

8-13-2020

Quadratic Rational Trigonometric Spline Curves with Shape Controlling

Xinru Liu

1. School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China;;2. Institute of Engineering Modeling and Scientific Computing, Central South University, Changsha 410083, China;

Manman Wei

1. School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China;;

Shengjun Liu

1. School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China;;2. Institute of Engineering Modeling and Scientific Computing, Central South University, Changsha 410083, China;

Dangfu Yang

1. School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China;;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research](#), [Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Quadratic Rational Trigonometric Spline Curves with Shape Controlling

Abstract

Abstract: A new quadratic rational trigonometric spline curve with a shape parameter was proposed. The value control and *the inflection-point control* of the interpolation scheme were discussed in theory. And *the optimal methods for calculating the desired inflection-points* was proposed, by using optimization theory. Numerical experiments show the interpolation spline and the optimization method can be used in modeling design.

Keywords

rational trigonometric spline, value control, inflection-point control, optimization

Recommended Citation

Liu Xinru, Wei Manman, Liu Shengjun, Yang Dangfu. Quadratic Rational Trigonometric Spline Curves with Shape Controlling[J]. Journal of System Simulation, 2016, 28(10): 2400-2406.

带形状控制的二次有理三角样条曲线

刘新儒^{1,2}, 魏曼曼¹, 刘圣军^{1,2*}, 杨当福¹

(1. 中南大学数学与统计学院, 长沙 410083; 2. 中南大学工程建模与科学计算研究所, 长沙 410083)

摘要: 利用函数值及其一阶导数来构造带形状控制的二次有理三角样条曲线. 从理论上详细讨论了该插值曲线格式的值控制及拐点控制, 并从最优化角度结合设计目标, 给出了拐点位置计算的最优化方法. 实例表明, 该曲线格式及优化方法可用于造型设计.

关键词: 有理三角样条; 值控制; 拐点控制; 最优化

中图分类号: TP391.9 文献标识码: A 文章编号: 1004-731X (2016) 10-2400-07

Quadratic Rational Trigonometric Spline Curves with Shape Controlling

Liu Xinru^{1,2}, Wei Manman¹, Liu Shengjun^{1,2*}, Yang Dangfu¹

(1. School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China;

2. Institute of Engineering Modeling and Scientific Computing, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: A new quadratic rational trigonometric spline curve with a shape parameter was proposed. The value control and the inflection-point control of the interpolation scheme were discussed in theory. And the optimal methods for calculating the desired inflection-points was proposed, by using optimization theory. Numerical experiments show the interpolation spline and the optimization method can be used in modeling design.

Keywords: rational trigonometric spline; value control; inflection-point control; optimization

引言

曲线曲面的造型设计是计算机辅助几何设计的一个关键问题. 而样条插值是解决这个问题的有力工具. 目前, 已有许多学者研究了插值曲线曲面的保形性质^[1-5]. 为了满足不断增加的模型复杂性及制造的需要, 保形控制在曲线曲面的构造中变得越来越重要^[6-8]. 近年来, 许多作者开始研究带参数的单变量有理样条插值^[9-15], 其中插值函数的参数是根据控制的需要来计算并选择的, 故可实现对形状的约束控制. 如文献[9]提出了基于最小弹性

应变能的值控制方法. 文献[10]研究了插值曲线的凸性控制, 文献[12]利用具有二次分母的函数值构造了有理样条.

与多项式基相比较, 三角函数基能表示复杂的圆锥曲线. 基于此考虑, 本文构造了一个带形状参数的二次有理三角样条插值, 并讨论了插值曲线的值控制性和拐点控制性, 最后从最优化角度给出了拐点位置优化方法.

1 代数曲线间最短距离的已有算法

给定数据 $\{(t_i, f_i, d_i), i = 0, 1, \dots, n\}$, 其中 f_i 和 d_i 分别为被插值函数 $f(t)$ 在点 t_i 的函数值及导数值, 此处分划点为 $a = <t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. 记 $h_i = t_{i+1} - t_i$, $\theta = \pi(t - t_i) / 2h_i$, 且令 $\alpha_i > 0$. 则 $[a, b]$ 上 C^1 连续的二次有理三角插值样条定义如下:



收稿日期: 2016-05-31 修回日期: 2016-07-19;
基金项目: 国家自然科学基金(61572527, 11271376),
中南大学创新驱动计划(2015CXSS037);
作者简介: 刘新儒(1982-), 男, 湖南新化, 博士,
讲师, 研究方向为几何造型、数值建模; 魏曼曼
(1991-), 女, 河南商丘, 硕士生, 研究方向为计算机辅助几何设计.

$$P(t) = \omega_0(\theta, \alpha_i) f_i + \omega_1(\theta, \alpha_i) f_{i+1} + \omega_2(\theta, \alpha_i) d_i + \omega_3(\theta, \alpha_i) d_{i+1}, \quad (1)$$

其中:

$$\begin{aligned} \omega(\theta, \alpha_i) &= \alpha_i C^2 + S^2, \\ \omega_0(\theta, \alpha_i) &= \frac{\alpha_i C^2}{\omega(\theta, \alpha_i)}, \quad \omega_2(\theta, \alpha_i) = \frac{2h_i \alpha_i S(1-S)}{\pi \omega(\theta, \alpha_i)}, \\ \omega_1(\theta, \alpha_i) &= \frac{S^2}{\omega(\theta, \alpha_i)}, \quad \omega_3(\theta, \alpha_i) = \frac{-2h_i C(1-C)}{\pi \omega(\theta, \alpha_i)}, \end{aligned}$$

且 $C = \cos\theta$, $S = \sin\theta$ 。简单验证可知曲线 $P(t)$ 满足端点插值条件 $P(t_i) = f_i$ 及 $P'(t_i) = d_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$)。

由式(1)及样条基函数表达式可知, 形状参数 α_i 的作用是对曲线段 $P(t)$ 两个端点 (t_i, f_i, d_i) 及 $(t_{i+1}, f_{i+1}, d_{i+1})$ 的非线性加权处理。 α_i 越大, 左端点 (t_i, f_i, d_i) 对曲线 $P(t)$ 的影响越大, 若 $\alpha_i \rightarrow \infty$, $P(t)$ 将近似等于 f_i (除了在右端点附近很小范围内快速达到 f_{i+1} 之外)。反之, α_i 越小, 右端点 $(t_{i+1}, f_{i+1}, d_{i+1})$ 对曲线 $P(t)$ 的影响越明显, 极端情况是 $\alpha_i \rightarrow 0$, $P(t)$ 将近似等于 f_{i+1} (除了在左端点附近很小范围内快速达到 f_i 之外)。

当 $\theta \in [0, \pi/2]$ 时, 样条函数基 $\omega_i(\theta, \alpha_i)$ 满足

$$\begin{aligned} \omega_0(\theta, \alpha_i) &\geq 0, \quad \omega_1(\theta, \alpha_i) \geq 0, \\ \omega_2(\theta, \alpha_i) &\geq 0, \quad \omega_3(\theta, \alpha_i) \leq 0, \\ \omega_0(\theta, \alpha_i) + \omega_1(\theta, \alpha_i) &= 1. \end{aligned}$$

故对于给定的数据, 无论正参数 α_i 取何值, 曲线 $P(t)$ 在区间 $[a, b]$ 是有界的。若记

$$F = \max_{r=i, i+1} \{f_r\}, \quad D = \max_{r=i, i+1} \{d_r\},$$

则对任意的正参数 α_i , 易得下不等式恒成立:

$$P(t) \leq F + 2h_i D / \pi.$$

2 误差估计

由于式(1)的递推性, 故仅需分析子区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 即可得曲线的全局误差性质。假定数据集取自 $f(t) \in C^2[a, b]$, 根据 Peano-Kernel 定理^[14], 有:

$$R[f] = f(t) - P(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^2(\tau) R_i[(t-\tau)_+] d\tau \quad (2)$$

其中:

$$R_i[(t-\tau)_+] = \begin{cases} p(\tau), & t_i < \tau < t; \\ q(\tau), & t < \tau < t_{i+1}; \end{cases}$$

$$\text{且} \begin{cases} p(\tau) = t - \tau + \frac{CS^2 h_i - S^2(t_{i+1} - \tau)}{\alpha_i C^2 + S^2}, \\ q(\tau) = \frac{CS^2 h_i - S^2(t_{i+1} - \tau)}{\alpha_i C^2 + S^2}. \end{cases}$$

在 $[t_i, t_{i+1}]$ 上计算可得

$$\begin{aligned} q(t_{i+1}) &= \frac{CS^2 h_i}{\alpha_i C^2 + S^2} \geq 0 \\ p(t) = q(t) &= \frac{CS^2 h_i - S^2(t_{i+1} - t)}{\alpha_i C^2 + S^2} < 0 \\ p(t_i) &= t - t_i + \frac{(C-1)S^2 h_i}{\alpha_i C^2 + S^2} \geq 0 \end{aligned}$$

故 $p(\tau)$, $q(\tau)$ 在其定义区间上均有一个零点, 分别为 τ_1 , τ_2 。其中

$$\tau_1 = t - \frac{(1-\delta)h_i S^2 - C(1-C)}{\alpha_i C^2}, \quad \tau_1 \in [t_i, t]$$

$$\tau_2 = t_{i+1} - \frac{C}{1-C}, \quad \tau_2 \in [t, t_{i+1}]$$

因此, 由(2)式可得

$$\begin{aligned} |R[f]| &\leq \|f^{(2)}\| \left[\int_{t_i}^t |p(\tau)| d\tau + \int_t^{t_{i+1}} |q(\tau)| d\tau \right] = \\ &\|f^{(2)}\| \left[\int_{t_i}^{\tau_1} p(\tau) d\tau - \int_{\tau_1}^t p(\tau) d\tau - \int_t^{\tau_2} q(\tau) d\tau + \int_{\tau_2}^{t_{i+1}} q(\tau) d\tau \right] \leq \|f^{(2)}(t)\| h_i^2 c_i \end{aligned}$$

其中: $c_i = \max \omega(\theta, \alpha_i)$ 。从而可得如下定理:

定理 1. 设 $f(t) \in C^2[a, b]$, 以及区间上的结点 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ 。对给定正参数 α_i , 由(1)式定义的插值函数 $P(t)$ 在子区间 $t \in [t_i, t_{i+1}]$ 上, 有

$$|R[f]| \leq \|f^{(2)}(t)\| h_i^2 c_i \quad (3)$$

显然, 最优误差估计函数不依赖于子区间 $[t_i, t_{i+1}]$, 仅与参数 α_i 及子区间长度有关。

3 插值曲线的值控制性

插值曲线的形状依赖于插值区间上的插值数据。通常对于给定插值数据, 插值曲线的形状是确定的。但在式(1)中有一个额外的参数, 可以选择合适的参数来改变插值曲线的形状。首先, 我们分析值控制的方法。设 θ^* 为 t^* 的局部坐标 ($\theta \in [0, \pi/2]$), 若实际设计中要求在区间内点 t^* 处函数值

为 M , 记

$$M = \omega_0(\theta^*, \alpha_i) f_i + \omega_1(\theta^*, \alpha_i) f_{i+1} + \omega_2(\theta^*, \alpha_i) d_i + \omega_3(\theta^*, \alpha_i) d_{i+1} \quad (4)$$

为值控制方程。

若存在一个正参数 α_i 满足(4), 则 α_i 为此方程的解。给定 $t^* \in (t_i, t_{i+1})$, 则 t^* 已知, 而参数 α_i 未知。式(4)等价于

$$A\alpha_i + B = 0 \quad (5)$$

其中,

$$\begin{cases} A = (f_i - M)C^2 + G \\ B = (f_{i+1} - M)C^2 + H \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{且, } \begin{cases} G = 2h_i d_i S(1-S)/\pi, \\ H = -2h_i d_{i+1} C(1-C)/\pi. \end{cases}$$

故可得如下定理:

定理 2. 设 $P(t)$ 为由式(1)定义的插值样条函数, 对给定的 $t^* \in (t_i, t_{i+1})$, 满足 $P(t^*)=M$ 正参数 α_i 存在的充要条件为

$$m_1 < M < m_2 \quad (7)$$

这里, $m_1 = (E - \sqrt{\Delta})/2D$, $m_2 = (E + \sqrt{\Delta})/2D$,

$$D = S^2 C^2, \quad \Delta = E^2 - 4DF,$$

$$\text{且, } E = (f_i + f_{i+1})D + GS^2 + HC^2 \quad (8)$$

$$F = (f_i C^2 + G)(f_{i+1} S^2 + H).$$

证明: 由式(5)容易得到当

$$AB < 0 \quad (9)$$

时, 这样的正参数 α_i 存在且唯一。展开式(9)并整理, 得到式(9)等价于

$$DM^2 - EM + F < 0 \quad (10)$$

其中: D , E 以及 F 由式(8)定义。又当 $t^* \in (t_i, t_{i+1})$, 显然有 $D > 0$, 从而

$$\Delta = [(f_i - f_{i+1})D + GS^2 - HC^2]^2 > 0$$

恒成立。故不等式(10)有解, 且解由式(7)给出。

因此, 当 $M \in (m_1, m_2)$ 时式(9)成立, 从而正参数 α_i 存在, 且唯一由式(11)得到。

$$\alpha_i = -B/A \quad (11)$$

由定理 2 可知, 对于给定的插值数据及位置 t^* , 控制点值 M 必须在区间 (m_1, m_2) 内, 且一旦 M 给定, 正参数 α_i 可由式(11)计算得到, 同时曲线 $P(t)$ 也唯一确定。

此外, 对于给定插值数据 (t_i, f_i, d_i) 及参数 α_i , 容易验证上面定义的函数 $P(t)$ 是存在且唯一的。

例 1 考虑 $[0, 1]$ 上的插值。设 $f(t)$ 为被插值函数, 且 $f(0)=4$, $f(1)=1$ 。令 $P(t)$ 为 $[0, 1]$ 上由(1)定义的插值函数, 讨论在 $f'(0)=-3/4$, $f'(1)=-1/4$ 或 $f'(0)=3/4$, $f'(1)=1/4$ 条件下值控制点 t^* 及 M 的曲线生成情形。

根据值控制性, 由不同正参数 α_i 生成的曲线 $P(t)$ 不相交, 且与 t^* 及 M 均无关(见图 1, 给定数据来自例 1)。图中最外围的曲线包围区域为正参数 α_i 所生成曲线区域, 所有由 α_i 生成的曲线均不相交。并且在相同 t_i, t_{i+1} , f_i, f_{i+1} 条件下, 导数条件 d_i 和 d_{i+1} 对曲线形状及值控制点 M 区间 (m_1, m_2) 有着较大的影响(见图 1(a)与图 1(b)的对比)。

此外, 若 M 取值不在区间 (m_1, m_2) 内, 则由式(11)得到的参数 α_i 均小于 0, 这二者是等价的。由曲线 $P(t)$ 表达式(1)可知, 对于负参数 α_i , 存在 $t \in (t_i, t_{i+1})$, 使得样条基的分母为 0, 从而曲线 $P(t)$ 在子区间 (t_i, t_{i+1}) 内存在无穷间断点 $P(t)$ 。图 2(a)给出了在负参数 α_i 条件下存在无穷间断点的情形, 竖虚线给出了各曲线对应的渐近线; 图 2(b)展示了取实参数 α_i 条件下, 各曲线的形态。图 2 也进一步说明, 不同参数 α_i 生成的曲线是不相交的。

确切地, 当 $t^*=0.5$, $M=2.5$, 解得 $\alpha_i=1.1012$, 得到图 3(a)中曲线 $P_1(t)$; 取 $t^*=0.5$, $M=1.5$, 解得 $\alpha_i=0.1885$, 并得到图 3(a)中曲线 $P_2(t)$; 取 $t^*=0.5$, $M=3.5$, 解得 $\alpha_i=8.0538$, 并得到图 3(a)中曲线 $P_3(t)$; 取 $t^*=0.2$, $M=2.5$, 解得 $\alpha_i=0.1082$, 并得到图 3(a)中曲线 $P_4(t)$; 取 $t^*=0.7$, $M=2.5$, 解得 $\alpha_i=10.9310$, 并得到图 3(a)中曲线 $P_5(t)$ 。

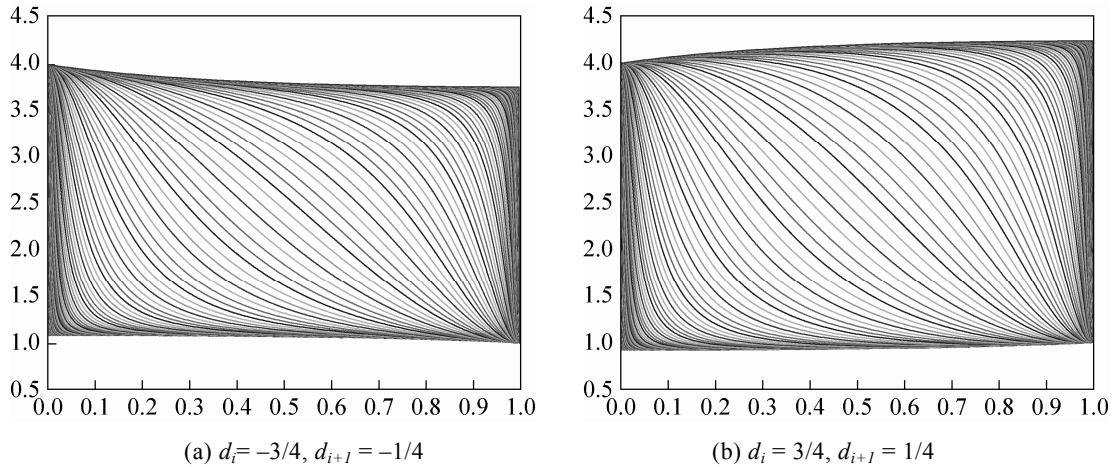


图 1 正参数曲线, $\alpha_i \in I_{R^+} = (10^{-18}, 10^{18})$

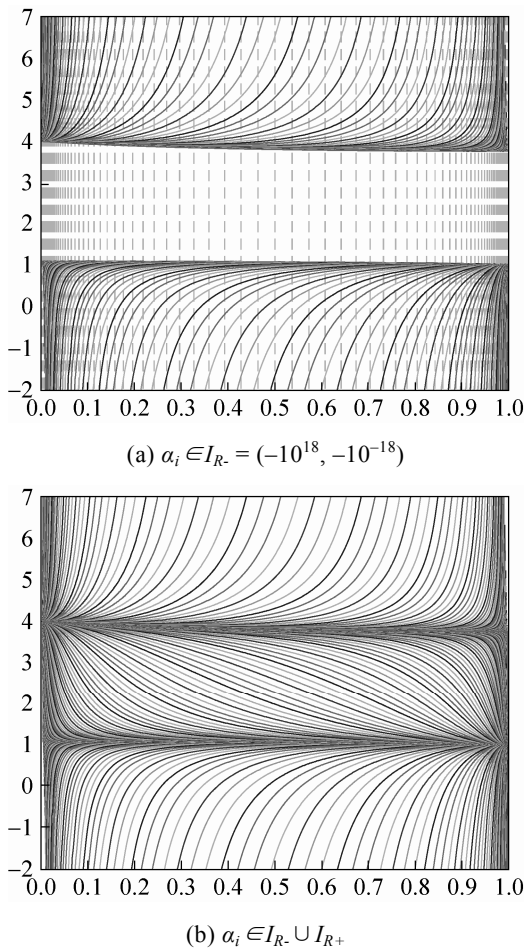
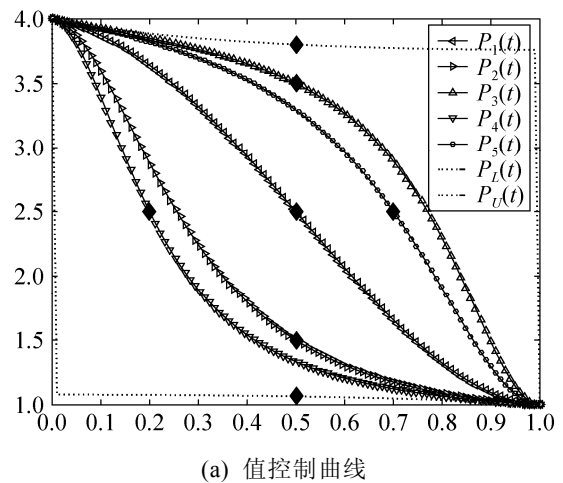


图 2 实参数曲线($d_i = -3/4, d_{i+1} = -1/4$)

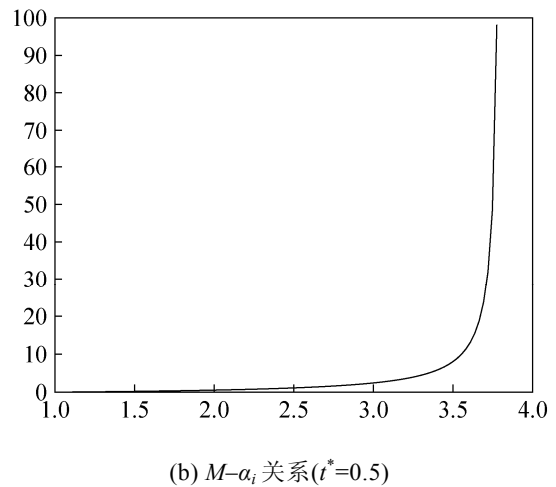
在位置 $t^* = 0.5$ 处, 由定理 2 中的式(7)解得 $m_1 = 1.0659 < M < m_2 = 3.8022$ 。对应的正参数 α_i 的取值范围为 $\alpha_i \in (0, \infty)$ 。若 M 取值接近下限 $m_1(1.0659)$ 时, α_i 接近 0, 此时得到图 3(a)中曲线 $P_L(t)$; 若 M

取值接近上限 $m_2(3.8022)$ 时, α_i 接近正无穷大, 此时得到图 3(a)中曲线 $P_U(t)$ 。

由式(6)和式(11)可知, α_i 是关于 M 的反比例函数, $t^* = 0.5$ 处, $M - \alpha_i$ 关系曲线如图 3(b)所示。



(a) 值控制曲线



(b) $M - \alpha_i$ 关系($t^* = 0.5$)

图 3 值控制曲线及 $M - \lg(\alpha_i)$ 关系图

尽管前面都是根据值控制性来探讨参数 α_i 的值。反过来,从 $M-\alpha_i$ 关系也可以直观分析参数 α_i 对插值曲线形状的影响。从图 3(a)、图 3(b)可知,随着 t^* 的增大, $t^*=0.5$ 处的 M 值越来越接近左端点的函数值 $f_i=4$ 。当 $\alpha_i \rightarrow \infty$ 时,插值曲线 $P(t)$ 就形成了图 1(a)或图 1(b)中曲线簇的上边界,也即在自变量 t 的绝大范围内,函数值 $P(t)$ 无限趋近左端点值 f_i 。相似地,随着参数 α_i 的减小,右端点对 $P(t)$ 的作用越来越大,曲线从图 1(a)或图 1(b)的上边界往下运动。极端情况是当 $\alpha_i \rightarrow 0$ 时,插值曲线就形成了图 1(a)或图 1(b)中曲线簇的下边界。

4 插值曲线的拐点控制

插值曲线的凹凸性依赖于函数的二阶导数。由(1)式定义的插值曲线 $P(t)$ 在区间 (t_i, t_{i+1}) 内的二阶导数经化简整理后记为:

$$P''(t) = \frac{4h_i^2 g(\theta, \alpha_i)}{\pi \omega^3(\theta, \alpha_i)} \quad (12)$$

其中,

$$g(\theta, \alpha_i) = \Omega \alpha_i^3 + \Xi \alpha_i^2 + \Psi \alpha_i + Z \quad (13)$$

且,

$$\begin{cases} \Omega = 2h_i d_i C^2 [C^2(4-S) - 6(1-S)], \\ \Xi = -2\pi(f_{i+1} - f_i)C^2(2C^2 - 3) + \\ \quad 4h_i d_i [-C^4(2-S) + C^2(1-3S) + (1-S)] + \\ \quad 2h_i d_{i+1} C^2(C^2 - 2), \\ \Psi = 2\pi(f_{i+1} - f_i)(2C^4 - C^2 - 1) - 2h_i d_i S(C^4 - 1) - \\ \quad 4h_i d_{i+1} C(C-1)(C^3 - C^2 + 3), \\ Z = 2h_i d_{i+1} (C+1)(C-2)(C-1)^3. \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{又记 } g'(\theta^*, \alpha_i) = \left. \frac{\partial g(\theta, \alpha_i)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta^*} \quad (15)$$

定理 3. 设 $P(t)$ 为由式(1)定义的插值样条函数,对给定的 $t^* \in (t_i, t_{i+1})$, 则点 $(t^*, P(t^*))$ 为拐点的额充要件为:存在正实数 α_i , 使得 $g(\theta^*, \alpha_i)=0$ 及 $g'(\theta^*, \alpha_i) \neq 0$ 同时成立, 其中 $g(\theta^*, \alpha_i)$ 及 $g'(\theta^*, \alpha_i)$ 分别由式(13)和(15)给出。

分析: 对正实数 α_i , 有 $\omega(\theta, \alpha_i) > 0$ 恒成立, 再由曲

线拐点必须满足的性质, 定理易得证明。

定理 4. 若存在正实数 α_i , 使得 $g(\theta^*, \alpha_i) > 0$, 则由式(1)定义的曲线 $P(t)$ 在点 $(t^*, P(t^*))$ 是下凹的; 若 $g(\theta^*, \alpha_i) < 0$, 则曲线在该点处是上凸的。

由于式(13)是关于参数 α_i 的一元三次方程, 故可用求根公式得到(13)的三个解 $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}$ 及 $\alpha_{i3})$, 若存在正实数根, 再代入式(15)的后即可用定理 3 及定理 4 判断曲线 $P(t)$ 的拐点及凹凸性质。

例 2. 使用例 1 中的数据, 分析插值曲线的拐点控制性。

取 $f'(0) = -3/4$, $f'(1) = -1/4$ 时, 对任意 $t \in (t_i, t_{i+1})$, 关于 α_i 的方程(13)恰好都有 3 个正根, 得拐点位置 t 与 $\lg(\alpha_i)$ 的关系, 并得到如图 4(a)所示三条 $\lg(\alpha_i)$ 曲线, 图中左下角菱形表示由式(15)过滤掉的非拐点参数 α_i , 即该 α_i 使得式(15)为 0。图 4b 展示了由图 4(a)中参数 α_i 得到的曲线簇及拐点, 与图 4(a)对应的, 图中实心点表示拐点, 左下角菱形表示非拐点(但式(15)为 0)。

图 4(c)及图 4(d)给出了一阶导数取 $f'(0)=3/4$, $f'(1)=1/4$ 条件下, t 与 $\lg(\alpha_i)$ 的关系及相应的曲线簇和拐点。在这个一阶导数条件下, 对给定的 t , 最多能解得一个正实参数 α_i , 也即由 t 确定曲线具有唯一性。

根据关于 α_i 的三次方程式(13)及图 4 的论证, 表明若给定拐点参变量 t 并结合曲线值 M 的范围控制, 是可以唯一确定曲线的。这使得由式(1)给出的插值样条 $P(t)$ 可用于造型设计。

从另一个角度, 若需要在给定曲线上计算拐点位置, 则式(13)是关于 t (或 $\cos\theta$) 的非线性高次方程, 从而可能有多解, 也即一条曲线有多个拐点位置。这种情况下用一般的非线性方程数值求解方法, 可能得到非预期拐点位置。如图 5(a)和图 5(b)所示, 不少曲线计算得到的拐点(菱形表示)均在区域边缘。图 5(c)和图 5(d)分别给出了前面两幅子图中, 计算得到的拐点位置(两端的菱形, 确实也是拐点)与预期拐点位置(实心点)的差异。在这种情况下, 可用如下基于偏差最小的拐点位置优化方法。

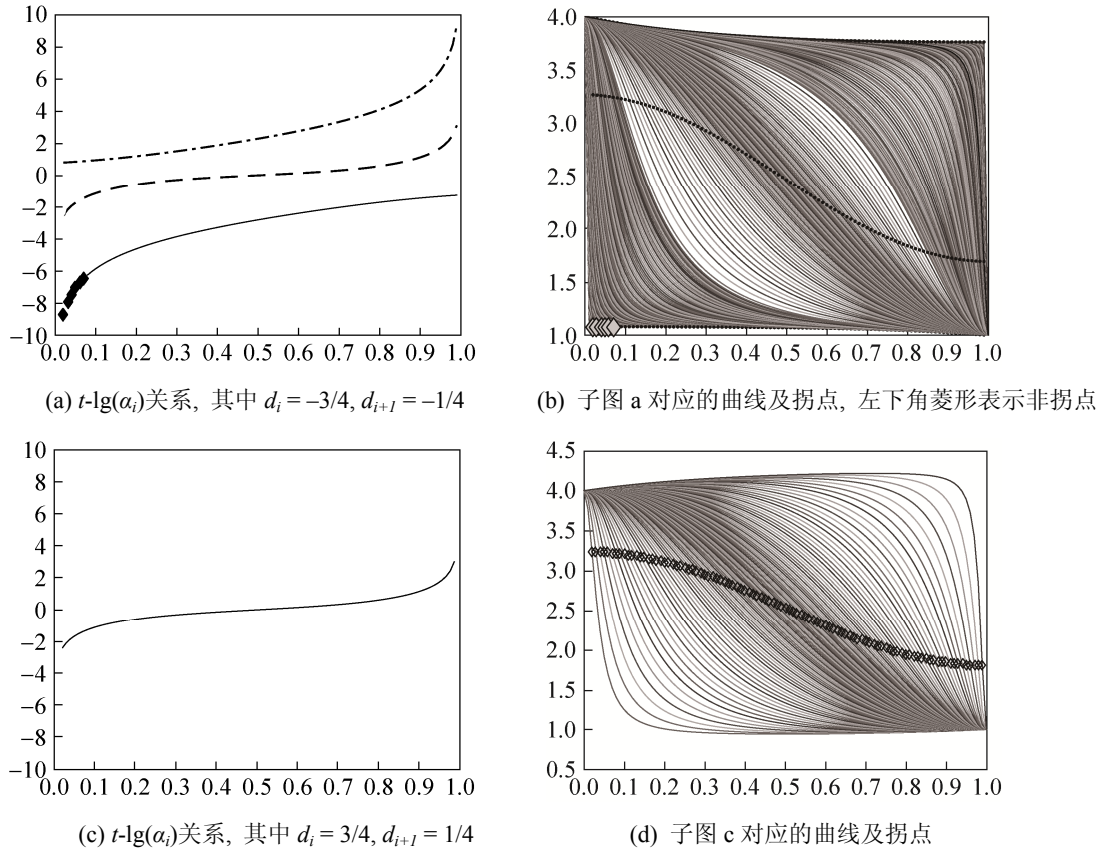


图 4 拐点位置 t -参数 α_i 关系 ($t^* \in (t_i, t_{i+1})$, 取 101 个值)

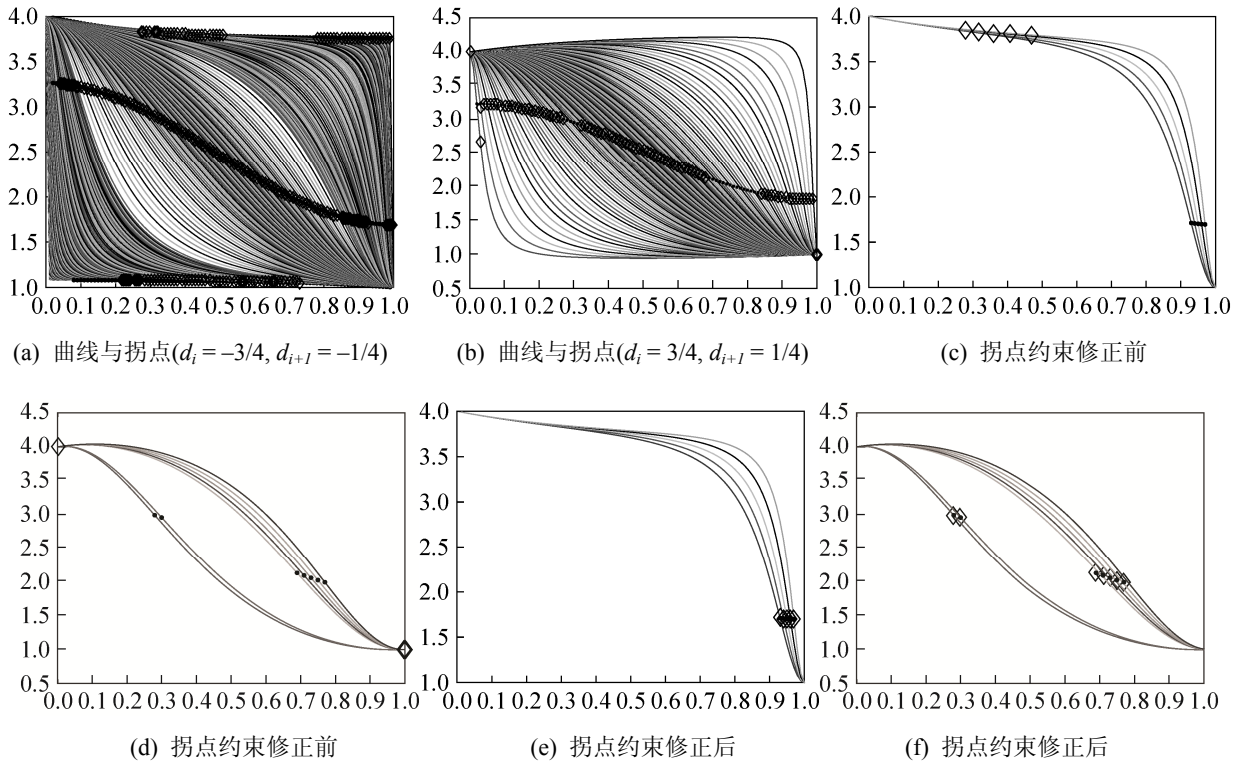


图 5 计算曲线拐点 t (参数 α_i 取图 4 有效值)

$$\begin{aligned} \min_t \quad & w(t, P(t)) = \xi_1 (t - t^*)^2 + \xi_2 (P(t) - M^*)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} g(\theta, \alpha_i) = 0 \\ (g'(\theta^*, \alpha_i))^2 > 0 \\ t \in [t_0, t_n] \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

其中: (t^*, M^*) 是预期拐点位置, ξ_1 和 ξ_2 是目标分量系数, 决策变量 $t(\theta)$ 需满足由式(13)、(15)给出的拐点条件约束。当 $\xi_1 \neq 0$ 且 $\xi_2 = 0$ 时, 表示目标函数为拐点自变量 t 偏离 t^* 最小; 当 $\xi_1 = 0$ 且 $\xi_2 \neq 0$ 时, 表示目标函数为拐点函数值 $P(t)$ 偏离 M^* 最小; 当 $\xi_1 = \xi_2 = 1$ 时, 表示拐点坐标 $(t, P(t))$ 偏离预期位置 (t^*, M^*) 的欧氏距离最小。

在优化图5(c)和图5(d)中拐点位置时, 目标函数设为预期拐点函数值偏离最小, 取 $\xi_1 = 0$, $\xi_2 \neq 0$ 且 $M^* = 2.5$, 再求解最优化问题(16)得拐点位置(见图5(e)及图5(f), 图中求得的拐点(菱形)处于预期位置(实心点)处。

5 结论

本文提出一种带形状参数的二次有理三角样条插值曲线, 并讨论了曲线的局部值控制, 拐点控制等, 并基于最优化思想, 给出了约束条件下确定(或修正)拐点位置的方法。利用本文方法, 可以在给定一定条件下, 进行造型设计。

参考文献:

- [1] Brodlie K W, Butt S. Preserving Convexity Using Piecewise Cubic Interpolation [J]. *Computer & Graphics* (S0097-8493), 1991, 15(1): 15-23.
- [2] Goodman T N T, Unsworth K. Shape Preserving Interpolation by Parametrically Defined Curves [J]. *Siam Journal on Numerical Analysis* (S0036-1429), 1988, 25(1): 1-13.
- [3] Gregory J A. Shape Preserving Spline Interpolation [J]. *Computer-Aided Design* (S0010-4485), 1986, 18(1): 53-57.

- [4] Lahtinen A. On the Choice of Parameters in Shape-preserving Quadratic Spline Interpolation [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics* (S0377-0427), 1992, 39(1): 109-113.
- [5] Schumaker L L. On Shape Preserving Quadratic Spline Interpolation [J]. *Siam Journal on Numerical Analysis* (S0036-1429), 1983, 20(1): 854-864.
- [6] Duan Q, Djidjeli K, Price W G, et al. Rational Cubic Spline Based on Function Values [J]. *Computer & Graphics* (S0097-8493), 1998, 22(1): 479-486.
- [7] Sarfraz M, Hussain M Z. Data Visualization Using Spline Interpolation [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics* (S0377-0427), 2006, 189(1): 513-525.
- [8] Sarfraz M. A C2 Rational Cubic Spline which has Linear Denominator and Shape Control [J]. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae Sectio Mathematica* (S0138-9491), 1994, 37(1): 53-62.
- [9] Bao F, Sun Q, Pan J, et al. A Blending Interpolator with Value Control and Minimal Strain Energy [J]. *Computer & Graphics* (S0097-8493), 2010, 33(1): 119-124.
- [10] Duan Q, Djidjeli K, Price W G, et al. A New Weighted Rational Cubic Interpolation and Its Approximation [J]. *Applied Mathematics and Computation* (S0096-3003), 2005, 168(1): 990-1003.
- [11] Xie J, Tan J. A Modifiable Bivariate Rational Interpolating Surface Based on Function Values [J]. *Journal of Computational Information Systems* (S1553-9105), 2010, 6(1): 2751-2758.
- [12] Gregory J A, Sarfraz M, Yuen P K. Interactive Curve Design Using C2 Rational Spline [J]. *Computer & Graphics* (S0097-8493), 1994, 18(1): 153-159.
- [13] Sun Q, Bao F, Duan Q. Shape-preserving Weighted Rational Cubic Interpolation [J]. *Journal of Computational Information Systems* (S1553-9105), 2012, 8(1): 7721-7728.
- [14] Schultz M H. *Spline Analysis* [M]. USA: Prentice-Hall, N J Englewood Cliffs, 1973.
- [15] Pan J X, Sun Q H, Bao F X. Shape Control of the Curves Using Rational Cubic Spline [J]. *Journal of Computational Information Systems* (S1553-9105), 2013, 9(14): 5861-5868.