

8-13-2020

Rational Interpolation Skinning Surface via Continued Fractions Interpolation Based on Partial Generalized Function Inverse

Huanxi Zhao

School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research](#), [Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Rational Interpolation Skinning Surface via Continued Fractions Interpolation Based on Partial Generalized Function Inverse

Abstract

Abstract: A two-variable functions partial generalized inverse was proposed, and using the proposed partial generalized inverse, the partial inverse difference of two-variable functions was defined, and then based on the partial inverse difference. Thiele continued fraction interpolation algorithm for rational interpolation skinning surface and parameters rational interpolation spline skinning surface were proposed respectively. Interpolation recursion formula for the rational interpolation skinning surface was presented, and numerical simulation example illustrates the effectiveness of skinning surface modeling algorithm.

Keywords

function generalized inverse, partial inverse difference, continued fractions, rational transfinite interpolation, skinning surface

Recommended Citation

Zhao Huanxi. Rational Interpolation Skinning Surface via Continued Fractions Interpolation Based on Partial Generalized Function Inverse[J]. Journal of System Simulation, 2016, 28(10): 2497-2502.

基于函数偏广义逆连分式插值的有理插值蒙皮曲面设计

赵欢喜

(中南大学信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083)

摘要: 提出了一种二元函数偏广义逆, 利用提出的偏广义逆定义了二元函数的偏倒差商, 利用这种偏倒差商给出了基于 Thiele 型连分式插值算法的有理插值蒙皮曲面以及一种具有承接性的有理插值蒙皮曲面递推算法。利用融合技术以及低次的切触基于函数广义逆连分插值, 构造了有理插值蒙皮样条曲面, 给出了参数形式的有理插值蒙皮曲面, 数值仿真例子说明了本文提出的蒙皮曲面造型的有效性。

关键词: 函数广义逆; 偏倒差商; 连分式; 有理超限插值; 蒙皮曲面

中图分类号: TP391.41

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2016) 10-2497-06

Rational Interpolation Skinning Surface via Continued Fractions Interpolation Based on Partial Generalized Function Inverse

Zhao Huanxi

(School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: A two-variable functions partial generalized inverse was proposed, and using the proposed partial generalized inverse, the partial inverse difference of two-variable functions was defined, and then based on the partial inverse difference. Thiele continued fraction interpolation algorithm for rational interpolation skinning surface and parameters rational interpolation spline skinning surface were proposed respectively. Interpolation recursion formula for the rational interpolation skinning surface was presented, and numerical simulation example illustrates the effectiveness of skinning surface modeling algorithm.

Keywords: function generalized inverse; partial inverse difference; continued fractions; rational transfinite interpolation; skinning surface

引言

在曲面造型领域, 蒙皮法是重要的有效手段之一, 被认为最适合交互式 CAD 的应用。Woodward 曾指出, 蒙皮的过程是拟合一张曲面, 使其通过一组有序的称为截面曲线的空间曲线^[1]。传统的蒙皮法是采用 B 样条或 NURBS 曲面蒙皮, 用户在关键

位置处布置若干条描述曲面形状的 B 样条或 NURBS 曲线, 以生成一张通过这些曲线的曲面, 使得各条曲线在曲面上是等参线^[2-4]。这种造型方式直观灵活, 因此被广泛地应用在 CAD 曲面造型中^[5-7]。这种曲面蒙皮的经典算法分为如下 2 个步骤^[5]: 首先对各条曲线做相容性处理, 即所有曲线的次数相同, 并且曲线都定义在相同的节点向量上; 然后插值各条曲线对应的控制点, 得到的所有插值曲线的控制点就是最终曲面的控制点。该算法简单且易实现, 但是对各条曲线做相容性处理时会引入大量的控制点一般来说, 如果有 k 条截面曲



收稿日期: 2016-05-31

修回日期: 2016-07-26;

基金项目: 国家自然科学基金(61272024); 湖南省自然科学基金(10JJ3008);

作者简介: 赵欢喜(1967-), 男, 湖南邵阳, 博士, 硕士, 研究方向为计算机图形学、数字图像处理。

<http://www.china-simulation.com>

• 2497 •

线, 每条截面线平均有 n 个控制点, 则相容性处理后每条曲线的控制点数目为 (kn) , 从而最终曲面的控制点数目为 $O(k^2n)^{[5]}$ 。由于统一后的节点矢量数量级呈几何增长, 会导致节点和控制顶点数量增多, 有时甚至达到海量数据, 使得计算量大幅度增加。同时当节点增多导致两节点比较接近时, 在蒙皮曲面上会生成非常窄的曲面条, 使数值计算困难, 使得经典的蒙皮算法很难直接应用到实际的 CAD 系统中。为此在蒙皮曲面的构造过程中, 采取有效去除冗余控制点的算法是十分必要的。因此一些学者开始研究如何在满足用户给定误差的前提下减少蒙皮曲面的控制点。如 Park 等^[8]首先对截面曲线进行采样, 然后用一组相容的、且含有较少控制点的曲线拟合采样点来得到近似截面线, 从而减少最终蒙皮面的控制点。但是他们的方法必须对曲线进行离散采样。这样只能保证在采样点处逼近曲线与原始曲线的距离小于用户指定误差, 并不能反映曲线的整体信息。另外一些学者研究了对点阵进行蒙皮的问题^[9-11], 同样地, 如果将这些算法应用到对截面线进行蒙皮中, 也会遇到与文献[5,8]同样的问题。相对于上述离散的方法, Piegl 等^[12]提出了一种误差可控的近似 NURBS 曲面蒙皮算法, 通过利用删除节点后两曲线间的距离公式, 可以保证曲线间的整体误差。鉴于目前采用 NURBS 曲面构造蒙皮曲面的上述缺点, 很多研究者另辟蹊径, 如文献[13-14]采用 PDE 或变分法对离散球点列形成封闭包络球点列的管道蒙皮曲面。文献[15]在传统的蒙皮曲面构造过程中引入细分方法, 有效地避免了因截面曲线的相容性处理而产生的数据量激增的问题; 最后生成的蒙皮曲面能够精确插值预先设计的截面曲线, 并且可以在指定的截面曲线处产生折痕效果更多还原。特别地, 文献[16-18]采用 T-样条技术, 其样条节点向量可以不相容, 这样克服了传统 T-样条对节点向量的相容性, 同时也可获得局部修改的能力。本文从另外一种思路, 也即提出一种基于广义连分式的有理

插值蒙皮曲面, 有理形式可以克服多项式插值蒙皮曲面易扭曲现象、插值精度相对也高等缺点, 能构造比较复杂的蒙面曲面, 数值实验也验证了本文方法的有效性。

本文余下内容安排如下: 在第二节给出了函数广义逆、二元函数广义逆以及基于函数广义逆的倒差商定义。在第三节讨论了基于函数偏广义逆的蒙皮有理插值算法, 并给出了二种算法, 其中有一种是具有承接递推形式的插值算法。在第四节给出了蒙皮有理插值样条算法。在第五节给出了参数向量形式的蒙皮有理插值算法并给出了数值例子说明了方法的造型能力。

1 二元函数的偏倒差商

为阅读方便起见, 本文先讨论的函数为 (x, y) 平面上的曲面函数, 实际上可平凡推广到参数曲面, 可由读者自行推导。设一元实函数 $g(x), x \in [a, b]$, 我们可定义 $g(x)$ 如下的广义逆:

$$g^{-1}(x) = \frac{g(x)}{\langle g(x), g(x) \rangle} = \frac{g(x)}{\int_a^b g^2(x) dx} \quad (1)$$

进一步, 对于定义在区域 $[a, b] \times [c, d]$ 的二元实函数 $f(x, y)$, 现定义 $f(x, y)$ 关于自变量 x 的内积 $\langle f(x, y), f(x, y) \rangle_x = \int_a^b f^2(x, y) dx$, 进而可定义二元函数 $f(x, y)$ 关于 x 的偏广义逆:

$$f_x^{-1}(x, y) = \frac{f(x, y)}{\langle f(x, y), f(x, y) \rangle_x} = \frac{f(x, y)}{\int_a^b f^2(x, y) dx} \quad (2)$$

给定一系列曲线 $z_i = f(x_i, y), i = 0, 1, 2, \dots, n$, 此曲线称之为截面曲线, 在实际造型中, 截面曲线一般是平面的, 但截面曲线不限在平面内, 在本文里, 可无需假定截面曲线在一个平面内。

2 基于函数偏广义逆的蒙皮有理插值算法:

本节讨论基于二元函数 $f(x, y)$ 关于 y 的偏广义逆的 Thiele 型插值连分式构造方法, 它插值给定的截面曲线 $z_i = f(x_i, y), i = 0, 1, 2, \dots, n$, 其构造过程如下。

算法 1 基于函数偏广义逆的蒙皮有理插值算法:

Step 1: 赋初值, $\varphi_0[x_i] = f(x_i, y), i = 0, \dots, n$

Step 2: 迭代, 对 x_0, x_1 , 定义 $\varphi_1[x_0, x_1] = \frac{x_1 - x_0}{\varphi_0[x_1] - \varphi_0[x_0]}$;

对 $x_0, x_1, \dots, x_k, k \leq n$ 定义递推公式:

$$\varphi_k[x_0, \dots, x_{k-1}, x_k] =$$

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{\varphi_{k-1}[x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_k] - \varphi_{k-1}[x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]} \quad \text{则如}$$

下定义的基于 y 的偏广义逆的连分式:

$$R_n[x, y] = \varphi_0(x_0) + \frac{x - x_0}{|\varphi_1[x_0, x_1]|} + \dots + \frac{x - x_{n-1}}{|\varphi_n[x_0, \dots, x_{n-1}, x_n]|}.$$

为 Thiele 型基于 y 的偏广义逆的插值连分式, 不难验证 $R_n[x_i, y] = f(x_i, y), i = 0, 1, \dots, n$.

证明: 用数学归纳法。由构造公式知 $i = 0, 1$ 时,

$R_n(x_i, y) = f(x_i, y)$ 成立, 假设当 $i \leq n$ 时, 算法成立, 则对 $n+1$ 来说, 由归纳假设知, 只要证明对 x_{n+1} ,

$R_{n+1}(x_{n+1}, y) = f(x_{n+1}, y)$ 成立即可。事实上对公式 $R_{n+1}(x_{n+1}, y)$ 考虑到关系式:

$$\varphi_{n+1}[x_0, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}] = \frac{x_{n+1} - x_n}{\varphi_n[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}] - \varphi_n[x_0, \dots, x_{n-1}, x_n]}$$

则有

$$\varphi_n[x_0, \dots, x_{n-1}, x_n] + \frac{x_{n+1} - x_n}{\varphi_{n+1}[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}]} = \varphi_n[x_0, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}]$$

继续从后向前计算到如下表达式:

$$R_n[x_{n+1}, y] = \varphi_0(x_0) + \frac{x_{n+1} - x_0}{\varphi_1[x_0, x_{n+1}]} = \varphi_0(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y),$$

例 1: 假设截面曲线 $f(x_i, y), x_i = i, i = 0, 1, \dots, 3$ 来自曲面 $z = f(x, y) = 5(x - y)^3 + 3(x - 1)(y - 2)$, 则由基于函数偏广义逆的蒙皮有理插值算法知:

$$\varphi_0[x_0] = f(x_0, y) = -5y^3 - 3(y - 2);$$

$$\varphi_1[x_0, x_1] = (5y^2)/176 + (5y)/176 + 1/66;$$

$$\varphi_1[x_0, x_1, x_2] = 15y^2 - (189y)/5 + 8;$$

$$\varphi_1[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-175y^2}{8096} - \frac{15y}{1012} - \frac{5}{1056};$$

$$R_3(x, y) = \frac{\delta_1 + \delta_2}{x^2 - 4x + 7};$$

这里

$$\delta_1 = 15x^3y^2 + 30x^3y + 23x^3 - 5x^2y^3 - 60x^2y^2 - 120x^2y;$$

$$\delta_2 = -35x^2 + 20xy^3 + 105xy^2 + 30xy + 53x - 35y^3 - 21;$$

插值图形如图 1~2。

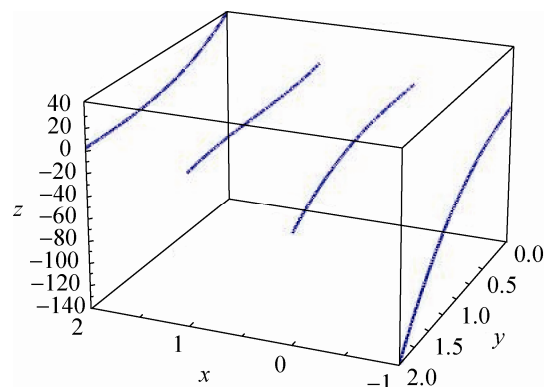


图 1 来自例 1 所示曲面的四条截面曲线

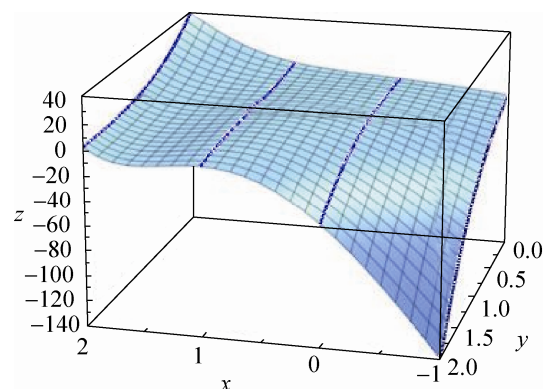


图 2 插值图 1 四条截面曲线的有理插值曲面

其他一些例子, 如:

例 2: 假设截面曲线 $f(x_i, y), x_i = i, i = 0, 1, \dots, 5$ 来自曲面 $z = f(x, y) = 2\sin(\pi(x + y))(x - y)$ (如图 3 所示); 则由基于函数偏广义逆的有理插值算法构造的蒙皮曲面如图 4 所示。

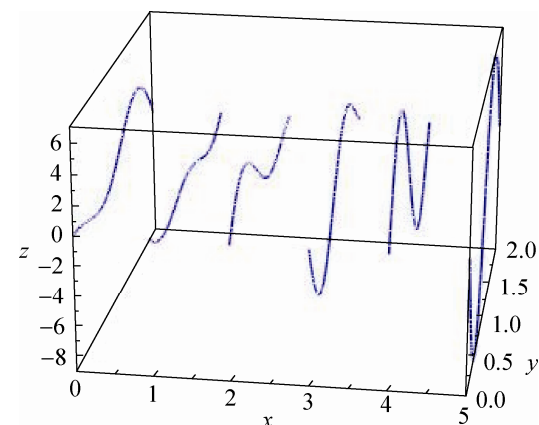


图 3 例 2 曲面定义的 6 条截面曲线

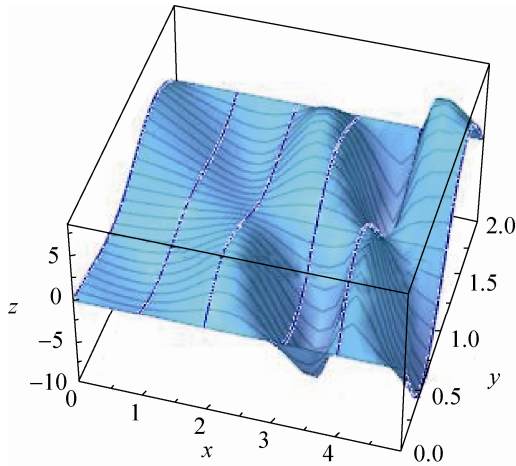


图 4 例 2 定义的截面曲线构造的有理插值蒙皮曲面

进一步,记上述算法中的 $\varphi_k[x_0, \dots, x_{k-1}, x_k] \square b_k$, 用类似文献[19]的方法我们可以给出具有承接形式的有理插值蒙皮曲面算法 2 如下:

Step 1: 采用算法 1 中的递推算法计算 b_k ;

Step 2: 按如下递推步骤计算 P_k, Q_k :

定义初值

$$\begin{cases} P_0 = b_0 \\ Q_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} P_1 = d_{1,1}P_0 + \omega_1^1 b_1 \\ Q_1 = d_{1,1}Q_0 \end{cases}$$

对 $k = 2, 3, \dots, n$ 建立 P_k, Q_k 的递推公式,

$$\begin{cases} P_k = d_{k,k}P_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i^k b_{k-i,k} P_{k-i-1} + (x-x_{k-1})^2 P_{k-2} + \omega_k^k b_k \\ Q_k = d_{k,k}Q_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i^k b_{k-i,k} Q_{k-i-1} + (x-x_{k-1})^2 Q_{k-2} \end{cases}$$

这里

$$d_{k-i,k} = \langle b_{k-i}, b_k \rangle_y = \int_a^b b_{k-i}(y) b_k(y) dy, 0 \leq i \leq k-1;$$

$$\omega_k^m(x) = (x-x_{m-k})\omega_{k-1}^m(x), k=1, 2, \dots, m, \text{ 则 } R_k(x, y) = \frac{P_k(x, y)}{Q_k(x, y)} \text{ 满足插值条件 } R_k(x_i, y) = f_i = f(x_i, y),$$

$$i=0, 1, 2, \dots, k.$$

证明过程由于跟文献[19]类似, 此处本文省略, 读者可自然补充完整。

3 有理插值蒙皮样条曲面

本节讨论已知微分信息的情形下构造有理插值蒙皮 C^1 样条曲面。假设给定曲面 $z = f(x, y)$ 的截面曲线 $f_i = f(x_i, y), i=0, 1, 2, \dots, n$ 以及相应的偏导数

函数 $f_{x,i} = \partial f(x_i, y) / \partial x, i=0, 1, \dots, n$ 。本文采用融合技术构造有理插值蒙皮 C^1 样条曲面, 提出的构造算法步骤如下:

Step 1: 分别求出区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的二个切触有理插值曲面, 也即对已知二条截面曲线 $f_i = f(x_i, y), f_{i+1} = f(x_{i+1}, y)$ 以及左端点导数曲线 $f_{x,i} = \partial f(x_i, y) / \partial x$, 则采用切触连分式插值算法我们有:

$$L_i(x, y) = l_{0,0}(y) + \frac{x-x_i}{|l_{0,1}(y)|} + \frac{x-x_i}{|l_{1,0}(y)|} + \frac{x-x_{i+1}}{|l_{1,1}(y)|}$$

这里 $l_{0,0}(y), l_{0,1}(y), l_{1,0}(y), l_{1,1}(y)$ 计算如下(注意这里是关于 y 求广义逆):

$$l_{0,0}(y) = f_i;$$

$$l_{0,1}(y) = d_{0,1}(y) = \frac{1}{f_{x,i}} = (f_{x,i})^{-1};$$

$$d_{0,2}(y) = d_{0,3}(y) = \frac{x_{i+1} - x_i}{f_{i+1} - f_i};$$

$$l_{1,0}(y) = \frac{x_{i+1} - x_i}{d_{0,2} - l_{0,1}}; \quad d_{1,3}(y) = \frac{x_{i+1} - x_i}{d_{0,3} - l_{0,1}}$$

$$l_{1,1}(y) = \frac{x_{i+1} - x_i}{d_{1,3} - l_{1,0}}.$$

类似地, 对已知二条截面曲线 $f_i = f(x_i, y), f_{i+1} = f(x_{i+1}, y)$ 以及右端点导数曲线 $f_{x,i+1} = \partial f(x_{i+1}, y) / \partial x$, 则采用切触连分式插值算法我们有:

$$R_i(x, y) = r_{0,0}(y) + \frac{x-x_{i+1}}{|r_{0,1}(y)|} + \frac{x-x_{i+1}}{|r_{1,0}(y)|} + \frac{x-x_i}{|r_{1,1}(y)|}$$

Step 2: 采用融合技术, 把 $L_i(x, y)$ 与 $R_i(x, y)$ 融合成一条 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的样条曲面片 $P_i(x, y)$, 也即:

$$P_i(x, y) = \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} L_i(x, y) + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} R_i(x, y) \quad (3)$$

则不难证明 $\{P_i(x, y)\}_1^n$ 是 C^1 的且插值 f_i, f_{i+1} 。

证明: 首先, 把 $x = x_i$ 代入(3), 则可验证:

$$P_i(x_i, y) = L_i(x_i, y) = f_i;$$

类似地把 $x = x_{i+1}$ 代入(3), 则可验证:

$$P_i(x_{i+1}, y) = R_i(x_{i+1}, y) = f_{i+1}.$$

对(3)关于 x 求导有:

$$\frac{\partial P_i(x, y)}{\partial x} = \frac{L_i(x, y)}{x_i - x_{i+1}} + \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{\partial L_i(x, y)}{\partial x} + \frac{R_i(x, y)}{x_{i+1} - x_i} + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{\partial R_i(x, y)}{\partial x} \quad (4)$$

把 $x = x_i$ 代入(4), 并考虑到 $L_i(x, y)$ 与 $R_i(x, y)$ 的切触插值性有:

$$\frac{\partial P_i(x_i, y)}{\partial x} = \frac{L_i(x_i, y) - R_i(x_i, y)}{x_i - x_{i+1}} + \frac{\partial L_i(x_i, y)}{\partial x} = \partial f(x_i, y) / \partial x;$$

类似地有: $\frac{\partial P_i(x_{i+1}, y)}{\partial x} = \partial f(x_{i+1}, y) / \partial x$ 。证毕

不难看出, 有理超限插值样条格式(3)是具有局部造型能力, 因为插值格式(3)修改一个位置信息函数值或微分信息函数, 分别至多只影响相邻二段。

4 参数形式的有理插值蒙皮曲面

记 $(s, t) \in \Omega = [a, b] \times [c, d]$, 三维二元向量函数 $\vec{v}(s, t) = (v_1(s, t), v_2(s, t), v_3(s, t)), (s, t) \in \Omega$, 借助向量的 Samelson 逆^[20]以及在地第 4 节定义的数量函数的偏广义逆, 我们不难定义向量函数的关于 s 的偏广义函数逆为:

$$\vec{v}_s^{-1}(s, t) = \frac{\vec{v}(s, t)}{\langle \vec{v}(s, t), \vec{v}(s, t) \rangle_s} = \frac{\vec{v}(s, t)}{\sum_{i=1}^3 \int_a^b v_i^2(s, t) ds}$$

给定 $n+1$ 条截面参数曲线 $\vec{f}(s, t_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$, 利用上述向量函数偏广义逆, 我们可建立参数形式的有理插值蒙皮曲面 $\vec{R}(s, t)$ 通过 $\vec{f}(s, t_i)$, 也即满足 $\vec{R}(s, t_i) = \vec{f}(s, t_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$ 。

算法 3: 构造参数形式的有理插值蒙皮曲面 $\vec{R}(s, t)$

Step 1: 对 $i = 0$, 记 $B_0 = f(s, t_0)$, 则对 $i \geq 2$, 设

$$\vec{R}(s, t_i) = (t_i - t_0)(\vec{f}(s, t_i) - B_0) \Big|_t^{-1}, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Step 2: 对 $k = 0, 1, \dots, m-1$, 记 $B_k = R^{(k)}(s, t_k)$,

以及 对 $i = k+1, k+2, \dots, m$, 记 $\vec{R}^{(k+1)}(s, t_i) = (t_i - t_k)(\vec{R}(s, t_i) - B_k) \Big|_t^{-1}, i = 0, 1, 2, \dots, n$,

Step 3: 记 $B_m = \vec{R}^{(m)}(s, t_m)$;

Step 4: 构造连分式插值函数

$$\vec{R}(s, t) = \vec{B}_0 + \frac{t - t_0}{|B_1|} + \frac{t - t_1}{|B_2|} + \dots + \frac{t - t_{m-1}}{|B_m|}。则用与算$$

法 1 的方法易证 $\vec{R}(s, t_i) = \vec{f}(s, t_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$ 。

同样, 我们也可写出与算法 2 一样具有承接性的递推算法, 在此我们省略, 读者可以自行补充。

5 数值应用例子

在本节将通过若干数值例子说明本文提出的插值格式具有较好的造型能力以及效果。

图 5 是采集一个饮料瓶的截面数据以及采用本文方法的重建效果, 在图 5(a)是采集 18 个瓶的截面数据, 对每一层截面数据, 采用 B-样条生成截面曲线, 然后采用本文第 4 节的算法重建瓶表面。图 6 是采用手执式激光仪对国际象棋中的象、一花瓶和国际象棋中的士采集的真实物体截面数据, 并对每一个截面用三次样条生成截面曲线。由于截面线比较密集, 图 7 为再剔除一些图 6 中冗余的截面曲线后用本文方法重建的有理插值蒙皮曲面。

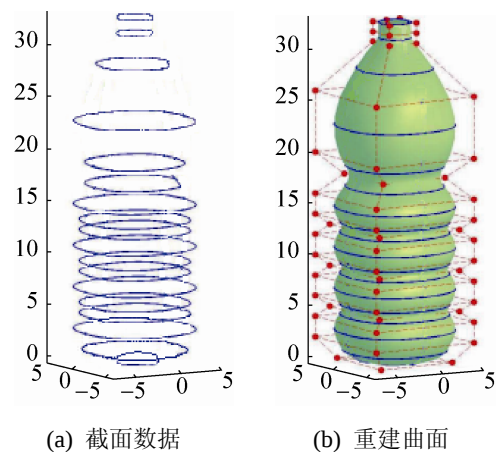


图 5 采集的饮料瓶截面数据以及本方法重建效果

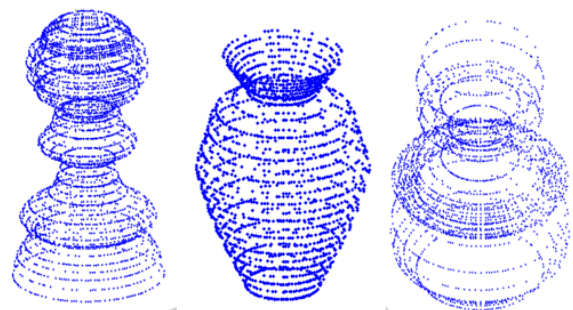


图 6 用手执式激光仪采集的真实物体截面数据

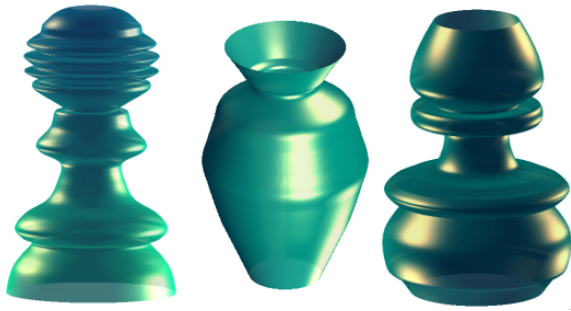


图 7 采用本文方法生成的重建曲面

6 结论

由于一般高次插值有理函数没有高次插值多项式那样有 Runge 现象, 具有比较好的数值稳定性等好处, 因此本文利用连分式构造蒙皮曲面, 为此提出了一种二元函数偏广义逆, 进而利用提出的偏倒差商给出了基于 Thiele 型连分式插值算法的有理插值蒙皮曲面以及相应的参数形式的有理插值样条蒙皮曲面, 同时也给出了一种具有承接性的有理插值蒙皮曲面递推公式, 数值仿真例子说明了本文提出的蒙皮曲面造型的有效性。在这里必须指出的是, 用高次插值有理函数构造蒙皮曲面, 其计算量比较大, 因此在实际应用中, 一般寻找特征截面曲线, 剔除一些冗余的截面曲线, 提高了算法的效率与稳定性, 另外, 本文方法一般不便表示成 NURBS 形式, 因此本文的下一步工作是讨论用 2、3 次的有理样条构造蒙皮曲面, 并给出其 NURBS 转化表示。

参考文献:

- [1] Woodward C. Skinning Techniques for Interactive B-Spline Surface Interpolation [J]. Computer-Aided Design (S1941-7217), 1988, 20(8): 441-451.
- [2] 朱心雄. 自由曲线曲面造型技术 [M]. 北京: 科学技术出版社, 2000.
- [3] Woodward C. Cross-sectional design of B-spline surfaces [J]. Computers & Graphics (S0097-8493), 1987, 11(2): 193-201.
- [4] 汪国平. 曲面、实体造型中的一些几何操作 [R]. 北京: 清华大学, 1999.
- [5] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B-样条 [M]. 北京: 高等教育出版社.
- [6] Piegl L, Tiller W. Surface Skinning revisited [J]. The Visual Computer (S0178-2789), 2002, 18(4): 273-283.
- [7] T Lyche, K Mørken. A Data-Reduction Strategy for Splines with Applications to the Approximation of Functions and Data [J]. IMA Journal of Numerical Analysis (S0272-4979), 1988, 8(2): 185-208.
- [8] H Park, K Kim, SC Leer. A method for approximate NURBS curve compatibility based on multiple curve refitting [J]. Computer-Aided Design (S1941-7217), 2000, 32(4): 237-252.
- [9] H Park, K Kim. Smooth surface approximation to serial cross-sections [J]. Computer-Aided Design (S1941-7217), 1996, 28(12): 995-1005.
- [10] L A Piegl, W Tiller. Surface approximation to scanned data [J]. Visual Computer (S0178-2789), 2000, 16(7): 386-395.
- [11] L A Piegl, W Tiller. Reducing control points in surface interpolation [J]. IEEE Computer Graphics & Application (S0272-1716), 2000, 20(5): 70-75.
- [12] LA, Piegl, W Tiller. Parametrization for surface fitting in reverse engineering [J]. Computer-aided Design (S1941-7217), 2001, 33(8): 593-603.
- [13] Slabaugh G, Unal G, Fang T, et al. Variational skinning of an ordered set of discrete 2D balls [C]// International Conference on Geometric Modeling and Processing. Germany: Springer Berlin Heidelberg, 2008: 450-461.
- [14] Slabaugh G, Whited B, Rossignac J, et al. 3D ball skinning using PDEs for generation of smooth tubular surfaces [J]. Computer-Aided Design (S1941-7217), 2010, 42(1): 18-26.
- [15] Liu S, Jacobson A, Gingold Y. Skinning cubic Bézier splines and Catmull-Clark subdivision surfaces [J]. ACM Transactions on Graphics (TOG) (S1557-7368), 2014, 33(6): 190-201.
- [16] Yusha Li, Wenyu Chen, Yiyu Cai, et al. Surface skinning using periodic TT-spline in semi-NURBS form [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics (S0377-0427), 2015, 273(1): 116-131.
- [17] Yang, XN Zheng, JM, Approximate T-spline surface skinning [J]. Computer-aided Design (S1941-7217), 2012, 44(12): 1269-1276.
- [18] Nasri Ahmad, Sinno Khaled, Zheng Jianmin. Local T-spline surface skinning [J]. Visual Computer (S0178-2789), 2012, 28(6-8): 787-797.
- [19] 朱晓临, 朱功勤. 向量值有理插值函数的递推算法 [J]. 中国科学技术大学学报, 2003, 33(1): 15-25.
- [20] Graves-Mories P R. Vector valued rational interpolants I [J]. Numer Math (S0945-3245), 1983, 42: 331-348.