Journal of System Simulation

Volume 29 | Issue 6 Article 16

6-4-2020

Model Uncertainty Quantification for Dependent Variables Based on Random Set Theory

Zhao Liang
1. Southwest University of Science and Technology, School of Information Engineering, Mianyang 621010, China; ;

Zhanping Yang
2. Institute of Electronic Engineering, Mianyang 621900, China;

Model Uncertainty Quantification for Dependent Variables Based on Random Set Theory

Abstract

Abstract: Random set theory provides a uniform mechanism for model uncertainty quantification in system analysis. An improved method was proposed based on random set theory for uncertainty quantification considering the dependence among system variables. *The Nataf transformation was used to generate dependent random samples to be consistent with correlation coefficients information, and then the joint basic probability assignments for the multidimensional focal elements were calculated to construct the random set*. The result of uncertainty quantification based on the random set can reflect the real system response under dependent variables. Simulation results show the presented method rationality.

Keywords

random set theory, uncertainty quantification, dependence, Nataf transformation

Recommended Citation

Zhao Liang, Yang Zhanping. Model Uncertainty Quantification for Dependent Variables Based on Random Set Theory[J]. Journal of System Simulation, 2017, 29(6): 1277-1283.

第 29 卷第 6 期 2017 年 6 月
系统仿真学报©
Journal of System Simulation
Vol. 29 No. 6 Jun., 2017

基于随机集理论的相关变量模型不确定性量化

赵亮 [1]，杨战平 [2]
(1.西南科技大学信息工程学院，四川 绵阳 621010；2.电子工程研究所，四川 绵阳 621900)

摘要：随机集理论为基于模型的系统分析提供了一种统一的不确定性量化框架。针对现有随机集理论模型不确定性量化研究中缺乏对模型变量相关性的考虑这一不足，*提出了一种改进的基于随机集理论的不确定性量化方法。该方法根据模型变量间的相关系数信息，通过 Nataf 变换产生相关随机样本，进而获取多维空间内焦元的联合基本概率分配。*由此所得的不确定性量化结果能够在模型变量间存在相关性的情况下正确反映系统状况。数值仿真证明了所提方法的有效性。

关键词：随机集理论；不确定性量化；相关性；Nataf 变换
中图分类号：TP391.9　　文献标识码：A　　文章编号：1004-731X (2017) 06-1277-07
DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201706016

Model Uncertainty Quantification for Dependent Variables Based on Random Set Theory

Zhao Liang[1], *Yang Zhanping*[2]
(1.Southwest University of Science and Technology, School of Information Engineering, Mianyang 621010, China;
2.Institute of Electronic Engineering, Mianyang, 621900 China)

Abstract: Random set theory provides a uniform mechanism for model uncertainty quantification in system analysis. An improved method was proposed based on random set theory for uncertainty quantification considering the dependence among system variables. *The Nataf transformation was used to generate dependent random samples to be consistent with correlation coefficients information, and then the joint basic probability assignments for the multidimensional focal elements were calculated to construct the random set*. The result of uncertainty quantification based on the random set can reflect the real system response under dependent variables. Simulation results show the presented method rationality.

Keywords: random set theory; uncertainty quantification; dependence; Nataf transformation

引言

建模仿真是现今科学领域中广泛采用的科研方法，在通过建模仿真的方式对特定系统进行分析时，受系统固有随机性、人们认知水平等因素的影响，模型中描述系统对象几何尺寸、材料特性的参数中往往存在不确定性。辨识这些不确定性，并在模型输出层面对各种不确定性的影响进行量化，这是模型确认以及获取可信系统分析结果的关键[1-3]。随着各领域物理建模的研究日益深入，影响模型输出的不确定性被研究者从来源、属性等方面进行了细化分类[3-4]，以此为基础发展出了多种针对特定不确定性的量化方法。但当研究对象是包含多种不确定性的复杂工程系统时，仅适用于特定不确定性类型的处理方法应用起来将存在诸多不便，为此需要具有广泛适应性，能够处理多种不确定性的方法。已有的研究显示随机集理论与多种不确定性处理方

收稿日期：2015-07-16　　修回日期：2015-11-19；
基金项目：西南科技大学博士研究基金(16zx7147)，中物院科技发展基金(2012B0403058)；
作者简介：赵亮(1983-)，男，四川德阳，博士生，研究方向为模型验证与确认、不确定性量化；杨战平(1966-)，男，重庆，博士，研究员，博导，研究方向为复杂系统建模与仿真。

法之间存在内在的联系，在此基础上可以实现对多种不确定性的统一表示[5-8]，进而在统一的框架下完成对复杂系统模型的不确定性量化。

随机集理论在为模型不确定性量化提供统一框架方面的能力已经引起了研究者的关注。Bernardini 阐述了在工程系统的不确定性建模分析中使用随机集理论的内涵[9]，Tonon 将该理论应用于飞行器的结构可靠性研究中[10-11]，并针对美国圣地亚国家实验室所提出的模型不确定性量化研讨问题，采用随机集理论进行了解答[12]，Hall 给出了特定情况下基于随机集理论的系统响应分析方法[13]，Oberguggenberger 介绍了基于随机集理论的非参数可靠性分析方法在处理认知不确定系统时的优势[14]。

虽然现有研究在利用随机集理论进行模型不确定性量化方面已取得了相当进展，但仍有部分问题亟待解决，具有代表性的就是在模型变量存在相关性的条件下如何基于随机集理论进行不确定性量化。现有采用该理论进行的系统分析中普遍假设模型变量间相互独立，而实际工程系统的变量之间往往存在相关性，这种相关性可以通过变量间的相关系数矩阵来体现，忽略此类相关性所得到的不确定性量化结果不能反映真实的系统状况。本文即针对现有基于随机集理论的模型不确定性量化方法未考虑模型变量的相关性这一缺陷，提出了一种结合 Nataf 变换的改进方法。该方法能够体现变量的相关性对模型输出的影响，从而为系统分析提供可信的不确定性量化结果。

1 随机集理论基本概念

简单地说，随机集就是满足某些可测条件的集值映射，其实际上是统计学中的点变量向“集合”变量的推广，其取值是由某个集合的子集所构成的集类中的元素。数学上对随机集有如下定义：设 Θ 为离散有限的辨识框架，(Ω，A，P)表示概率空间，(B，$\sigma(B)$)表示可测空间，其中 A 为 Ω 上的 σ_代数，P 为 A 的概率测度，B 为包含于 Θ 的幂集：$B\subseteq 2^{\Theta}$，$\sigma(B)$为 B 上的 σ_代数，则将映射 $\Omega\to B$ 称为随机集。

与本文相关的随机集表示方法涉及焦元与基本概率赋值(Basic Probability Assignment，BPA)的概念，下面对此进行简要介绍。令 $P(U)$为泛集 U 的幂集，满足式(1)性质的频率函数 $M(A_i)$被称为观测集 A_i ($A_i\subseteq U$)的基本概率赋值，它表示已有信息对 A_i 而不是 A_i 的任何子集的信任程度。

$$\begin{cases} M: P(U)\to[0,1] \\ M(\phi)=0 \\ \sum\limits_{A_i\in P(U)} M(A_i)=1 \end{cases} \tag{1}$$

当 $M(A_i)>0$ 时，称 A_i 为 U 的焦元，则随机集可以表示为由所有焦元所形成的族 $\boldsymbol{F}$ 及其 BPA 所组成的二元对($\boldsymbol{F}, \boldsymbol{M}$)[12]。

由于观测信息的非精确性，无法获得一般性变量 $u(u\in U)$或子集 $E(E\subseteq U)$的准确概率，但可以计算出其概率 Pr(E)的上下界：

$$\mathrm{Bel}(E)\leqslant \mathrm{Pr}(E)\leqslant \mathrm{Pl}(E) \tag{2}$$

式中：Bel(·)被称为信任函数，它是 E 所包含的焦元的概率之和；Pl(·)被称为似真函数，它是与 E 相交的焦元的概率之和，式(3)从数学上描述了 Bel(E)、Pl(E)与 $M(A_i)$的关系。

$$\begin{cases} \mathrm{Bel}(E)=\sum\limits_{A_i\subseteq E} M(A_i) \\ \mathrm{Pl}(E)=\sum\limits_{A_i\cap E\neq\phi} M(A_i) \end{cases} \tag{3}$$

设 g：$U\to Y$ 是关于一般性变量 u 的函数，有 $y=g(u)$，用随机集($\boldsymbol{F}, \boldsymbol{M}$)表示 u，随机集($\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho}$)是通过映射 g 所得到的($\boldsymbol{F}, \boldsymbol{M}$)的像，根据随机集的扩张原理[12]，有

$$\begin{cases} R=\{R_j=g(A_i): A_i\in F\} \\ \rho(R_j)=\sum\limits_{A_i:R_j=g(A_i)} M(A_i) \end{cases} \tag{4}$$

即通过映射 g，把 U 中非空子集 A_i 的基本概率赋值 $M(A_i)$传递到 Y 中对子集 R_j 的度量 $\rho(R_j)$。构造($\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho}$)需计算焦元 A_i 的像 R_j，其有式(5)所示闭区间形式：

$$R_j=\left[\inf_{\forall u\in A_i} g(u), \sup_{\forall u\in A_i} g(u)\right] \tag{5}$$

式(5)中涉及两次全局优化，根据 g 的性质，可以采用顶点法或现代优化方法[15]来计算 $\inf\limits_{\forall u\in A_i} g(u)$ 和 $\sup\limits_{\forall u\in A_i} g(u)$。

考虑映射 g 为一 K 维多元函数 $y=g(u_1, u_2,\ldots, u_K)$，其中 $u_k\subseteq U^K$，U^K 为 K 维辨识框架，对于任一变量 $u_k(m=1,2, \ldots, K)$，$(\boldsymbol{F}_k, \boldsymbol{M}_k)$为反映其不确定性的随机集，${}^K U$ 为 $\boldsymbol{F}_k$ $(k=1,2,\ldots,K)$的笛卡尔积：${}^K U=\boldsymbol{F}_1\times\boldsymbol{F}_2\times\ldots\times\boldsymbol{F}_k$，记 $\boldsymbol{F}_k$ 的焦元为 ${}^{uk}A_i$，则 ${}^K U$ 的元素 ${}^U A_i$ 可表示为 ${}^U A_i={}^{u1}A_i\times{}^{u2}A_i\times\ldots\times{}^{uK}A_i$，${}^{uk}A_i$ 为 $\boldsymbol{F}_k$ 的子集。若设 u_k 相互独立，则 ${}^U A_i$ 的 BPA 满足式(6)所示关系[7,12]，

$$M({}^U A_i)=M_1({}^{u_1}A_i)\times M_2({}^{u_2}A_i)\times\cdots\times M_K({}^{u_K}A_i) \tag{6}$$

在得到 y 的随机集表示以后，可由式(7)计算其累积概率分布函数界[12]：

$$\begin{cases} F_{\text{lower}}=\text{Bel}((-\infty,y])=\sum\limits_{u\geqslant\sup(R_j)}\rho(R_j) \\ F_{\text{upper}}=\text{Pl}((-\infty,y])=\sum\limits_{u\geqslant\inf(R_j)}\rho(R_j) \end{cases} \tag{7}$$

其中：F_{lower} 和 F_{upper} 分别表示 y 的累积概率分布函数的下界和上界。

对于模型的不确定性量化而言，可以将 $y=g(\boldsymbol{u})$ 视为描述系统的抽象模型，其中 $\boldsymbol{u}=[u_1, u_2,\ldots, u_K]$为系统的不确定性输入向量，$y$ 为系统响应，由 F_{lower} 和 F_{upper} 构成的包络中包含了系统响应分布状况的所有可能，此即为所要求的模型不确定性量化结果。

2 考虑变量间相关性的随机集理论模型不确定性量化

现有基于随机集理论的不确定性量化研究通常是建立在假设系统各变量相互独立的基础之上的，此时可以简单地通过将各变量焦元的 BPA 相乘的方式得到多维焦元的联合 BPA，如式(6)所示。但实际工程系统的变量之间往往是存在相关性的，此时式(6)可能不再成立。为此本节将提出一种通过变量的相关系数矩阵构造多维焦元的联合 BPA 的方法，以此实现不确定性量化过程中对变量相关性的考虑。

通常说来，考察变量之间的相关性是以已知变量的联合样本或联合概率分布为前提的，而在这样的前提下构建能够反映变量相关性的随机集实际上并不困难，本文后面所给出的不确定性量化步骤中的第(6)、(7)步即为此类条件下构建随机集的方法。与上述前提条件不同，本文的关注点在于缺乏变量间联合概率分布或者联合样本，但已知各变量的边缘分布以及变量间的相关系数矩阵的情况。这种情况通常存在于变量信息依靠专家经验、近似系统等渠道来给出的场合。通常认为相关系数矩阵在这类情况下若非单位阵即意味着变量间存在相关性[16-18]，此时通过考察矩阵中非对角线元素的绝对值大小即可判断变量间相关的程度，若其>0.4，则意味着变量间显著相关。针对这类问题，Jiang 在近年来提出过一种基于椭球模型的处理方法[16]，但其在将变量信息转换至椭球区域的过程中存在舍弃部分信息的可能，由此所得的 BPA 的合理性尚缺乏详细说明。相比之下，本文方法不会舍弃信息，各计算环节也具备严格的理论依据。

对于 K 维随机变量 $\boldsymbol{u}=[u_1, u_2,\ldots, u_K]$，已知 $u_k(k=1,2, \ldots, K)$的概率密度函数 $f_k(u_k)$，通过以下等概率转换原则[18]引入 K 维标准正态随机变量 $\boldsymbol{v}=[v_1, v_2,\ldots, v_K]$，

$$\begin{cases} \Phi(v_k)=F_k(u_k) \\ v_k=\Phi^{-1}(F_k(u_k)) \end{cases} \tag{8}$$

式中：$F_k(\cdot)$为 u_k 的累积概率分布函数；$\Phi(\cdot)$为标准正态变量的累积分布函数。则根据 Nataf 变换理论[17-18]，由隐函数求导法则可推得不确定性变量 $\boldsymbol{u}$ 的联合概率密度函数为：

$$f_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})=f_1(u_1)f_2(u_2)\cdots f_K(u_K)\frac{\phi_K(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\rho}_0)}{\phi(v_1)\phi(v_2)\cdots\phi(v_K)} \tag{9}$$

式中：$\phi(\cdot)$为标准正态变量的概率密度函数；$\phi_K(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\rho}_0)$表示均值为 0，方差为 1 且相关系数矩阵为 $\boldsymbol{\rho}_0$ 的 K 维标准正态分布。设输入变量 $\boldsymbol{u}$ 的相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}$ 的分量为 ρ_{kn}，由相关系数定义及式(8)、式(9)可得：

$$\rho_{kn}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{u_k-\mu_{u_k}}{\sigma_{u_k}}\right)\left(\frac{u_n-\mu_{u_n}}{\sigma_{u_n}}\right)\cdot$$

$$f_{u_k u_n}(u_k,u_n)\mathrm{d}u_k\mathrm{d}u_n=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{F_k^{-1}(\Phi(v_k))-\mu_{u_k}}{\sigma_{u_k}}\right)\cdot$$

$$\left(\frac{F_n^{-1}(\Phi(v_n))-\mu_{u_n}}{\sigma_{u_n}}\right)\phi_2(v_k,v_n,\rho_{0kn})\mathrm{d}v_k\mathrm{d}v_n \tag{10}$$

式中：$f_{ukun}(u_k, u_n)$为第 k 和第 n 个变量的联合概率密度函数；ρ_{0kn} 为 $\boldsymbol{\rho_0}$ 的分量。至此，系统输入变量 $\boldsymbol{u}$ 的相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}$ 与标准正态变量 $\boldsymbol{v}$ 的相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}_0$ 的关系已由式(10)所建立，通过经验公式或 Gauss-Hermite 积分[18]的方式可以对式(10)中的 ρ_{0kn} 进行计算。再对所得的 $\boldsymbol{\rho}_0$ 进行 Choleskey 分解：$\boldsymbol{\rho}_0=\boldsymbol{L}_0\boldsymbol{L}_0^{\mathrm{T}}$，利用分解所得的下三角阵 $\boldsymbol{L}_0$ 可将相关标准正态变量 $\boldsymbol{v}$ 转换为独立标准正态变量 $\boldsymbol{w}$：

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{L}_0^{-1}\boldsymbol{v} \tag{11}$$

式(8)~(11)给出了相关变量至独立标准正态变量的转换方式，利用这一转换的逆运算，可以得到与所给输入变量的相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}$ 一致的相关随机样本，在此基础上通过多元核密度估计建立起相关变量的联合概率密度分布 $f_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})$，再通过多维积分的方式即可获得多维空间中特定焦元的 BPA，该 BPA 的取值考虑了变量之间的相关性，以此构建的输入变量的随机集能够确保最终的不确定性量化结果真实反映系统状况。下面针对具有 K 维相关输入变量，且已知各变量分布 $F_k(\cdot)$以及变量间相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}$ 的系统，给出基于随机集理论的不确定性量化步骤：

1) 产生 K 组独立的标准正态分布样本 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_K$，各组样本中包含 N 个元素，$w_{kn}(k=1,2,\dots, K, n=1,2,\dots, N)$表示第 k 组样本中的第 n 个元素；

2) 由式(10)计算任意相关标准正态变量 v_k、v_l 的相关系数 ρ_{0kl}，以此构造相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}_0$；

3) 对 $\boldsymbol{\rho}_0$ 进行 Choleskey 分解 $\boldsymbol{\rho}_0=\boldsymbol{L}_0\boldsymbol{L}_0^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{L}_0^{-1}\boldsymbol{v}$ 得到 K 组相关标准正态样本 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_K$；

4) 由式(8)中等概率变换的逆运算 $u_k=F_k^{-1}(\Phi(v_k))$得到 K 维变量的相关样本 u_{kn}；

5) 根据所得的相关样本 u_{kn}，采用式(12)所示多元核密度估计构建 K 维变量 $\boldsymbol{u}$ 的联合概率密度分布，

$$\hat{f}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})=\frac{1}{N(h_1\cdots h_K)}\sum_{n=1}^{N}L\left(\frac{1}{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n)\right) \tag{12}$$

式中：$\boldsymbol{u}_n$ 表示一 K 维的相关样本；$\boldsymbol{H}=[h_1, h_2,\dots, h_K]$ 为带宽向量；$L(\cdot)$为多元核函数，文中所用多元正态分布的核函数具有式(13)形式，

$$L(\boldsymbol{u})=(2\pi)^{-\frac{K}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}\right) \tag{13}$$

记 σ_k 为变量 u_k 的样本标准差，则近似的核平滑带宽取为:

$$h_k=\left(\frac{4}{N(K+2)}\right)^{\frac{1}{K+4}}\sigma_k \tag{14}$$

6) 基于多元核密度估计所得的系统输入变量联合概率分布 $\hat{f}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})$，由式(15)求得焦元 ${}^{U}A_i$ 的 BPA：

$$M({}^{U}A_i)=\int_{{}^{u_1}A_i}\int_{{}^{u_2}A_i}\cdots\int_{{}^{u_K}A_i}\hat{f}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}u_K\cdots\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_1 \tag{15}$$

式中：多维积分可采用数值积分的方式予以求解；

7) 由焦元 ${}^{U}A_i$ 所形成的族以及式(15)所得的相应 BPA 构成对系统输入变量的随机集表示$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{M})$，再由式(4)所示扩张原理得到关于系统响应的随机集表示$(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho})$，最后由式(7)求得系统响应的累积概率分布函数界 F_{lower} 和 F_{upper}，以此作为对系统进行不确定性量化的结果。

3 算例分析

以某含有两相关变量的系统为例，其响应函数如式(16)所示，

$$g(\boldsymbol{u})=18-3u_1-2u_2 \tag{16}$$

变量 u_1、u_2 的分布服从式(17)所示联合概率密度函数：

$$f_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})=(u_1+u_2+u_1u_2)\cdot$$
$$\exp(-(u_1+u_2+u_1u_2)),u_1,u_2>0 \tag{17}$$

该联合概率密度函数在使用本文方法对系统进行不确定性量化的过程中是未知的，式(17)仅用

于计算该系统响应的标准概率分布，以此作为本文方法所得结果的参照对象。已知关于该系统的信息为变量 u_1 和 u_2 均服从参数为 1 的指数分布，u_1、u_2 间的相关系数为–0.403 66。现根据已知信息对式(16)所示系统进行基于随机集理论的不确定性量化，并比较量化过程中考虑变量相关性与否对最终结果的影响。

采用 Matlab 仿真软件进行计算。依照前述不确定性量化步骤，首先产生两组独立的标准正态分布样本，每组样本中包含 10 000 个样本元素，如图 1 所示。

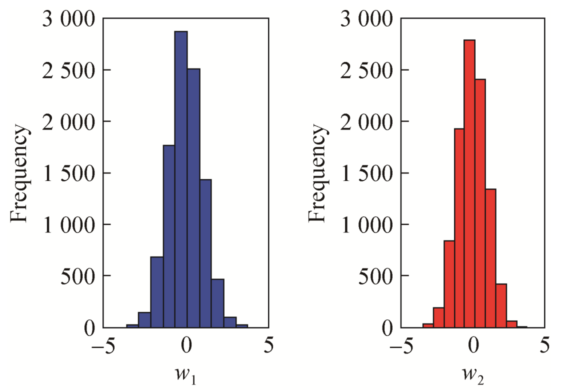

图 1　两组独立标准正态分布样本的频数示意图
Fig. 1　Frequency from two independent sample sets of standard normal distribution

再通过 Gauss-Hermite 积分的方式由式(10)求得相关标准正态变量 v_1, v_2 的相关系数 ρ_{012}=–0.565 9，故相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}_0$=[1 –0.565 9; –0.565 9 1]。对 $\boldsymbol{\rho}_0$ 进行 Choleskey 分解得到的 $\boldsymbol{L}_0$=[1 0.0; –0.565 9 0.824 5]。由 $\boldsymbol{L}_0\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$ 得到两组相关标准正态样本 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$，再通过等概率变换的逆运算 $u_k=F_k^{-1}(\Phi(v_k))$，得到变量 u_1、u_2 的相关样本，图 2 为利用式(12)所示核密度估计方法，根据 u_1、u_2 的相关样本所得的联合概率密度分布 $\hat{f}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})$，其中核密度估计所用的带宽分别为 h_1=0.208 7，h_2=0.210 3。

根据图 2 所示联合概率密度分布，由式(15)计算焦元 $^{U}A_i$ 的 BPA。此处分别采用了 32 个焦元对 u_1、u_2 的分布域进行划分，故对于 $\boldsymbol{u}$ 而言，其在二维辨识框架下的焦元族共含有 32×32 个焦元。图 3 所示为 $\boldsymbol{u}$ 的焦元族以及将 $\hat{f}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})$ 代入式(15)所得的 BPA 所构成的随机集，其中 u_1-u_2 平面内的方格代表一个二维焦元，方格的高度代表该焦元的 BPA。

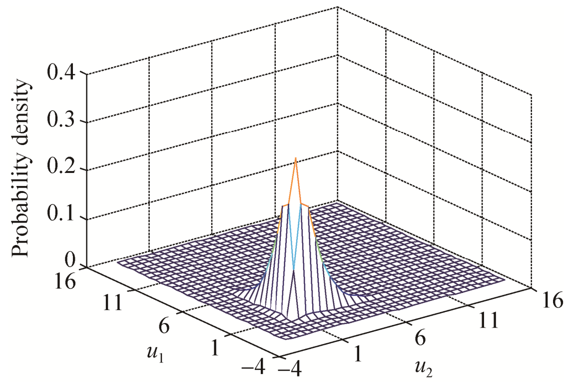

图 2　$\boldsymbol{u}$ 的核密度估计
Fig. 2　Kernel density estimation for $\boldsymbol{u}$

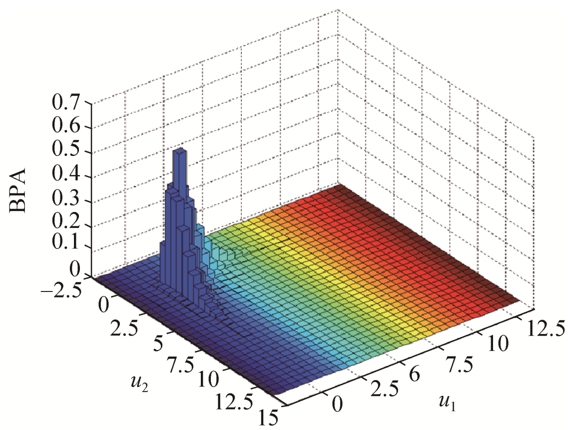

图 3　考虑相关性时输入变量的随机集
Fig. 3　Random set considering dependence for input variables

与图 3 相对应，图 4 所示为未考虑变量相关性时 $\boldsymbol{u}$ 的随机集示意图，其 BPA 由 $M(^{U}A_i)=M_1(^{u_1}A_i)\times M_2(^{u_2}A_i)$ 求得，其中 $M_j(^{u_j}A_i)=\int_{^{u_j}A_i} f_{u_j}(u_j)\mathrm{d}u_j$ (i=1,…,32，j=1,2)，$f_{u_j}(u_j)$ 为参数为1 的指数分布函数。基于图 3、图 4 所示 $\boldsymbol{u}$ 的随机集表示，由式(4)所示扩张原理得到关于系统响应的随机集表示，并由式(7)求得系统响应的累积概率分布函数界，如图 5 所示。

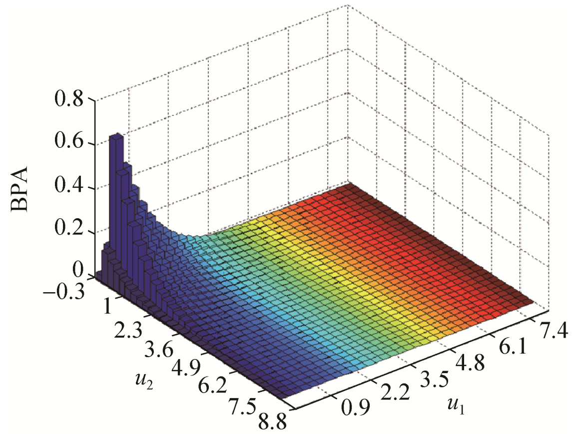

图 4 未考虑相关性时输入变量的随机集
Fig. 4 Random set without considering dependence for input variables

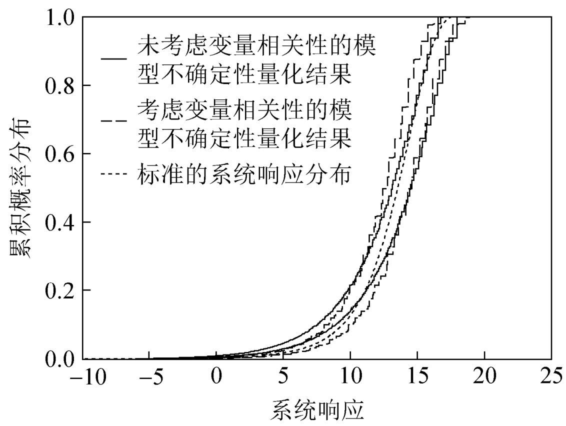

图 5 不确定性量化结果对比
Fig. 5 Comparison of uncertainty quantifications

图 5 中"标准的系统响应分布"是基于式(17)所示联合概率密度函数，通过舍选抽样的方式产生 10 000 个符合该密度函数的联合样本，并将样本代入式(16)所得的系统响应分布。其中舍选抽样过程如下：考虑 u_1-u_2 平面内坐标在 0~10 之间的矩形区域($f(\boldsymbol{u})$在 u_1 或 u_2 大于 10 的区域的概率密度值极小，可忽略)，$f(\boldsymbol{u})$在该区域内的值不会超过 0.5，抽样时首先在 $0\leqslant f(\boldsymbol{u})\leqslant 0.5$，$0\leqslant u_1\leqslant 8$，$0\leqslant u_2\leqslant 8$ 的空间内按均匀分布投入一批点，提取其中位于曲面 $f(\boldsymbol{u})$以下的点，以这些点在 u_1-u_2 平面内的坐标作为变量 u_1、u_2 的联合样本，其余的点则被舍弃，如此重复直到获得所需数量的联合样本，这些联合样本的概率分布与 $f(\boldsymbol{u})$一致。

观察图 5 可以发现，常规未考虑变量相关性的随机集模型不确定性量化方法针对该算例所得的概率包络不能完全覆盖"标准的系统响应分布"，标准系统响应分布的左侧尾部处于常规方法所得的概率包络以外，这说明常规方法所得结果无法反映系统的真实状况，基于这一结果所进行的决策将因为低估了系统响应的分散性而存在风险。而本文提出的考虑变量相关性的方法所得概率包络完整地覆盖了整个"标准的系统响应分布"，说明本文方法基于已知信息所得的不确定性量化结果与真实的系统状况是一致的，这能够为基于不确定性量化所做的模型确认以及其它系统分析提供准确的依据。另外需要提到的是就该算例而言，如图 5 所示概率包络的产生主要源于将变量的概率分布信息转化为随机集表示的过程中所存在的离散误差，增加随机集中的焦元数量可以减少这一离散误差。

4 结论

本文针对现有基于随机集理论的模型不确定性量化方法未考虑模型变量的相关性这一缺陷，提出了一种结合 Nataf 转换过程的改进方法。该方法在产生多维焦元的联合 BPA 时利用了变量间的相关系数矩阵，能够在变量间存在相关性的情况下给出准确覆盖系统真实响应分布的概率包络。文中的改进使得基于随机集理论的不确定性量化框架的适用范围扩展至模型变量存在相关性的情况，这有助于模型不确定性量化统一框架进一步实用化。

参考文献：

[1] Helton J C. Quantification of Margins and Uncertainties: Conceptual and Computational Basis [J]. Reliability Engineering and System Safety (S0951-8320), 2011, 96(9): 976-1013.

[2] Helton J C, Johnson J D. Quantification of margins and uncertainties: Alternative representations of epistemic uncertainty [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2011, 96(9): 1034-1052.

[3] Harsheel S, Serhat H, Tyler W. Quantification of Margins and Mixed Uncertainties Using Evidence Theory and Stochastic Expansions [J]. Reliability

Engineering and System Safety (S0951-8320), 2015, 138(1): 59-72.

[4] Oberkampf W L, Helton J C, Joslyn C A, et al. Challenge Problems: Uncertainty in System Response Given Uncertain Parameters [J]. Reliability Engineering and System Safety (S0951-8320), 2004, 85(1-3): 11-19.

[5] Nguyen H T. How to Fully Represent Expert Information about Imprecise Properties in A Computer System: Random Sets, Fuzzy Sets, and Beyond: An Overview [J]. International Journal of General Systems (S0308-1079), 2014, 43(6): 586-609.

[6] 徐晓滨, 文成林, 刘荣利. 基于随机集理论的多源信息统一表示与建模方法 [J]. 电子学报, 2008, 36(6): 1174-1180. (Xu Xiao-bin, Wen Cheng-lin, Liu Rong-li. The Unified Method of Describing and Modeling Multisource Information Based on Random Set Theory [J]. Acta Electronica Sinica (S0372-2112), 2008, 36(6): 1174-1180.)

[7] 郭惠昕, 戴娟, 唐蒲华, 等. 基于随机集的不完整信息可靠性分析方法 [J]. 机械科学与技术, 2011, 30(2): 290-296. (Guo Hui-xin, Dai Juan, Tang Pu-hua, et al. Analysis of Reliability with Imperfect Information in the Unified Framework of Random Set Theory [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering (S1003-8728), 2011, 30(2): 290-296.)

[8] 锁斌, 程永生, 曾超, 等. 基于证据理论的异类信息统一表示与建模 [J]. 系统仿真学报, 2013, 25(1): 6-11. (Suo Bin, Cheng Yong-sheng, Zeng Chao, et al. Unified Method of Describing and Modeling Herterogeneous Information Based on Evidence Theory [J]. Journal of System Simulation (S1004-731X), 2013, 25(1): 6-11.)

[9] Bernardini A. What are the random and fuzzy sets and how to use them for uncertainty modeling in engineering systems [C]// Elishakoff I. Whys and hows in uncertainty analysis: probability, fuzziness and anti-optimization. Austria: Springer, 1999: 63-125.

[10] Tonon F, Bernardini A, Mammino A. Reliability Analysis of Rock Mass Response by Means of Random Set Theory [J]. Reliability Engineering and System Safety (S0951-8320), 2000, 70(3): 263-282.

[11] Tonon F, Bae H R, Grandhi R V, et al. Using Random Set Theory to Calculate Reliability Bounds for A Wing Structure [J]. Structure and Infrastructure Engineering (S1573-2479), 2006, 2(3/4): 191-200.

[12] Tonon F. Using Random Set Theory to Propagate Epistemic Uncertainty through A Mechanical System [J]. Reliability Engineering and System Safety (S0951-8320), 2004, 70(3): 169-181.

[13] Hall J W, Lawry J. Generation, Combination and Extension of Random Set Approximations to Coherent Lower and Upper Probabilities [J]. Reliability Engineering and System Safety (S0951-8320), 2004, 85(1/3): 89-101.

[14] Oberguggenberger M, Fellin W. Reliability Bounds through Random Sets: Non-parametric Methods and Geotechnical Applications [J]. Computers and Structures (S0045-7949), 2008, 86(10): 1093-1101.

[15] Suo B, Cheng Y S, Zeng C, et al. Computational Intelligence Approach for Uncertainty Quantification Using Evidence Theory [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics (S1004-4132), 2013, 24(2): 250-260.

[16] Jiang C, Wang B, Li Z R, et al. An evidence-theory model considering dependence among parameters and its application in structural reliability analysis [J]. Engineering Structures (S0141-0296), 2013, 57: 12-22.

[17] Qing X. Evaluating Correlation Coefficient for Nataf Transformation [J]. Probabilistic Engineering Mechanics (S0266-8920), 2014, 37(Complete): 1-6.

[18] Li H S, Lv Z Z, Yuan X K. Nataf Transformation Based Point Estimate Method [J]. Chinese Science Bulletin (S1001-6538), 2008, 53(17): 2586-2592.