

6-2-2020

## Real-time Simulation of Realistic Melting in Fluid-solid Interaction

Xuqiang Shao

*School of Control and Computer Engineering, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;*

Song Yu

*School of Control and Computer Engineering, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

## Real-time Simulation of Realistic Melting in Fluid-solid Interaction

### Abstract

**Abstract:** In order to realize real-time simulation of realistic melting in fluid-solid coupling, a particle-based GPU parallel simulation method was proposed. *This method employed an implicit heat diffusion model which took the heat conduction properties of materials to update the temperatures of each particle. Based on the lattice shape matching method, a stable topology change method was proposed to simulate the conversion of solid particles to the fluid particles. In order to improve the time performance of each time step, a parallel simulation method entirely implemented on GPU was put forward, and an iterative filling algorithm was designed to dynamically update each region according to the phase transition of solid particles.* The results show that the method can achieve the real-time simulation of realistic melting in fluid-solid coupling for medium complex scenes.

### Keywords

particle system, melting, realistic simulation, real-time simulation, GPU

### Recommended Citation

Shao Xuqiang, Song Yu. Real-time Simulation of Realistic Melting in Fluid-solid Interaction[J]. Journal of System Simulation, 2017, 29(3): 502-508.

## 固流交互中真实感溶化现象的实时模拟

邵绪强, 宋雨

(华北电力大学控制与计算机工程学院, 河北 保定 071003)

**摘要:** 为实现固流交互中真实感溶化现象的实时模拟, 提出了基于粒子的 GPU(Graphics Processing Unit)并行溶化模拟算法。利用考虑材料热传导属性的隐式热传递计算模型更新粒子温度; 然后基于格子形状算法给出物体的稳定性拓扑改变方法模拟固体粒子向流体粒子的转化。为加速每个时间步内计算以达到实时性能, 给出了 GPU 并行计算方案, 并采用并行迭代填充算法来动态更新固体粒子的邻居信息。实验结果表明, 所给算法在中等粒子规模下实现了真实感溶化现象的实时模拟。

**关键词:** 粒子系统; 溶化; 真实感模拟; 实时模拟; GPU

中图分类号: TP391.9 文献标识码: A 文章编号: 1004-731X(2017) 03-0502-07

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.201703005

## Real-time Simulation of Realistic Melting in Fluid-solid Interaction

Shao Xuqiang, Song Yu

(School of Control and Computer Engineering, North China Electric Power University, Baoding 071003, China)

**Abstract:** In order to realize real-time simulation of realistic melting in fluid-solid coupling, a particle-based GPU parallel simulation method was proposed. This method employed an implicit heat diffusion model which took the heat conduction properties of materials to update the temperatures of each particle. Based on the lattice shape matching method, a stable topology change method was proposed to simulate the conversion of solid particles to the fluid particles. In order to improve the time performance of each time step, a parallel simulation method entirely implemented on GPU was put forward, and an iterative filling algorithm was designed to dynamically update each region according to the phase transition of solid particles. The results show that the method can achieve the real-time simulation of realistic melting in fluid-solid coupling for medium complex scenes.

**Keywords:** particle system; melting; realistic simulation; real-time simulation; GPU

## 引言

计算机图形学中基于物理的流体模拟技术<sup>[1]</sup>对烟雾、火焰、水流等各种复杂流体现象的真实感模拟已经被广泛的应用于电影特效、电子游戏以及视景仿真等领域。流体固有的流动特性使其

时刻与周围的固体发生相互作用, 因此真实感固流交互模拟是流体仿真的重要研究内容, 而溶化现象的模拟对于增强固流交互模拟的真实感至关重要。

目前对于溶化现象的模拟已经展开了许多研究工作, 但实现固流交互中真实感溶化现象的实时模拟仍是一个难题。溶化现象的模拟方法通常分为两类: 基于网格的欧拉方法<sup>[2-4]</sup>和基于粒子的拉格朗日方法<sup>[5-8]</sup>。基于网格的欧拉方法把模拟空间剖分成网格并计算每个网格单元的物理属性,



收稿日期: 2015-06-01 修回日期: 2015-11-06;  
基金项目: 国家自然科学基金(61502168);  
作者简介: 邵绪强(1982-), 男, 山东泰安, 博士, 讲师, 研究方向为计算机图形学和虚拟现实; 宋雨(1958-), 男, 河北张家口, 硕士, 教授, 研究方向为软件工程和软件构件/构架技术。

<http://www.china-simulation.com>

该方法虽然可以真实地模拟固流和流体的运动, 但不能很好的跟踪溶化过程中由于拓扑改变产生的复杂表面, 并且存在的数值耗散导致不能保持溶化过程中的体积守恒而影响真实感; 而基于粒子的拉格朗日方法把物体空间剖分成许多携带物质并随物体运动的粒子, 自动满足质量守恒, 并且方便跟踪溶化过程中复杂的材质表面和捕获细节特征。

因此, 为了实现固流交互中真实感溶化现象的实时模拟, 提出了基于统一粒子框架的 GPU 并行溶化模拟算法: 首先利用一种考虑材料热传导属性的隐式热传递计算模型更新粒子的温度; 然后给出物体的稳定性拓扑改变方法模拟固体粒子向流体粒子的转化。为了加速每个时间步长内的复杂物理计算以达到实时性能, 给出了完全在 GPU 上执行的并行计算方法。

## 1 基于粒子的固流交互模拟

模拟框架采用拉格朗日粒子方法模拟不可压缩流体、可变形固体以及它们之间的双向交互。其中, 采用文献[9]中的 WSPH 方法(Weakly Compressible SPH)模拟不可压缩流体的运动; 固相物体的运动采用稳定的格子形状匹配算法 LSM<sup>[10]</sup>(Lattice Shape Matching)进行模拟。而对于双向固流交互, 则采用改进的文献[11-12]中方法进行模拟:

首先, 在计算流体粒子的密度时, 考虑相邻固体格子顶点对其的相对贡献, 因此任一流体粒子  $i$  的密度为:

$$\rho_i = m_i \sum_j W(x_{ij}, h) + m_i \sum_k \phi(x_k) W(x_{ik}, h) \quad (1)$$

其中:  $m$  为质量;  $x$  为粒子位置;  $W$  为核函数;  $h$  为核函数紧支域半径;  $\phi(x_k) = V_k^t / V_{\min}^0$  为相对贡献函数;  $V_{\min}^0$  为初始时刻流体体积的最小值;  $V_k^t$  是第  $k$  个邻居边界粒子的当前体积。

然后, 对于一对相邻的流体粒子  $i$  和固体粒子  $j$ ,  $j$  对  $i$  的作用力  $F_{i \leftarrow j}^c$  包括压力  $F_{i \leftarrow j}^p$  和粘滞力

$F_{i \leftarrow j}^v$ , 计算公式如下:

$$F_{i \leftarrow j}^p = -m_i \phi(x_j) \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} \right) W(x_{ij}, h) \quad (2)$$

$$F_{i \leftarrow j}^v = \mu m_i \phi(x_j) \frac{v_{ji}}{\rho_j} \nabla^2 W(x_{ij}, h) \quad (3)$$

其中:  $P$  为压强;  $\rho$  为密度;  $v$  为速度;  $\mu$  为粘性系数。

根据牛顿第三定律, 流体粒子  $i$  对固体粒子  $j$  的作用力为  $F_{j \leftarrow i}^c = -F_{i \leftarrow j}^c$ 。

## 2 真实感溶化现象模拟

为了稳定地改变物体的拓扑结构以模拟固流交互中的溶化, 给出一种基于 LSM 的粒子模型来模拟固体由于溶化产生的拓扑改变, 如图 1 所示。

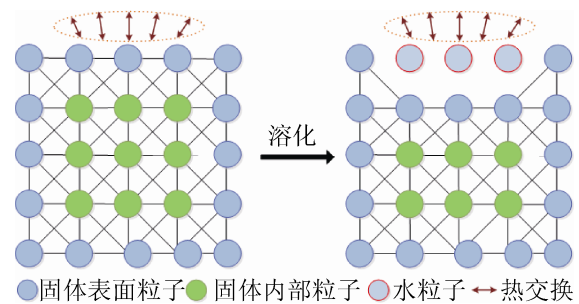


图 1 固体溶化模拟算法

Fig. 1 The melting simulation algorithm of solid objects

在图 1 中, 能够共享一个格子的顶点之间称为直接邻居, 它们之间用直线相连。在预处理阶段, 对于每个格子顶点  $i$ , 我们为其建立一个直接邻居列表。如果一个格子顶点拥有包括自己在内的最多 27 个直接邻居, 那么该格子顶点标记为固体内部边界粒子 IBP (Internal Boundary Particle); 如果直接邻居粒子数少于 27, 该格子顶点标记为固体表面边界粒子 SBP (Surface Boundary Particle)。此外, 在溶化模拟过程中, 为每个格子顶点建立一个区域。对于一个半宽度为  $w$  的区域  $R_i$ , 它包含了与格子顶点  $i$  相距  $w$  的所有格子顶点。在每个时间步中, 溶化过程包括两个计算过程: 热传递和拓扑改变。

为了模拟大时间步长下粒子之间的热传递,

采用了一种稳定的隐式热传递模型。在预处理阶段，每一个粒子被分配一个温度值  $T_i$ ，并在模拟过程中计算每个粒子与周围邻居粒子的热量交换。文献[8]中的显式热传递模型在大时间步长下会变得不够稳定，我们基于文献[13]中的隐式热传递计算方法，并加入了材料属性对热传递的影响，提出了一种稳定的隐式热传递模型：对于任一粒子  $i$ ，通过以下公式更新其在下一时刻的温度  $T_i(t + \Delta t)$ ：

$$T_i \leftarrow T_i(t) + \frac{(K_i + K_j)\Delta t m_j \nabla^2 W_{ij} T_{ji}(t)}{\rho_j + (K_i + K_j)\Delta t \rho_j \left(\frac{m_i}{\rho_i} + \frac{m_j}{\rho_j}\right) \nabla^2 W_{ij}} \quad (4)$$

其中： $K$ 为固体材料的热传递系数； $\Delta t$ 为时间步长大小。公式(4)需要进行迭代求解，并且求解结果依赖于邻居粒子的搜索顺序。为了达到较快的收敛速度，本方法进行两次迭代，并在第二次迭代过程中对邻居粒子进行逆序搜索。

为了实现稳定的溶化现象模拟，采用文献[14]中固体模型的稳定拓扑改变方法来模拟固体溶化。在溶化模拟中，每个固体粒子存储一个和材料相关的熔点  $T_{melt}$ 。随着不断地热传递，固体粒子的温度不断升高。当一个 SBP 粒子的温度到达熔点的时候，它转变为流体粒子并从所属固体脱离。为了模拟物体的这一行为，对任意固体粒子  $i$ ，根据粒子状态动态更新其直接邻居粒子列表：如果该粒子为 SBP 粒子并发生溶化转化成了流体粒子，那么将其直接邻居粒子列表清空，并且利用 WSPH 模型计算它的运动；如果该粒子为 IBP 粒子，我们将在其直接邻居列表中清除那些转变为流体粒子的直接邻居，并且重建该粒子的区域。在直接邻居列表更新后，如果一个 IBP 的直接邻居粒子数目少于 27 个，那么它将变为 SBP 粒子并用于计算和流体的相互作用力。与文献[8]溶化方法中的固体拓扑更新方式不同，本方法能保证固体粒子从外到内依次进行状态改变，实现了溶化现象的真实感模拟。

### 3 GPU 并行加速算法

给出的 GPU 并行加速算法包括：GPU 端数据存储和每个时间步内的并行计算两部分内容。

#### 3.1 GPU 端数据存储

为了充分利用 GPU 强大的并行计算能力，对计算中需要访问的数据进行 GPU 设备端的优化存储：对于在计算中不变的只读数据，例如粒子的初始位置、初始邻居粒子列表等作为纹理数据存储在全局内存上；而对于计算中每个时间步里都要更新的读写数据，例如密度、压强、位置、速度、作用力、目标位置、形状匹配算法的区域、固体粒子的直接邻居粒子链表、最优变换等信息存储在显存的全局内存上。

如图 2 所示，在预处理阶段，在统一的空间内体素化所有固体并进行规则粒子采样，并为每一个固体粒子分配一个唯一的全局索引，该采样方案方便在模拟过程中计算每个粒子的直接邻居索引<sup>[14]</sup>。此外，为每个固体粒子在全局内存中分配一个大小为 27 的无符号整形数组 `arrayN` 来存储其直接邻居粒子的索引。而对每一个区域，为其分配一个大小为  $(2w+1)^3$  的无符号整形数组 `arrayR` 来存储所包含的固体粒子的索引。在溶化模拟过程中，需要为每一个固体粒子都要建立一个区域。

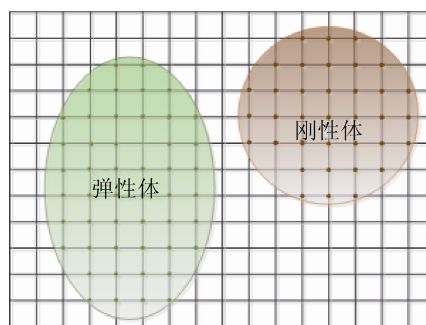


图 2 固体在统一空间中的体素化  
Fig. 2 Voxelizing all objects in the global space

#### 3.2 GPU 并行计算

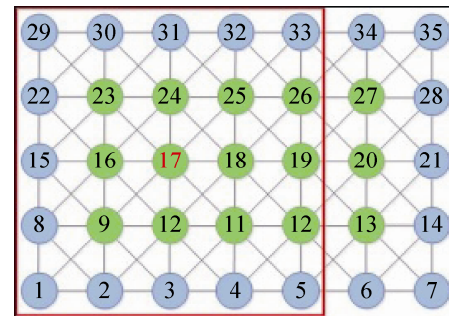
为了提高溶化模拟每个时间步的计算效率，

给出了每个时间步完全在 GPU 上执行的并行计算算法, 伪代码如下所示:

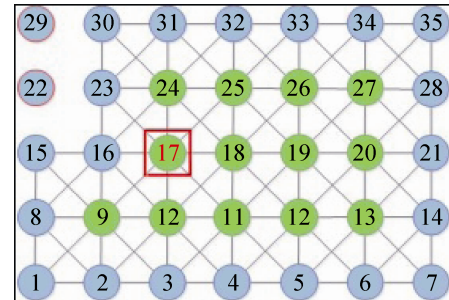
01. 对于模拟过程中的任一粒子  $i$
02. 构建 KD-Tree 并计算邻居粒子集合;
03. 对于任一流体粒子  $j$
04. 计算密度  $\rho_j$  和压强  $p_j$ ;
05. 计算压力  $F_j^p$  和粘性力  $F_j^v$ ;
06. 对于任一流体粒子  $j$
07. 计算  $-F_j^c$  并将其分配到相邻固体边界粒子上;
08. 对于任一固体粒子  $k$
09. 搜索直接邻居粒子并改变其状态;
10. 重新构建对应的区域;
11. 利用形状匹配方法计算目标位置;
12. 对于模拟过程中的任一粒子  $i$
13. 利用隐式温度模型计算当前温度;
14. 利用 Leap-frog 方法更新位置和速度;
15. 表面重建和绘制;

首先利用 CUDA 在 GPU 上并行执行 WCSPH 算法来计算流体的运动以及流体和固体之间的交互力。在 WCSPH 算法的计算过程中, 搜索每个粒子的邻居粒子是必须的也是最耗时的操作。本方法启动一系列内核函数在 GPU 上对所有粒子建立一个 KD-Tree<sup>[15]</sup>, 然后进行并行遍历以快速搜索每个粒子的邻居粒子。对于 WCSPH 流体模拟算法的并行执行, 首先启动一个内核函数来计算每个流体粒子的密度和压强; 然后对所有的流体粒子再启动一个内核函数计算其受到的压力、粘滞力和重力, 并根据牛顿第三定律把反作用力施加到其相邻的固体粒子上。

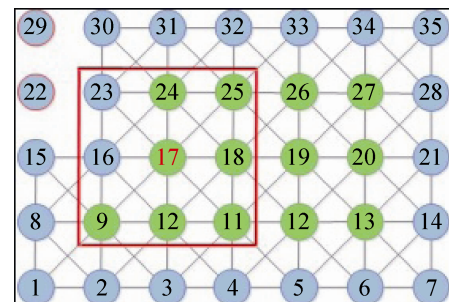
固流交互中溶化的模拟需要动态更新每个固体粒子的直接邻居信息, 进而对区域进行重建, 该过程因计算复杂而影响了性能。为了在 GPU 上并行模拟溶化过程中固体的拓扑改变, 本文采用一种并行迭代填充算法<sup>[14]</sup>来动态更新每个粒子的 arrayR 数组以重建其区域, 原理如图 3 所示。



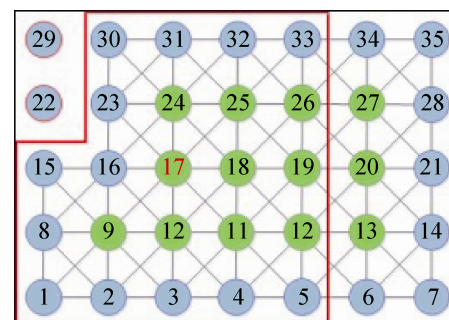
(a) 溶化前 17 号粒子的 arrayR 数组



(b) arrayR 数组的第 1 次填充



(c) arrayR 数组的第 2 次填充



(d) arrayR 数组的第 3 次填充

图 3 固体粒子区域的迭代式填充算法

Fig. 3 The iterative filling algorithm of rebuilding regions of solid particles

首先根据初始固体粒子的当前状态, 为所有的固体粒子启动一个核函数来更新它们的直接邻居粒子数组 arrayN。如果对一个固体粒子来说, 它的某一个直接邻居粒子转变成了流体粒子, 那

么我们就在其直接邻居数组  $arrayN$  中把对应的元素设置为 0。然后为所有的区域启动一个核函数来寻找属于它们的固体粒子，并填充其索引数组  $arrayR$ 。在核函数中，对于半宽度为  $w$  的区域来说，需要  $w+1$  次迭代来填充其数组  $arrayR$ 。在每一次迭代中，查找已经存在于  $arrayR$  的固体粒子的直接邻居粒子，如果该邻居粒子状态为固体粒子，那么  $arrayR$  对应的位置赋值为其全局索引值。例如，如图 3 所示，我们要更新索引为 17 的粒子对应的半宽度  $w$  为 2 的区域(图 3(a))，总共需要 3 次迭代。在第一次迭代中，把该粒子本身的索引 17 写入  $arrayR$  的对应位置(图 3(b))；在第二次迭代中，搜索索引为 17 的固体粒子的直接邻居数组  $arrayN$ ，把状态为固体的粒子索引写入到  $arrayR$  的对应位置(图 3(c))；在第三次迭代中，如图 3(d)所示，重复上述操作，最终为索引为 17 的粒子找到了其区域包含的所有固体粒子。当所有的区域被更新之后，利用形状匹配算法为每一个区域计算最优的平移向量和旋转矩阵。与文献[10]串行快速求和算法不同，本方法利用并行规约算法来对每个区域内的物理信息进行并行求和。

当粒子的受力和目标位置计算完毕之后，对于所有的粒子，启动一个内核函数，利用隐式热交换模型计算每个粒子的温度，并根据 Leap-frog 积分方法来更新它们的位置和速度。

为了跟踪流体表面并绘制流体，在 GPU 上动态确定流体表面的粒子，并在流体表面周围建立一个规则距离场来定义流体的隐式表面<sup>[16]</sup>，然后利用 NVIDIA 提供的 CUDA 开发包中的“Marching Cubes Isosurfaces”提供的算法提取出流体的三角网格流体表面。

## 4 实验结果与分析

实验硬件配置为：Intel Xeon E5630 CPU、6GB RAM 和 NVIDIA Geforce GTX 690 GPU；软件编程环境为：Windows 7, Visual studio 2008, OpenGL 2.0 和 CUDA 4.2。最后对输出三角形网格表面利用开

源光线跟踪绘制引擎 POV-Ray 3.6 进行真实感绘制。实验过程中各种物理量以及取值如表 1 所示。

表 1 固流交互模拟物理参数及取值  
Tab. 1 Parameter values of solid-fluid coupling in the experiments

物理量	值	x 单位
时间步长	0.005	s
初始间距	0.2	m
光滑半径	0.5	m
粒子密度	100~10 000	kg/m <sup>3</sup>
粘性系数	0.2	1
热传导系数	0.1~0.8	1
粒子温度	-10.0~100.0	°C

图 4 给出了热传导系数  $K=30$ ，初始温度为  $-10.0$  的冰块掉入温度为  $40.0$  的水中的溶化模拟效果。上图给出了真实感绘制效果，下图给出了粒子的温度分布：粒子颜色从红到黄到蓝变化表示温度从高到低变化。

图 5 给出了具有相同热传导系数( $K=50$ )的 4 个不同密度固体(红色： $\rho_0=10\ 000$ ；绿色： $\rho_0=200$ ；蓝色： $\rho_0=300$ ；黄色： $\rho_0=8\ 000$ )掉入水中并逐渐溶化的真实感模拟效果。水体的初始温度为  $80.0$ ，固体初始温度为  $-20.0$ ，熔点为  $0.0$ 。

图 6 给出了不同热传导系数的 4 个不同密度固体(红色兔子： $\rho_0=9\ 000$ ， $K=50$ ；绿色兔子： $\rho_0=250$ ， $K=70$ ；蓝色鸭子： $\rho_0=280$ ， $K=10$ ；黄色鸭子： $\rho_0=8\ 500$ ， $K=30$ )在两股水流冲击下的溶化模拟效果。水流的初始温度为  $100.0$ ，固体模型的初始温度为  $-10.0$ ，熔点为  $0.0$ 。

表 2 给出了不同粒子数下溶化模拟的每个时间步长的平均计算时间。从表中时间统计数据可以看出，在 60 k 粒子规模下达到了实时的模拟速度，并且固体粒子数所占比例越高，模拟速度越慢，这表明固体的溶化模拟由于需要动态改变物体的拓扑结构而计算比较耗时。

图 7 给出了本文方法与文献[8]中最新的基于粒子的溶化模拟方法的性能对比，从统计数据可以看出，本文方法的计算效率有了显著提高。另

外, 由于采用了基于 LSM 的拓扑更新方法, 本文方法可以更稳定地模拟固体的溶化。

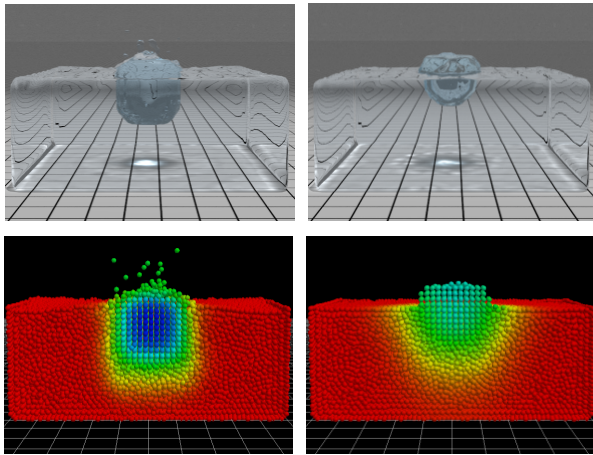


图 4 冰块落入热水中的溶化效果模拟

Fig. 4 The melting of an ice cube dropped into hot water

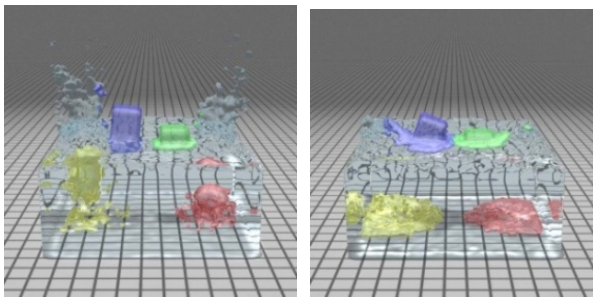


图 5 相同热传导系数的溶化效果模拟

Fig. 5 The melting results of solid objects with the same heat conductivity coefficients

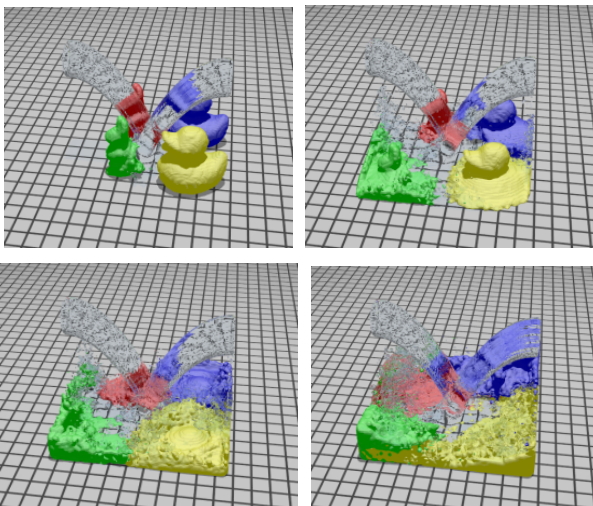


图 6 不同热传导系数的溶化效果模拟

Fig. 6 The melting results of solid objects with the different heat conductivity coefficients

表 2 溶化模拟平均计算时间

Tab. 2 The average timing cost of melting simulation

场景	流体粒子数/k	固体粒子数/k	计算时间/ms
图 5	35	5	22.5
图 6	48.5	12	35.7
图 7	40.5	20	42.3

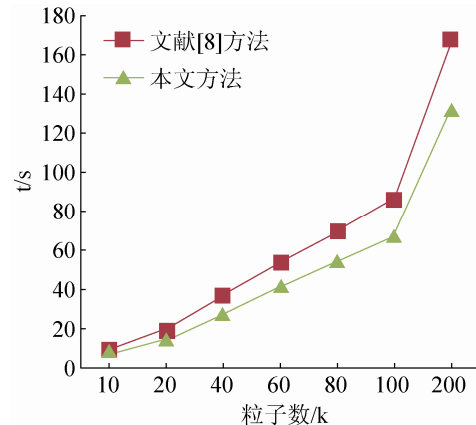


图 7 与文献[8]溶化模拟方法的性能对比

Fig. 7 The performance comparison with the melting method of [8]

实验结果表明, 论文给出的方法可以稳定真实地模拟固流交互中的溶化现象, 通过 GPU 并行计算, 在中等粒子规模下达到了实时的模拟速度。

对于固体溶化后的流体间交互, 我们利用基于 Tait 方程的统一 SPH 方法<sup>[7]</sup>模拟不相溶流体来实现, 在模拟冰的溶化时, 只需把溶化的冰粒子转化为水粒子, 但不能保证质量守恒。文献[17-18]中方法通过计算不同液体之间的扩散过程, 分别提出了 LLSPH (Liquid-Liquid Smoothed Particle Method) 和 TFLBM (Two-Fluid Lattice Boltzmann Method)方法来逼真模拟不相溶流体。我们在以后的工作中将基于文献[17-18]中的不相溶流体方法, 从而实现糖块和咖啡在水中溶解等溶化现象的真实感模拟。

## 5 结论

提出一种基于粒子的 GPU 并行溶化模拟算法, 实现了固流交互中真实感溶化现象的实时模拟。该方法利用考虑材料热传导属性的隐式热传递计算模型更新粒子温度, 并给出了基于粒子的稳定



性拓扑改变方法模拟固体粒子向流体粒子的状态转化;采用并行迭代填充算法来动态更新固体粒子的邻居信息,设计了完全在 GPU 上执行的并行计算方法,在中等粒子规模下达到了实时模拟性能。

### 参考文献:

- [1] 柳有权, 刘学慧, 朱红斌, 等. 基于物理的流体模拟动画综述 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(12): 2581-2589. (Liu Y Q, Liu X H, Zhu H B, et al. Physically based fluid simulation in computer animation [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005, 17(12): 2581-2589.
- [2] Matsumura M, Tsuruno R. Visual simulation of melting ice considering the natural convection [C]// Proceedings of ACM SIGGRAPH. USA: ACM, 2005.
- [3] Losasso F, Irving G, Guendelman F, et al. Melting and burning solids into liquids and gases [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (S1077-2626), 2006, 12(3): 343-352.
- [4] Fujisawa M, Miura K T. Animation of ice melting phenomenon based on thermodynamics with thermal radiation [C]// Proceedings of the 5th International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques in Australasia and Southeast Asia, Perth, Australia: The ACM Digital Library, 2007: 249-256.
- [5] Müller M, Keiser R, Nealen A, et al. Point based animation of elastic, plastic and melting objects [C]// Proceedings of ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. USA: ACM, 2004: 141-151.
- [6] Keiser R, Adams B, Gasser D, et al. A unified lagrangian approach to solid-fluid animation [C]// Proceedings of Eurographics/IEEE VGTC Symposium on Point-Based Graphics. Stony Brook, NY, USA: IEEE Society, 2005: 125-133.
- [7] Solenthaler B, Schläfli J, Pajarola R. A unified particle model for fluid-solid interactions [J]. Computer Animation and Virtual Worlds (S1546-427X), 2007, 18(1): 69-82.
- [8] Iwasaki K, Uchida H, Dobashi Y, et al. Fast particle-based visual simulation of ice melting [J]. Computer Graphics Forum (S1467-8659), 2010, 29(7): 2215-2223.
- [9] Goswami P, Batty C. Regional time stepping for SPH [C]// Proceedings of Eurographics 2014. Strasbourg, France: Eurographics Association, 2014: 45-48.
- [10] Rivers A R, James D L. FastLSM: fast lattice shape matching for robust real-time deformation [C]// Proceedings of ACM SIGGRAPH. USA: ACM, 2007: 109-116.
- [11] Akinci N, Ihmsen M, Akinci G, et al. Versatile rigid-fluid coupling for incompressible SPH [J]. ACM Transactions on Graphics (S0730-0301), 2012, 31(4): 1-8.
- [12] Akinci N, Cornelis J, Akinci G, et al. Coupling Elastic Solids with SPH Fluids [J]. Computer Animation and Virtual Worlds (S1546-427X), 2013, 24(3/4): 195-203.
- [13] Dagenais F, Gagnon J, Paquette E. A prediction-correction approach for stable sph fluid simulation from liquid to rigid [C]// Proceedings of Computer Graphics International. Bournemouth, UK: CGS, 2012: 15.
- [14] Shao X Q, Zhou Z, Magnenat-Thalmann N, et al. Stable and fast fluid-solid coupling for incompressible SPH [J]. Computer Graphics Forum (S1467-8659), 2015, 34(1): 191-204.
- [15] Zhou K, Hou Q M, Wang R, et al. Real-time KD-tree construction on graphics hardware [J]. ACM Transactions on Graphics (S0730-0301), 2008, 27(5): 126-131.
- [16] Akinci G, Ihmsen M, Akinci N, et al. Parallel surface reconstruction particle-based fluids [J]. Computer Graphics Forum (S1467-8659), 2012, 31(6): 1797-1809.
- [17] Liu S G, Liu Q G, Peng Q S. Realistic Simulation of Mixing Fluids [J]. The Visual Computer (S0178-2789), 2011, 27(3): 241-248.
- [18] Zhu H B, Liu X H, Liu Y Q, et al. Simulation of Miscible Binary Mixtures Based on Lattice Boltzmann Method [J]. Journal of Visualization and Computer Animation (S1546-427X), 2006, 17(3/4): 403-410.

(上接第 501 页)

无人机离开俯仰角度扩展很小,其到达俯仰角也很小,则有  $\cos \varphi_{g,i,l} \approx 1$ ; 由于采用 Matlab 三重积分函数对式(A3)数值计算时间较长,而  $R \in [b_1 \ a_2]$  均匀分布,则  $\bar{R} = (a_2 + b_1)/2 \square D$ , 因此取  $R$  的均值计算遍历的散射信道系数; 根据贝塞尔函数

$$I_0(\sqrt{X^2 + Y^2}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{Y \sin \theta_{g,i,l} + X \cos \theta_{g,i,l}} d\theta_{g,i,l},$$

$$\text{且令 } P(m,n) = \int_{-\varphi_{g,i,l}^{\min}}^{\varphi_{g,i,l}^{\max}} e^{jk_0 \delta_g \sin \varphi_{g,i,l} \sin \gamma_g} f(\varphi_{g,i,l}) d\varphi_{g,i,l}, \text{ 则有式}$$

(15)、(16)。