

6-3-2020

Analysis of Static Equilibrium Workspace for Under-constrained Cable-driven System with Multi-robots

Zhigang Zhao

School of Mechatronic Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

Li Wei

School of Mechatronic Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

Youde Li

School of Mechatronic Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

Yanlin Wang

School of Mechatronic Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

See next page for additional authors

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Analysis of Static Equilibrium Workspace for Under-constrained Cable-driven System with Multi-robots

Abstract

Abstract: For the under-constrained system that multi-robots tow the payload by cables, which does not meet the condition of force closure and equations are generally not compatible, so the accurate workspace can't be found out. *The static equilibrium equation of the system was established, and then the least squares principle combined with the Monte-Carlo method was put forward. When the movement is low speed or quasi static for the payload, the approximate static equilibrium workspace can be found out quickly and the expression of the cable tension is given by using the normal equations and QR decomposition respectively. When position of robots and position and pose of the payload happen that the wrench isn't failed, there is the unique least square solution.* The effectiveness of the proposed method was validated by computer simulation, the method can be used to quickly find out static equilibrium workspace of the under-constrained cable-driven system for different space configuration, which provides the foundation to the research of planning and control for the system.

Keywords

under-constrained, static equilibrium, workspace, simulation

Authors

Zhigang Zhao, Li Wei, Youde Li, Yanlin Wang, and Ma Yan

Recommended Citation

Zhao Zhigang, Li Wei, Li Youde, Wang Yanlin, Ma Yan. Analysis of Static Equilibrium Workspace for Under-constrained Cable-driven System with Multi-robots[J]. Journal of System Simulation, 2017, 29(4): 708-713.

多机器人欠约束绳牵引系统静平衡工作空间分析

赵志刚, 李巍, 李有德, 王砚麟, 马延

(兰州交通大学机电工程学院, 兰州 730070)

摘要: 由于多机器人绳牵引负载的欠约束系统, 不满足力封闭条件, 同时方程组一般不相容, 无法求出准确的工作空间。建立了系统的静平衡方程, 提出利用最小二乘法原理结合蒙特·卡罗方法, 对负载低速或准静态运动时, 能够快速求出其近似静平衡工作空间, 并分别利用法方程和 QR 分解给出了绳拉力的表达式。在机器人的位置和负载的位姿不发生力旋量失效的情况下, 其有唯一的最小二乘解。通过仿真验证了该方法的有效性, 利用该方法可快捷地求出不同空间构型的欠约束绳牵引系统的静平衡工作空间, 为系统规划与控制的研究提供了基础。

关键词: 欠约束; 静平衡; 工作空间; 仿真

中图分类号: TP391.9

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2017) 04-0708-06

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201704002

Analysis of Static Equilibrium Workspace for Under-constrained Cable-driven System with Multi-robots

Zhao Zhigang, Li Wei, Li Youde, Wang Yanlin, Ma Yan

(School of Mechatronic Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: For the under-constrained system that multi-robots tow the payload by cables, which does not meet the condition of force closure and equations are generally not compatible, so the accurate workspace can't be found out. The static equilibrium equation of the system was established, and then the least squares principle combined with the Monte-Carlo method was put forward. When the movement is low speed or quasi static for the payload, the approximate static equilibrium workspace can be found out quickly and the expression of the cable tension is given by using the normal equations and QR decomposition respectively. When position of robots and position and pose of the payload happen that the wrench isn't failed, there is the unique least square solution. The effectiveness of the proposed method was validated by computer simulation, the method can be used to quickly find out static equilibrium workspace of the under-constrained cable-driven system for different space configuration, which provides the foundation to the research of planning and control for the system.

Keywords: under-constrained; static equilibrium; workspace; simulation

引言

多机器人通过绳索协同牵引负载构成一个紧

耦合系统, 如多架直升机协同吊运重物。它既有并联机器人刚度大、精度高、灵活性强、承载能力强等特点; 又有绳驱动结构简单、惯性小、工作空间大和运动速度快等特点。

20 世纪 80 年代, 美国国家标准与技术研究院 (NIST) 研制了用于吊装的绳牵引并联机器人 RoboCrane^[1], 由六根绳子共同牵引负载从而实现定



收稿日期: 2015-06-30 修回日期: 2015-10-10;
基金项目: 国家自然科学基金(51265021), 高等学校博士学科点专项科研基金(20126204120004), 教育部科学技术研究重点项目(212184), 甘肃省自然科学基金(1212RJZA067);
作者简介: 赵志刚(1975-), 男, 甘肃, 博士, 教授, 研究方向为复杂系统辨识与建模、多机器人系统、特种机器人等。

<http://www.china-simulation.com>

• 708 •

位和移动。MING A^[2]首先提出了绳牵引并联机器人的分类, 分为以下 4 类: (1) 当 $m=n$ 时, 为不完全约束定位机构(IRPMs)。其中, m 为绳的根数, n 为末端执行器的自由度, 下同; (2) 当 $m=1+n$ 时, 为完全约束定位机构(CRPMs); (3) 当 $m>1+n$ 时, 为冗余约束定位机构(RRPMs); (4) 当 $m<n$ 时, 为欠约束定位机构(URPMs)。郑亚青^[3]基于矢量封闭原理对 7 根绳牵引的六自由度并联机构的可达空间进行了分析。刘欣^[4-5]将力封闭手指抓取机器人的凸条件引入至一般绳牵引并联机器人证明了前三类机构工作空间存在的条件, 并给出了一致求解策略。欧阳波^[6]对前三类的六自由度机构提出了一种快速求解方法。Ethan Stump^[7-8]利用 Farkas 和 Stiemke 引理对前三类机构的的工作空间的边界进行了描述。

上述第四类机构由于欠约束不满足力封闭条件, 因此研究的相对较少。但对于负载低速或准静态运动时, 欠约束机构中负载的静平衡空间仍然有其意义。因此本文提出利用最小二乘法原理, 能够快速算出欠约束机构中负载的近似静平衡空间。同时本文研究的系统也不同于上述文献中的机构, 上述文献中的机构一般是将绳索的一端连在动平台上, 另一端通过固定不动的滑轮连接电机, 通过电机变化绳长, 实现对动平台的牵引, 因此需要设计成特定的机构。而本文研究的系统是考虑绳的一端连在机器人上, 绳与机器人的连接点具有平动的三个自由度, 这样机器人具有任意移动性, 因此机构可以不做限制了, 这样系统变得更加灵活。本文重点研究绳索与机器人的连接点, 不研究机器人本身, 因此把机器人当作质点进行研究。

1 静平衡方程

m 台机器人协同绳牵引系统如图 1 所示, 考虑每个机器人连接 1 根绳, 由 m 根绳和一个 n ($1 \leq n \leq 6$) 自由度重物(负载)组成, 其中 $m < n$, 属于欠约束。因为把机器人看成质点进行分析, 所以机器人在空间的位置就是绳与机器人的连接点 P_m 。绳索与重物的连接点分别用 B_m 表示。在空间中建立全局坐标系

O -XYZ, 局部坐标 O' -X'Y'Z'建立在重物的质心上。

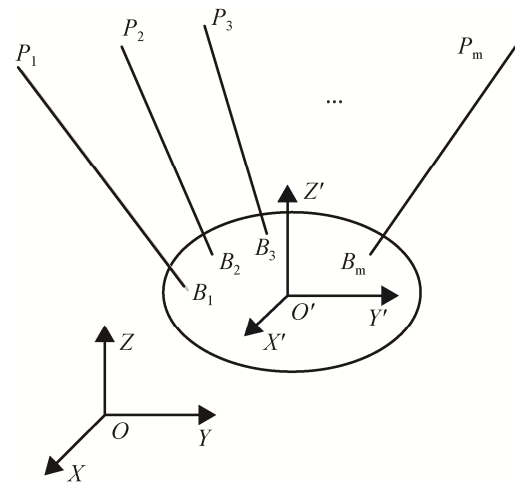


图 1 系统示意图

Fig. 1 Schematic diagram of system

r 为重物质心 O' 在全局坐标系的位置

$$r = [x \ y \ z]^T \quad (1)$$

R 为局部坐标系相对于全局坐标系的旋转变换矩阵

$$R = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中: c 表示 \cos , s 表示 \sin 。

b_m 是绳索与重物的连接点 B_m 在局部坐标系中的坐标, 则可得

$$B_m = Rb_m + r \quad (3)$$

则绳长可以由 P_m 、 B_m 得到:

$$l_m = \sqrt{(x_{P_m} - x_{B_m})^2 + (y_{P_m} - y_{B_m})^2 + (z_{P_m} - z_{B_m})^2} \quad (4)$$

在全局坐标系中, 每根绳用零节距的单位力旋量表示为:

$$e_m = \frac{1}{l_m} \begin{bmatrix} B_m P_m \\ \overline{OB_m} \times B_m P_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

重物的质量为 M , 在全局坐标系中, 重力用零节距的单位力旋量表示为:

$$G = -Mg[i \ r \times i]^T, \quad i = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (6)$$

设每根绳的张力大小为 T_m , 对重物利用牛顿-欧拉方程可得系统静平衡方程:

$$[e_1 \ e_2 \ \dots \ e_m] T_{m \times 1} = -G \quad (7)$$

$$T_{m \times 1} = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_m]^T \quad (8)$$

2 工作空间分析

静平衡工作空间是指重物满足静平衡方程时, 重物质心所在的空间位置的集合, 用数学描述如下。

$$W = \{(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \in R^6 \mid g(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0\} \quad (9)$$

式中: W 表示重物的静平衡工作空间; x, y, z 表示重物质心的位置; α, β, γ 表示重物的姿态角; R^6 表示六维实数域; g 表示静平衡方程式(7)。其中式(9)表示的是重物自由度最多时的情况, 即 $n=6$ 。

由于每根绳都有能承受的最大许用拉力 T_{\max} , 同时绳只能提供拉力, 为保证绳始终处于绷紧状态, 拉力应大于 0, 因此:

$$T_m \in (0, T_{\max}) \quad (10)$$

将静平衡方程(7)写成如下形式:

$$AT_{m \times 1} = -G \quad (11)$$

则结构矩阵 A 满足:

$$A = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_m]_{n \times m} \quad (12)$$

由于本文采用蒙特·卡罗方法随机产生机器人的位置、重物的位姿, 这样绳长可以通过式(4)计算出来。由于结构矩阵 A 与机器人的位置、重物的位姿和绳长有关。 G 与重物的质量和位置有关。这样在结构矩阵 A 和 G 已知的前提下, T_m 作为未知量, 式(11)构成线性方程组。文献[9]指出绳牵引并联机构的奇异性类型仅有过运动性奇异, 在重物的位姿不发生力旋量失效的前提下, 结构矩阵 A 应是满秩矩阵, 即 $\text{rank}(A) = \min\{m, n\}$, 不发生降秩现象。由于本文研究的是欠约束机构即 $m < n$ 的情况, 结构矩阵 A 是 $n \times m$ 矩阵, 因此结构矩阵 A 应该是列满秩矩阵即 $\text{rank}(A) = m$, 同时也等于未知量个数, 但 $\text{rank}(A)$ 不一定等于 $\text{rank}(A, -G)$ 。根据线性代数和矩阵相关知识, 线性方程组(11)有 2 种情况: 相容或不相容。如果方程组(11)不相容, 这样不能求出 T_m 一般意义下的解。但对于系数矩阵列满秩的线性方程组有唯一的最小二乘解, 可以得到唯一的近似解。如果方程组(11)相容, 则一般意义下的解与最小二乘解一致。因此, 总的来说对于方程组(11)不管相容或不相容, 都可以求出其最小

二乘解。由于未知量只有 T_m , 其作为最后判断是否静平衡的指标, 通过最小二乘法求出绳拉力 T_m 之后, 判断其是否满足式(10)。

3 工作空间的求解

下面将分别利用法方程和 QR 分解法对式(11)进行变形, 分别给出绳拉力的表达式, 用于仿真中验证是否有唯一的最小二乘解。

(1) 法方程:

将 $\tilde{T}_{m \times 1}$ 作为式(11)的最小二乘解, 则式(11)的法方程如下:

$$A^T(A\tilde{T}_{m \times 1} + G) = 0 \quad (13)$$

$$\text{则 } \tilde{T}_{m \times 1} = (A^T A)^{-1}[A^T(-G)] \quad (14)$$

(2) QR 分解法:

结构矩阵 A 为列满秩矩阵, 则必存在 n 阶正交矩阵 Q 和 m 阶非奇异上三角矩阵 R , 使得矩阵 A 完全 QR 分解:

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\text{令 } d = Q^T(-G) = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T \quad (16)$$

$$\tilde{d} = (d_1, d_2, \dots, d_m)^T \quad (17)$$

$$\bar{d} = (d_{m+1}, d_{m+2}, \dots, d_n)^T \quad (18)$$

最小二乘解 $\tilde{T}_{m \times 1}$ 满足方程:

$$R\tilde{T}_{m \times 1} = \tilde{d} \quad (19)$$

$$\text{其中: } \tilde{T}_{m \times 1} = R^{-1}\tilde{d} \quad (20)$$

绳拉力的表达式已由最小二乘法表示出来, 静平衡空间仿真步骤如下:

(1) 先确定每个机器人的空间范围即 P_m 点的范围。

(2) 通过机器人的空间范围确定重物的位置 r 范围和重物的姿态范围。

(3) 利用蒙特·卡罗方法随机循环 N 次, 每次循环随机产生每个机器人位置 P_m 和重物位姿。

(4) 在每次循环周期内, 计算出每根绳长, 继而算出结构矩阵 A , 判断 A 是否发生降秩。如果发生降秩, 本循环停止, 进入下一循环。如果不发生降秩, 则利用上述的 2 种最小二乘法, 分别计算 $\tilde{T}_{m \times 1}$ 。

(5) 每次循环周期内, 判断每根绳的张力大小 \tilde{T}_m 是否都在 $(0, T_{\max})$ 范围内, 其中 T_{\max} 为绳能承受的最大许用拉力。如果都在此范围内, 则此次循环内, 重物的质心位置属于静平衡空间的点, 记录下此时的空间坐标。如果有一根绳及以上不满足, 则应舍去, 进入下一次循环。

(6) 重复步骤(4)、(5), 直至 N 次循环完成, 最后输出静平衡空间的图形。

4 计算仿真

以 3 台 XYZ 直角坐标机器人协同吊运重物为例。XYZ 直角坐标机器人末端的工作空间范围为一长方体。设直角坐标机器人 XYZ 方向的长度分别为 0.8 m、0.5 m、0.5 m。在地面上建立全局坐标系, 每个机器人底端的高度(Z 轴方向)为 1.5 m。3 台机器人在全局坐标系中 XOY 平面摆放示意图如图 2。

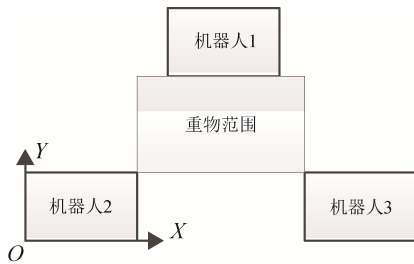


图 2 三台机器人 XOY 平面示意图

Fig. 2 Schematic diagram of 3 robots in XOY

设重物为一正三角形物体, 三角形的顶点分别为 B_1 、 B_2 、 B_3 , 也是绳索与重物的连接点, 三角形中心到各顶点的距离 $d=0.1$ m 重物的质量 $M=10$ kg, 每根绳的最大许用拉力 $T_{\max}=400$ N。每个机器人末端点 P_m 的空间范围和初设的重物质心 O' 的空间范围在全局坐标系中的表达式如下, 其中重物的姿态角范围为 $[0, 1\text{rad}]$ 。

$$\begin{cases} 1.5\text{ m} \leq P_{x1} \leq 2.5\text{ m} \\ 2.5\text{ m} \leq P_{y1} \leq 3\text{ m} \\ 1.5\text{ m} \leq P_{z1} \leq 2\text{ m} \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} 0 \leq P_{x2} \leq 1\text{ m} \\ 0 \leq P_{y2} \leq 0.5\text{ m} \\ 1.5\text{ m} \leq P_{z2} \leq 2\text{ m} \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} 3\text{ m} \leq P_{x3} \leq 4\text{ m} \\ 0 \leq P_{y3} \leq 0.5\text{ m} \\ 1.5\text{ m} \leq P_{z3} \leq 2\text{ m} \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} 1\text{ m} \leq O'_x \leq 3\text{ m} \\ 0.5\text{ m} \leq O'_y \leq 2.5\text{ m} \\ 0.3\text{ m} \leq O'_z \leq 2\text{ m} \end{cases} \quad (24)$$

按照第 3 节中的静平衡仿真步骤, 共循环 10 万次, 共得到 49 834 个满足要求的重物的位置点。由于只有唯一的最小二乘解, 因此 2 种方法得出的重物的静平衡空间是相同的。重物静平衡空间整体图如图 3 所示, 静平衡空间在 XOY 平面、YOZ 平面以及 XOZ 平面的投影图分别如图 4, 5, 6 所示。

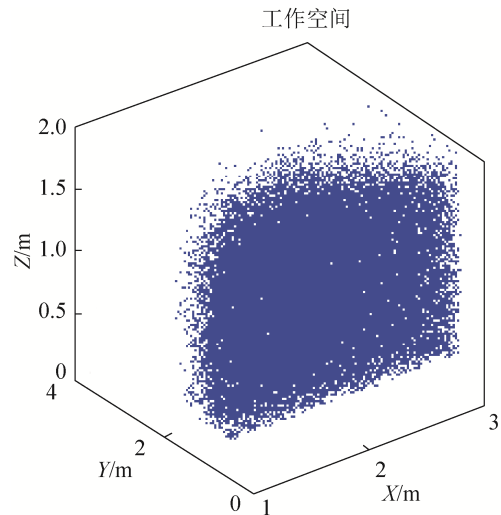


图 3 重物的静平衡空间

Fig. 3 Static balance workspace of payload

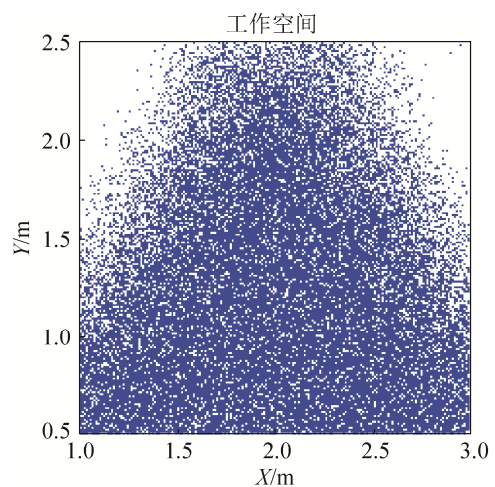


图 4 XOY 平面投影图

Fig. 4 Projection of Static balance workspace in XOY

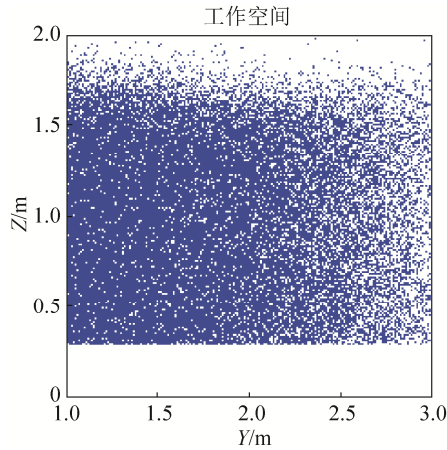


图 5 YOZ 平面投影图

Fig. 5 Projection of Static balance workspace in YOZ

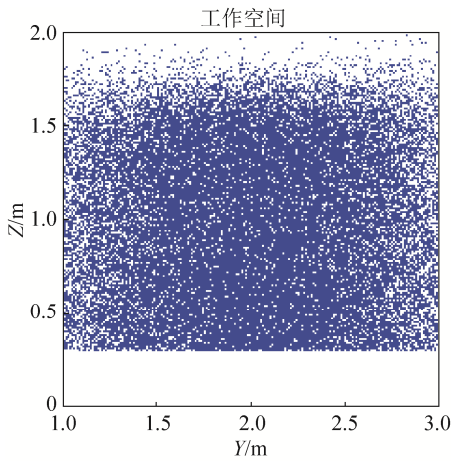


图 6 XOZ 平面投影图

Fig. 6 Projection of Static balance workspace in XOZ

由于考虑了绳长是可以变化的,同时机器人的位置也是可以变化的,因此相比固定机构,重物可达的位置会比较多,整个静平衡空间会比较密集。由于 3 台机器人摆放位置的原因,同时绳拉力范围的限制,从 XOY 平面可以看出整体呈凸型,并且朝机器人 1 方向凸,越靠近机器人 1 越稀疏,同时顶端也比较稀疏。

由于上面的仿真考虑的是机器人位置和绳长同时变化的情况,相比文献[1-8]中的固定机构,重物的工作空间会大些。为验证这个结论,考虑上面 3 个机器人的位置不变,仅变化绳长,看重物的工作空间是否被包含于上面的工作空间。

设 3 个机器人的末端点 P_m 的位置不动,为使工作空间尽量大,分别为图 7 中三角形的顶点,坐

标分别为: $P_1(2,3,2)$, $P_2(0,0,2)$, $P_3(4,0,2)$ 。初设的重物质心 O 的空间范围不变,见式(23)。

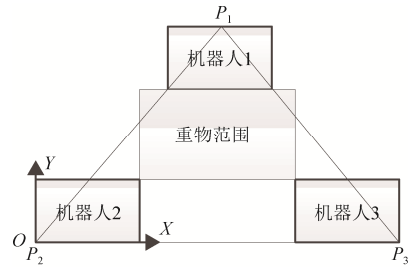


图 7 机器人末端点 XOY 平面示意图

Fig. 7 End effector schematic diagram of 3 robots in XOY

按照第 3 节中的静平衡仿真步骤,共循环 10 万次,共得到 73 029 个满足要求的重物的位置点。重物静平衡空间整体图如图 8 所示,静平衡空间在 XOY 平面的投影图分别如图 9 所示。

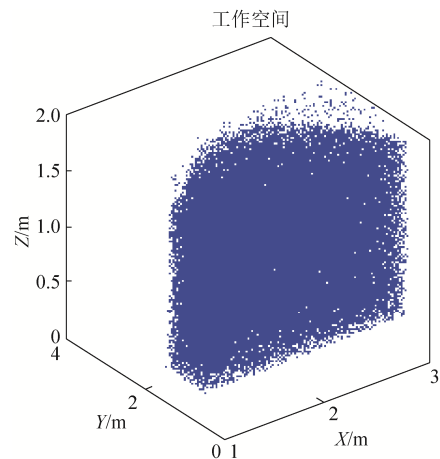


图 8 重物的静平衡空间

Fig. 8 Static balance workspace of payload

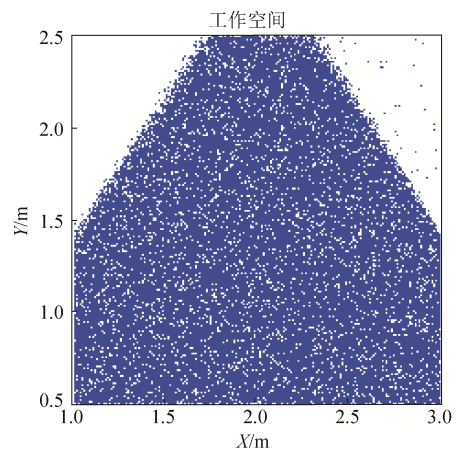


图 9 XOY 平面投影图

Fig. 9 Projection of Static balance workspace in XOY

对比图 3 和图 8, 两静平衡空间相似。因此主要对比 XOY 平面的投影图来判断 2 个仿真的空间大小。因为第 2 个仿真中机器人的位置定在了最高点, 而第 1 个仿真中机器人的高度是发生变化的, 不可能一直在最高点, 加上重物的位置也是随机产生的, 必定一些时刻重物的位置会高于机器人的位置, 这种情况是不满足要求的, 因此在 Z 轴方向不具有可比性, 这也是造成第 2 个仿真中相同循环次数满足要求的点多的原因。对比图 4 和图 9 可知, 前者的面积略大于后者, 但后者密集些, 是因为满足要求的点多些。

总的来说, 仿真 1 空间范围包括仿真 2, 只是因为相同循环次数下仿真 2 满足要求的点多些, 造成仿真 2 看起来密集些。如果循环次数无限大, 仿真 1 必定空间范围大于仿真 2, 且更密集。

5 结论

本文通过建立了 m 台机器人协同吊运一个 n 个自由度的静平衡方程。对其分析, 得到以下结论:

(1) 当 $m < n$ 时即欠约束时, 方程个数多于未知量个数, 一般情况下方程组属于不相容的, 因此很难得到一般意义下的解。

(2) 本文提出了利用最小二乘法原理能够近似计算出重物满足绳索拉力要求的静平衡空间, 由于绳的拉力表达式直接通过最小二乘法表示出来, 不需要解方程组, 因此计算效率较高。

(3) 在机器人的位置和重物的位姿不发生力旋量失效的情况下, 有唯一的最小二乘解。

(4) 通过 2 组仿真的对比, 验证了考虑机器人位置和绳长同时变化的情况所得空间大于机器人固定时的空间。

参考文献:

[1] Albus J, Bostelman R, Dagalakakis N. The NIST robocrane [J]. *Journal of Robotic Systems* (S0741-2223), 1993, 10(5): 709-724.

[2] Ming A, Higuchi T. Study on multiple degree of freedom positioning mechanisms using wires (Part 1): Concept, design and control [J]. *International Journal of the Japan*

Society for Precision Engineering (S0916-782X), 1994, 28(2): 131-138.

[3] 郑亚青, 刘雄伟. 六自由度绳牵引并联机构的可达工作空间分析 [J]. *华侨大学学报: 自然科学版*, 2002, 23(4): 393-398. (Zheng Yaqing, Liu Xiongwei. Controllable workspace analysis of a six-DOF wire-driven parallel manipulator [J]. *Journal of Huaqiao University (Natural Science)*, 2002, 23(4): 393-398.)

[4] 刘欣, 仇原鹰, 盛英. 绳牵引并联机器人工作空间的存在条件证明及一致求解策略 [J]. *机械工程学报*, 2010, 46(7): 27-34. (Liu Xin, Qiu Yuanying, Sheng Ying. Proofs of existence conditions for workspaces of wire-driven parallel robots and a uniform solution strategy for the workspaces [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2010, 46(7): 27-34.)

[5] 刘欣, 仇原鹰, 盛英. 绳牵引并联机器人工作空间的判定条件与解析表达 [J]. *机械工程学报*, 2011, 47(3): 28-35. (Liu Xin, Qiu Yuanying, Sheng Ying. Criteria conditions and analytic expression of workspace of wire-driven parallel manipulators [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2011, 47(3): 28-35.)

[6] 欧阳波, 尚伟伟. 6 自由度绳索驱动并联机器人力封闭工作空间的快速求解方法 [J]. *机械工程学报*, 2013, 49(15): 34-41. (Ouyang Bo, Shang Weiwei. Efficient computation method of force-closure workspace for 6-DOF cable-driven parallel manipulators [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 49(15): 34-41.)

[7] Stump E, Kumar V. Workspace delineation of cable-actuated parallel manipulators [C]// *ASME 2004 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. USA: American Society of Mechanical Engineers, 2004: 1303-1310.

[8] Stump E, Kumar V. Workspaces of cable-actuated parallel manipulators [J]. *Journal of Mechanical Design* (S1050-0472), 2006, 128(1): 159-167.

[9] 郑亚青, 刘雄伟, 林麒. 绳牵引并联机构奇异性分析及无奇异机构设计 [J]. *机械工程学报*, 2006, 42(2): 57-62. (Zheng Yaqing, Liu Xiongwei, Lin Qi. Singularity analysis of wire-driven parallel manipulators and design of singularity-free manipulators [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(2): 57-62.)

[10] 李继根, 张新发. 矩阵分析与计算 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2013. (Li Jigen, Zhang Xinfa. *The matrix analysis and calculation* [M]. Wuhan, China: Wuhan University Press, 2013.)