便,

采用并联模型对电容值进行归一化处理, 具体实现:

$$C_{aj} = \frac{C_j - C_j^1}{C_j^2 - C_j^1} \quad j=1, 2, \dots, 120 \quad (1)$$

式中: C_j^1 为空管电容值(即管道内充满水, 其相对介电常数为 ε_1); C_j^2 为满管电容值(即管道内充满油, 其相对介电常数为 ε_2)。当管道内第 k 个微元内分布的介电常数为 ε_2 , 其他微元内分布的介质介电常数为 ε_1 时, 电容值 $C_j(k)$ 经过归一化处理后可表示为 $C_{aj}(k)$:

$$C_{aj}(k) = \frac{C_j(k) - C_j^1}{C_j^2 - C_j^1} \quad k=1, 2, \dots, E; j=1, 2, \dots, 120 \quad (2)$$

归一化电容与灵敏度函数之间关系如下:

$$\begin{aligned} C_{aj}(k) &= \frac{\iint_D \varepsilon(x, y) \cdot S_j(x, y) dx dy - \iint_D \varepsilon_1 \cdot S_j(x, y) dx dy}{\iint_D \varepsilon_2 \cdot S_j(x, y) dx dy - \iint_D \varepsilon_1 \cdot S_j(x, y) dx dy} = \\ &= \frac{\iint_D (\varepsilon(x, y) - \varepsilon_1) \cdot S_j(x, y) dx dy}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdot \iint_D S_j(x, y) dx dy} \approx \\ &= \frac{\sum_{i=1}^E (\varepsilon(i) - \varepsilon_1) \cdot S_j(i) \cdot \delta_i}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdot \iint_D S_j(x, y) dx dy} = \\ &= \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdot S_j(k) \cdot \delta_k}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdot \iint_D S_j(x, y) dx dy} = \\ &= \frac{S_j(k) \cdot \delta_k}{\iint_D S_j(x, y) dx dy} \quad (3) \end{aligned}$$

则可以得到:

$$S_j(k) = C_{aj}(k) \cdot \frac{\mu}{\delta_k} = \frac{C_j(k) - C_j^1}{C_j^2 - C_j^1} \cdot \frac{\mu}{\delta_k} \quad k=1, 2, \dots, E; j=1, 2, \dots, 120 \quad (4)$$

式中: $\mu = \iint_D S_j(x, y) dx dy$ 是常数。

定义归一化电容 C_{aj} 相应的归一化灵敏度函数为 $S_{aj}(x, y)$, 则:

$$S_{aj}(x, y) = \frac{S_j(x, y)}{\iint_D S_j(x, y) dx dy} = \frac{S_j(x, y)}{\mu} \quad (5)$$

若微元足够小, 微元内的灵敏度可认为不变, 则归一化灵敏度函数的微元表示形式如下:

$$S_{aj}(k) = \frac{S_j(k)}{\iint_D S_j(x, y) dx dy} = \frac{S_j(k)}{\mu} = \frac{C_j(k) - C_j^1}{C_j^2 - C_j^1} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\delta_k} = \frac{C_j(k) - C_j^1}{C_j^2 - C_j^1} \cdot \frac{1}{\delta_k} = C_{aj}(k) \cdot \frac{1}{\delta_k} \quad (6)$$

空管归一化电容 $C_{aj}^1 = 0$, 因此

$$S_{aj}(k) = C_{aj}(k) \cdot \frac{1}{\delta_k} = [C_{aj}(k) - C_{aj}^1] \cdot \frac{1}{\delta_k} \quad k = 1, 2, \dots, E; j = 1, 2, \dots, 120 \quad (7)$$

根据公式(2)和(5)得:

$$C_{aj}(k) = \frac{C_j - C_j^1}{C_j^2 - C_j^1} = \frac{\iint_D \varepsilon(x, y) \cdot S_j(x, y) dx dy - \iint_D \varepsilon_1 \cdot S_j(x, y) dx dy}{\iint_D \varepsilon_2 \cdot S_j(x, y) dx dy - \iint_D \varepsilon_1 \cdot S_j(x, y) dx dy} = \frac{\iint_D (\varepsilon(x, y) - \varepsilon_1) \cdot S_j(x, y) dx dy}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdot \iint_D S_j(x, y) dx dy} = \frac{\iint_D \frac{\varepsilon(x, y) - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \cdot \frac{S_j(x, y)}{\mu} dx dy}{\iint_D \frac{\varepsilon(x, y) - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \cdot S_{aj}(x, y) dx dy} \quad (8)$$

考虑 ECT 系统管道内的介质分布, 设截面图像中任一像素点的灰度为:

$$u(x, y) = \frac{\varepsilon(x, y) - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \quad u(x, y) \subseteq [0, 1] \quad (9)$$

则图像灰度的定义将介质分布和图像直接联系起来。则得到

$$u(x, y) = \frac{\varepsilon(x, y) - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = \frac{V_2}{V} = 1 - \beta \quad (10)$$

其中, V 表示多相流的总体积, V_2 表示连续相的体积。则该函数的物理含义是在 (x, y) 处连续相的相含率, 且由公式(8)和(9)可知:

$$C_{aj}(k) = \iint_D u(x, y) \cdot S_{aj}(x, y) dx dy \quad j = 1, 2, \dots, 120 \quad (11)$$

假设微元内介质分布均匀, 则:

$$C_{aj} \approx \sum_{i=1}^E u(\zeta_i, \eta_i) \cdot S_{aj}(\zeta_i, \eta_i) \cdot \delta_i = \sum_{i=1}^E u(i) \cdot S_{aj}(i) \cdot \delta_i \quad i = 1, 2, \dots, E; j = 1, 2, \dots, 120 \quad (12)$$

$u(i)$ 是第 i 个微元的灰度值, 且 $u_i \subseteq [0, 1]$ 。用向量 $U = [u_1, u_2, \dots, u_E]^T$ 表示整个管道内 E 个微元像素的灰度值, 用向量 $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ 表示第 n 个电容值, 其中 $p_j = C_{aj}$, $j = 1, 2, \dots, n$ (在 16 电极 ECT 系统中 $n = 120$), 公式(12)可化为:

$$P = W \cdot U \quad (13)$$

式中: W 为 $n \times E$ 维矩阵, 它是公式(5)中的灵敏度函数 $S_{aj}(i)$ ($i = 1, 2, \dots, E; j = 1, 2, \dots, n$) 经过离散化后的值, 物理含义是所有微元内每个电容值的敏感程度, 矩阵中第 m 行 n 列的元素为灵敏度函数 $S_{aj}(i)$ 中 $i = n$ 和 $j = m$ 时的值。

ECT 系统中, 经离散化, 归一化后, 其原理表达式可有公式(13)改写成如下形式:

$$C = SG \quad (14)$$

式中: S 为 $n \times m$ 的灵敏度系数矩阵 (归一化后的雅克比矩阵); C 为 $n \times 1$ 阶的测量电容数据矢量矩阵 (本文采用仿真数据); G 为 $m \times 1$ 阶的灰度矢量矩阵; n 表示独立测量的电极对数; m 表示场域的剖分单元数。

公式(14)是 ECT 图像重建算法的理论基础, 表示出电容值, 灵敏度函数及图像像素之间的关系。

1.2 ECT 逆问题分析

ECT 系统逆问题的求解指的就是图像重建过程, 即通过传感器测量的独立电容数据反演检测区内介质的介电常数分布。

然而由于 ECT 系统的特殊性, 使得逆问题变得复杂, 以 16 电极 ECT 系统为例分析图像重建中存在的问题。

(1) 不适定性。对 16 个电极循环施以电压激励, 求解正问题。测得电容值数目远少于成像单元, 使得灵敏度矩阵和电容值存在非线性关系方程不具有唯一的解。

(2) 非线性。ECT 敏感场是一个具有“软场”特

性的场域,使得灵敏度系数分布是不均匀的。在边缘处越靠近激励电极,场的敏感性越强,即灵敏度系数越大,但是由于中心区域位置及分布在左半平面的电极离激励电极较远,使得场强变低,场的敏感性也随之降低,及灵敏度系数越小。一般情况下,假设灵敏度系数矩阵是一个常数阵,取为空场区域的灵敏度矩阵。

(3) 病态性。在线性理论中,矩阵的条件数反应方程组的病态性,条件数越大,则方程组病态越严重;在 ECT 系统中,灵敏度矩阵 S 的条件数很大,且灵敏度矩阵 S 经过奇异值分解后,奇异值不断逼近于零,ECT 图像重建问题是一个病态问题。

2 数值分析

正则化方法是处理不适定问题的主要工具,它的核心思想就是将一个不适定问题转化为一个近似适定问题。该方法是以最小二乘准则及平滑准则作为理论依据来进行计算的,其目标泛函为:

$$\min J(\mathbf{G}) = \min \|\mathbf{S}\mathbf{G} - \mathbf{C}\|^2 + \alpha \|\mathbf{L}\mathbf{G}\|^2 \quad (15)$$

式中: α 为正则化参数; \mathbf{L} 是正则化算子。

选取合适的正则化参数 $\alpha > 0$, 最小化方程 (15), 即可求得 Tikhonov 正则化法的解为:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \alpha \mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{C} \quad (16)$$

若 \mathbf{L} 选取单位矩阵, 则得到标准的 Tikhonov 正则化法的解:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{C} \quad (17)$$

标准 Tikhonov 正则化由于惩罚相 $\|\mathbf{G}\|$ 的引入, 导致标准 Tikhonov 泛函的过度光滑, 若真解本身不连续或者有些其他的不光滑性信息等, Tikhonov 正则化趋向于产生一个过于光滑的近似解, 从而导致有关不光滑信息的丢失, 反映在图像重建中表现为图像中细节信息的丢失, 空间分辨率不高。为此选择一个正定矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbf{C}^{n \times n}$, 并利用范数 $\|\mathbf{G}\|_{\mathbf{P}}^2 = \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G}$ 来代替惩罚相 $\|\mathbf{G}\|$ 。且正定矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 可以用一个微分算子 \mathbf{L} 来近似, 即 $\mathbf{P} = \mathbf{L}^T \mathbf{L}$ [11]。

首先, 用惩罚相 $\|\mathbf{G} - \mathbf{G}_0\|_{\mathbf{P}}$ 来定义偏离准确值 \mathbf{G}_0 的误差量, 使其可以包含一些非光滑的信息。

其次, 引入一些对角权值矩阵 \mathbf{Q} 重新定义数据项 $\|\mathbf{S}\mathbf{G} - \mathbf{C}\|$ 。广义正则化的目标函数可表示为:

$$\mathbf{G} = \arg \min \|\mathbf{S}\mathbf{G} - \mathbf{C}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\mathbf{G} - \mathbf{G}_0\|_{\mathbf{P}}^2 \quad (18)$$

当 $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, $\mathbf{Q} = \partial^2 \mathbf{I}$, $\mathbf{G}_0 = 0$ 时为标准 Tikhonov 正则化。

令 $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{P}^{1/2}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_0)$, $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{S} \mathbf{P}^{-1/2}$, $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{Q}^{1/2}(\mathbf{C} - \mathbf{S}\mathbf{G}_0)$, 则上述目标函数转化为:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{P}^{-1/2} \arg \min_{\tilde{\mathbf{G}}} \left(\|\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{C}}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{G}}\|^2 \right) \quad (19)$$

求得上述目标函数的解为 [12-14]:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{P}^{-1/2} (\tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{I})^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{G}_0 + (\mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{S} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{Q} (\mathbf{C} - \mathbf{S}\mathbf{G}_0) \quad (20)$$

或可表示为:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{S} + \mathbf{P})^{-1} (\mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{P} \mathbf{G}_0) \mathbf{G}_0 = \mathbf{G}_0 + \mathbf{P} \mathbf{S}^T (\mathbf{S} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{Q}^{-1})^{-1} (\mathbf{C} - \mathbf{S}\mathbf{G}_0) \quad (21)$$

相比标准 Tikhonov 正则化, 广义正则化可以解释为 $\tilde{\mathbf{S}}$ 在 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 范数条件下的奇异值分解。当 \mathbf{L} 是一个一阶差分算子, 且 $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$ 包含非平凡零空间时, 定义一个不可逆矩阵 \mathbf{P} 是有意义的, 此时可用广义奇异值分解解释。

定理 若矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 矩阵 $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{p \times n}$, 则存在正交矩阵 $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 和可逆矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 使得

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \Sigma_c \quad (22)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{k-i-j} & 0 \end{bmatrix} \equiv \Sigma_s \quad (23)$$

式中: $k = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \right)$, Σ_c 和 Σ_s 具有相同的列分

划, $\Sigma_c^T \Sigma_c + \Sigma_s^T \Sigma_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}_j = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_j)$,

$1 > c_1 \geq \dots \geq c_j > 0$, $\mathbf{S}_j = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_j)$,

$0 < s_1 \leq \dots \leq s_j < 1$, $\mathbf{C}_j^2 + \mathbf{S}_j^2 = \mathbf{I}_j$ 且,

$$i = \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \text{rank}(B) \quad (24)$$

$$i = \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (25)$$

直接利用矩阵的奇异值分解和 CS 分解证明上述定理:

引理 设矩阵 $Q_{11} \in R^{m \times k}$ 和 $Q_{21} \in R^{p \times k}$, 而矩阵 $Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix}$ 具有标准正交列。即 $Q_1^T Q_1 = Q_{11}^T Q_{11} + Q_{21}^T Q_{21} = I$, 则 Q_{11} 和 Q_{21} 的奇异值分解具有如下形式:

$$U^T Q_{11} W = \begin{bmatrix} I_i & 0 & 0 \\ 0 & C_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times k} \equiv D_c \quad (26)$$

$$V^T Q_{21} W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_j & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}_{p \times k} \equiv D_s \quad (27)$$

式中: U, V, W 为相应阶数的正交矩阵, 右边的两个对角阵具有相同的列分划, $C_j = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_j)$, $1 > c_1 \geq \dots \geq c_j > 0$, $S_j = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_j)$, $0 < s_1 \leq \dots \leq s_j < 1$, $D_c^T D_c + D_s^T D_s = I_k$ 。

设矩阵 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 的秩为 k , 它的奇异值分解为

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^T = Q_1 \Sigma P_1^T \quad (28)$$

式中: $Q = [Q_1 \ Q_2]$; $P = [P_1 \ P_2]$ 为相应阶数的正交矩阵; 而 Q_1, P_1 分别为正交矩阵 Q, P 的前 k 列; Σ 为 k 阶正的对角阵。 $Q_1 \Sigma P_1^T$ 称为矩阵的细 SVD。将矩阵 Q_1 做与矩阵 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 相同的行分划,

$Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix}$, 则有

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} \Sigma P_1^T \\ Q_{21} \Sigma P_1^T \end{bmatrix} \quad (29)$$

将 Q_{11}, Q_{21} 的 CS 分解式(26)和(27)代入(29)

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U D_c W^T \Sigma P_1^T \\ V D_s W^T \Sigma P_1^T \end{bmatrix} \quad (30)$$

矩阵 $W^T \Sigma P_1^T$ 的阶数为 $k \times n$, 并且是行满秩。构造矩阵

$$Y = \begin{bmatrix} W^T \Sigma P_1^T \\ P_2^T \end{bmatrix} \quad (31)$$

令 $Y^{-1} = X$, $\Sigma_c = [D_c \ 0] \in R^{m \times n}$ 及 $\Sigma_s = [D_s \ 0] \in R^{p \times n}$, 可得:

$$A = U D_c W^T \Sigma P_1^T = U [D_c \ 0] \begin{bmatrix} W^T \Sigma P_1^T \\ P_2^T \end{bmatrix} = U \Sigma_c Y = U \Sigma_c X^{-1}。$$

下面利用统计学方法来解释广义正则化算法, 已知贝叶斯估计的条件概率密度^[14]:

事件 b 情况下事件 x 发生的概率等于已知事件 x 情况下事件 b 发生的概率与 $p(x) / p(b)$ 的乘积, 即:

$$p(x|b) = \frac{p(b|x)p(x)}{p(b)} \quad (32)$$

由(32)可知, 要求解最接近 x 的数值, 则需求后验概率密度 $p(x|b)$ 的最大值。

假设事件 x 服从期望为 x_0 , 协方差 $\text{cov}(x) = P^{-1}$ 的高斯分布, 事件 e 的期望值为 0, 协方差 $\text{cov}(x) = Q^{-1}$, 则:

$$p(x|b) = \frac{1}{p(b)} \exp\left(-\frac{1}{2} \|Ax - b\|_Q^2\right) \exp\left(-\|x - x_0\|_P^2\right) \quad (33)$$

由于事件 x 和事件 e 相互独立, 则 $p_b(b|x) = p_e(b - Ax)$ 。而求后验概率密度 $p(x|b)$ 的最大值等价于最小化公式(34)。

$$\|Ax - b\|_Q^2 + \|x - x_0\|_P^2 \quad (34)$$

3 实验仿真

3.1 实验设置

将广义正则化算法用于 ECT 图像重建。仿真实验中, 采用 16 电极的仿真模型, 利用 COMSOL 软件和 MATLAB 软件, 管道内径为 200 mm, 管壁厚度 6 mm, 对层流、泡状流, 双 U 型及十字流几种典型流型分别仿真。管道内流型的剖分单元

数均设置为 3 228, 继而将各个流型结果分别保存为 .m 格式。利用 MATLAB 软件对模型程序进行优化, 然后利用 Tikhonov 正则化法、奇异值分解法以及广义正则化算法分别对其成像, 并利用图像误差和图像相关系数评价成像质量。

为了评价图像的成像质量, 将待重建图像与重建图像的相关系数和图像相对误差作为评价指标。

定义图像的相对误差为:

$$\text{图像误差} = \frac{\|\hat{G} - G\|}{\|G\|}$$

图像相对误差越小, 表示重建图像越接近真实图像。

$$\text{相关系数} = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{G}_i - \bar{\hat{G}})(G_i - \bar{G})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\hat{G}_i - \bar{\hat{G}})^2 \sum_{i=1}^N (G_i - \bar{G})^2}}$$

式中: G 为重建结果; \hat{G} 为设定的介电常数; \bar{G} 和 $\bar{\hat{G}}$ 分别为 G 和 \hat{G} 的平均值。

在仿真实验中, 已知待重建对象的形状、大小等相关信息, 通过判断重建图像和待重建对象之间的相关度, 评价图像质量。根据相关系数的定义可知, 相关系数越大, 图像之间的相关性越强, 表明成像精度越高, 图像质量越好。

3.2 实验结果

由表 1 可以看出, 对于环状流模型, 虽然广义正则化算法比奇异值分解法和 Tikhonov 正则化算法成像质量更好, 但是整体效果并不满意。对于层流和泡状模型, 广义正则化算法相比前两种算法, 可以对模型更准确成像, 且成像质量更高, 成像精度也有很大提高。为进一步验证算法成像效果, 对几种复杂流型进行图像重建, 重建图像如表 2 所示。

由表 2 可知, 相比 Tikhonov 正则化算法, 奇异值分解和广义正则化算法对复杂流模型具有更好的图像重建效果, 奇异值分解算法由于灵敏度系数矩阵的奇异值不断趋于零, 使得相关系

数很小, 进一步说明了 ECT 系统的病态性, 广义正则化算法比奇异值分解算法成像效果更加清晰、准确。

表 1 3 种算法的成像效果图

Tab. 1 Imaging effect of the three algorithms

流型	环状流	双泡流	层流	四泡流
仿真原型				
奇异值分解法				
Tikhonov 正则化				
广义正则化				

表 2 三种算法对复杂流型的成像效果图

Tab. 2 Imaging effect of three kinds of algorithms on complex flow pattern

流型	双扇型	双 U 型	十字流
Tikhonov 正则化			
奇异值分解法			
广义正则化			

分析表 3 可知, 在成像精度方面, 广义正则化算法的成像精度相对于奇异值分解算法和 Tikhonov 正则化有了明显的提高, 特别针对层流、四泡状和十字流模型时, 广义正则化算法在图像误差方面做到了很好的改进和控制。

分析表 4 可知, 简单模型广义正则化算法相比其它两种算法, 所成图像之间的相关性更强, 成像精度更高, 图像质量更好。

表 3 3 种算法的图像相对误差
Tab. 3 Image relative error of three algorithms

算法	环状流	双泡流	层流	四泡流	双扇型	双 U 型	十字流
奇异值分解法	0.412 3	0.564 2	0.512 4	0.564 2	0.601 2	0.686 4	0.602 3
Tikhonov 正则化	0.297 3	0.423 1	0.302 1	0.467 1	0.521 3	0.569 8	0.486 3
广义正则化	0.213 5	0.357 8	0.172 4	0.257 8	0.354 1	0.384 5	0.325 7

表 4 3 种算法的图像相关系数
Tab. 4 Image correlation coefficients of the three algorithms

算法	核心流	环状流	层流	泡状流	双扇型	双 U 型	十字流
奇异值分解法	0.512 0	0.521 3	0.514 5	0.329 8	0.453 2	0.465 8	0.389 7
Tikhonov 正则化	0.631 0	0.696 0	0.602 1	0.643 0	0.548 7	0.596 0	0.624 7
广义正则化	0.754 2	0.789 6	0.854 2	0.796 5	0.654 2	0.739 6	0.874 2

4 结论

深入讨论了 ECT 系统中电场分布的“软场”效应与灵敏度矩阵对图像重建的影响, 在此基础上, 将广义正则化算法应用于 ECT 图像重建, 利用贝叶斯估计对其进行阐述, 并与奇异值分解算法和 Tikhonov 正则化算法作比较, 发现广义正则化算法不仅能更好的解决 ECT 的病态问题, 且在成像质量和成像精度方面有了明显的提高, 特别是对于十字流等复杂模型, 广义正则化算法适应性更强, 所成图像分辨率更高。

参考文献:

[1] 赵玉磊, 郭宝龙, 闫允一. 电容层析成像技术的研究进展与分析 [J]. 仪器仪表学报, 2012, 33(8): 1909-1920. (Zhao Yulei, Guo Baolong, Yan Yunyi. Latest development and analysis of electrical capacitance tomography technology [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2012, 33(8): 1909-1920.)

[2] Liu Jing, Xu Wenzhong, Jiang Fan, et al. An image reconstruction algorithm to test flow patterns of multiphase flow for electrical capacitance tomography [J]. Journal of Engineering Thermophysics (S1810-2328), 2011, 32(4): 602-604.

[3] 杨钢, 王玉涛, 邵富群, 等. ECT 图像重建正则化参数选取新方法 [J]. 仪器仪表学报, 2009, 27(11): 1478-1482. (Yang Gang, Wang Yutao, Shao Fuqun, et al. New Parameter Selecting Method of Regularization for ECT Image Reconstruction [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2009, 27(11): 1478-1482.)

[4] 赵进创, 刘金花, 傅文利, 等. 改进敏感场的电容层析

成像图像重建算法 [J]. 计算机工程与应用, 2011, 8(3): 35-39. (Zhao Jinchuang, Liu Jinhua, Fu Wenli, et al. Image reconstruction algorithm based on dated sensitivity filed for ECT [J]. Computer Engineering and Applications, 2011, 8(3): 35-39.)

[5] 王化祥, 朱学明, 张立峰. 用于电容层析成像技术的共轭梯度算法 [J]. 天津大学学报, 2005, 38(1): 12-14. (Wang Huaxiang, Zhu Xueming, Zhang Lifeng. Conjugate gradient algorithm for electrical capacitance tomography [J]. Journal of Tianjin University, 2005, 38(1): 12-14.)

[6] 陈德运, 钟陈, 王莉莉, 等. 基于局部能量的电容层析成像融合方法 [J]. 计算机应用研究, 2012, 29(5): 1947-1951. (Chen Deyun, Zhong Chen, Wang Lili, et al. Image Fusion Method Based on Local Energy in Electrical Capacitance Tomography [J]. Application research of computer, 2012, 29(5): 1947-1951.)

[7] 雷兢. 多相流的电容层析成像图像重建研究 [D]. 北京: 中国科学院工程物理研究所, 2008. (Lei Jing. Research on image reconstruction of electrical capacitance tomography for the multiphase flow [D]. Beijing, China: China Academy of Engineering Physics, 2008.)

[8] Meurant G, Sommariva A. Fast variants of the Golub and Welsch algorithm for symmetric weight functions in Matlab [J]. Numerical Algorithms (S1017-1398), 2014, 67(3): 491-506.

[9] 郭志恒, 阚哲, 邵富群, 等. 一种非均匀正则化的 ECT 重建方法 [J]. 仪器仪表学报, 2013, 34(12): 2854-2859. (Guo Zhiheng, Kan Zhe, Shao Fuqun, et al. Anisotropic regularization method for electrical capacitance tomography image reconstruction [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2013, 34(12): 2854-2859.)

(下转第 1872 页)