

8-14-2020

## Point Cloud Modeling Based on Compactly Supported Radial Basis Function under KD Tree Index Strategy

Li Jia

*1. School of Tourism and Geographical Sciences of Yunnan Normal University, Kunming 650500, China;;2. Key Laboratory of Virtual Geographic Environment (Nanjing Normal University), Ministry of Education, Nanjing 210023, China;;3. State Key Laboratory Cultivation Base of Geographical Environment Evolution (Jiangsu Province), Nanjing 210023, China;;4. Jiangsu Center for Collaborative Innovation in Geographical Information Resource Development and Application, Nanjing 210023, China;*

Duan Ping

*1. School of Tourism and Geographical Sciences of Yunnan Normal University, Kunming 650500, China;;*

Yehua Sheng

*2. Key Laboratory of Virtual Geographic Environment (Nanjing Normal University), Ministry of Education, Nanjing 210023, China;;3. State Key Laboratory Cultivation Base of Geographical Environment Evolution (Jiangsu Province), Nanjing 210023, China;;4. Jiangsu Center for Collaborative Innovation in Geographical Information Resource Development and Application, Nanjing 210023, China;*

Haiyang Lü

*2. Key Laboratory of Virtual Geographic Environment (Nanjing Normal University), Ministry of Education, Nanjing 210023, China;;3. State Key Laboratory Cultivation Base of Geographical Environment Evolution (Jiangsu Province), Nanjing 210023, China;;4. Jiangsu Center for Collaborative Innovation in Geographical Information Resource Development and Application, Nanjing 210023, China;*

*See next page for additional authors*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research](#), [Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

## Point Cloud Modeling Based on Compactly Supported Radial Basis Function under KD Tree Index Strategy

### Abstract

**Abstract:** Modeling constructed by Compactly Supported Radial Basis Function (CSRBF) and visualization will fail. The main reason is that exhaustive search results in out of memory. *KD tree can void exhaustive search due to the advantage of quickly searching. CSRBF combined KD tree was used to construct point cloud model. Modeling approach of CSRBF based on KD tree was proposed. KD tree index of the point cloud was constructed. CSRBF interpolation method was used to construct implicit function model of point cloud. Marching Cubes algorithm was to display model in 3D manner.* The experimental results with rabbit point cloud show that it is feasible for point cloud modeling with CSRBF based on KD tree.

### Keywords

point cloud, modeling, KD tree, compactly supported radial basis function

### Authors

Li Jia, Duan Ping, Yehua Sheng, Haiyang Lü, and Siyang Zhang

### Recommended Citation

Li Jia, Duan Ping, Sheng Yehua, Lü Haiyang, Zhang Siyang. Point Cloud Modeling Based on Compactly Supported Radial Basis Function under KD Tree Index Strategy[J]. Journal of System Simulation, 2016, 28(9): 2154-2158.

# KD 树索引策略下紧支撑径向基函数的点云建模

李佳<sup>1,2,3,4</sup>, 段平<sup>1</sup>, 盛业华<sup>2,3,4</sup>, 吕海洋<sup>2,3,4</sup>, 张思阳<sup>2,3,4</sup>

(1. 云南师范大学旅游与地理科学学院, 云南 昆明 650500; 2. 虚拟地理环境教育部重点实验室(南京师范大学), 江苏 南京 210023; 3. 江苏省地理环境演化国家重点实验室培育建设点, 江苏 南京 210023; 4. 江苏省地理信息资源开发与利用协同创新中心, 江苏 南京 210023)

**摘要:** 采用紧支撑径向基函数(Compactly Supported Radial Basis Function, CSRBF)对点云进行建模和可视化表达会因穷举搜索问题导致计算机内存溢出, 最终引起建模和可视化失败。KD 树索引具有快速搜索点的优点且避免了穷举搜索问题, 将 KD 树索引和 CSRBF 插值模型相结合, 提出 KD 树搜索策略下的 CSRBF 点云建模与表达方法。建立点云数据的 KD 树索引, 采用 CSRBF 构建点云的隐式曲面函数模型, 通过 Marching Cubes 算法对建好的模型进行有效的可视化表达。采用经典的兔子点云进行实验验证, 结果表明 KD 树索引搜索策略下 CSRBF 的点云建模与表达方案可行。

**关键词:** 点云; 建模; KD 树; 紧支撑径向基函数

中图分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1004-731X (2016) 09-2154-05

## Point Cloud Modeling Based on Compactly Supported Radial Basis Function under KD Tree Index Strategy

Li Jia<sup>1,2,3,4</sup>, Duan Ping<sup>1</sup>, Sheng Yehua<sup>2,3,4</sup>, Lü Haiyang<sup>2,3,4</sup>, Zhang Siyang<sup>2,3,4</sup>

(1. School of Tourism and Geographical Sciences of Yunnan Normal University, Kunming 650500, China;

2. Key Laboratory of Virtual Geographic Environment (Nanjing Normal University), Ministry of Education, Nanjing 210023, China;

3. State Key Laboratory Cultivation Base of Geographical Environment Evolution (Jiangsu Province), Nanjing 210023, China;

4. Jiangsu Center for Collaborative Innovation in Geographical Information Resource Development and Application, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** Modeling constructed by Compactly Supported Radial Basis Function (CSRBF) and visualization will fail. The main reason is that exhaustive search results in out of memory. KD tree can void exhaustive search due to the advantage of quickly searching. CSRBF combined KD tree was used to construct point cloud model. Modeling approach of CSRBF based on KD tree was proposed. KD tree index of the point cloud was constructed. CSRBF interpolation method was used to construct implicit function model of point cloud. Marching Cubes algorithm was to display model in 3D manner. The experimental results with rabbit point cloud show that it is feasible for point cloud modeling with CSRBF based on KD tree.

**Keywords:** point cloud; modeling; KD tree; compactly supported radial basis function

## 引言

点云数据获取方法可分为两种: (1) 从图像中



收稿日期: 2015-05-28 修回日期: 2015-07-30;  
基金项目: 国家自然科学基金(41271383);  
作者简介: 李佳(1984-), 女, 湖北公安, 博士, 讲师,  
研究方向为图形图像处理; 段平(通讯作者 1984-), 男,  
湖北监利, 博士, 讲师, 研究方向为 GIS 三维建模。

恢复点云; (2) 直接采用物理设备(如三维激光扫描仪)获取点云。无论哪种方法获取的数据都没有表达点云之间的拓扑关系, 考虑点云数据本身蕴含的丰富信息, 需要对点云数据进行有效地组织才能应用于不同领域, 即点云数据的曲面建模和表达。

曲面建模方法主要分为两类: 一类是基于 Delaunay 三角网剖分, 另一类是基于隐式曲面表示

方法<sup>[1]</sup>。Delaunay 三角网剖分非常依赖于数据量, 当点云数据量较大时效率较低且对数据密度及噪声较为敏感<sup>[2]</sup>。基于隐式曲面表示方法是通过隐式函数来表达数据点, 然后通过 Marching Cubes (MC)算法抽取零等值面对隐式函数模型进行可视化表达。

径向基函数(Radial basis function, RBF)具有形式简单、各向同性等优点, 可用于构建隐式曲面。按照基函数的支撑域作用范围, RBF 分为全局 RBF 和紧支撑 RBF(Compactly supported RBF, CSRBF)<sup>[3]</sup>, 全局 RBF 的基函数作用范围为整个数据范围, 而 CSRBF 实际上是一类截断函数, 它的作用范围只在局部范围内而非整个数据范围。全局 RBF 具有一个或者多个形态参数, 在曲面建模过程中用于调节模型精度, 但是实际建模过程中, 如果形态参数设置不合理, 所构建的模型不能对原始物体表面进行准确的重建。

CSRBF 不具有形态参数, 避免了形态参数设置不合理引起的问题; 同时 CSRBF 具有 RBF 的优点, 它的系数矩阵是带状稀疏的, 利于求解大型问题<sup>[4]</sup>。因此本文选用 CSRBF 对点云数据进行建模和可视化表达, 但在建模和可视化表达过程中都需要对点云数据进行穷举搜索操作才能构建 CSRBF 的系数矩阵, 当数据量较大时可能引起计算内存溢出最终导致建模和可视化失败, 为了避免穷举搜索操作, 本文先建立点云数据的 KD 树索引, 这样不仅可以提高建模和可视化效率, 同时也避免了计算机内存的溢出, 然后在此基础上采用 CSRBF 对点云数据进行隐式曲面建模, 最后采用 MC 算法抽取零等值线进行可视化表达。

## 1 KD 树、CSRBF 建模及可视化原理

### 1.1 KD 树

#### 1.1.1 KD 树的建立

KD 树是由 Bentley 在 1981 年提出的一种多维空间二叉树索引<sup>[5]</sup>, K 代表欧几里德空间的维度

数, D 代表维度, 每一个非叶子节点可以被一个超平面划分为两个子空间, 超平面的选择采用某种准则, 对两个子空间采用同样的分割准则并结合递归方法进行划分, 递归到最后将整个点集划分完毕<sup>[6]</sup>。点云数据为三维数据, 可将 KD 树理解为三维空间中的二叉树。

将需要构建 KD 树的数据看作为一个  $n$  的矩阵, 超平面选择的准则为: 求取  $n$  列数据中方差最大的那一列, 以此列为排序对象, 对矩阵进行排序, 选择排序后的中位数, 过中位数这一点且方差最大的那一列的坐标轴作为超平面。每划分一次的子节点采用同样的准则进行划分。对于点云数据, 可以直接以点云坐标轴方向  $x$ 、 $y$  和  $z$  划分顺序进行划分。采用方差最大的超平面划分方法构建 KD 索引, 具体步骤为:

Step 1: 依次求取  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向上的方差, 分别记为  $x\text{-var}$ ,  $y\text{-var}$ ,  $z\text{-var}$ , 求取其中最大值, 记为  $\max\text{-var}=\{\max(x\text{-var}, y\text{-var}, z\text{-var})\}$ ;

Step 2: 以  $\max\text{-var}$  对应的坐标轴为参考指标, 记为  $\max\text{-coord}$ , 对整个数据进行排序, 选择排序后的中位数作为父节点, 以经过父节点垂直于  $\max\text{-coord}$  的超平面平分空间, 如果判断大于中位数的数据作为左子节点, 小于中位数的数据作为右子节点;

Step 3: 分别对左右子节点重复 Step1 和 Step2 迭代操作, 直到索引的数据都被划分完成。

按上述步骤可构建点云数据的 KD 树索引。

#### 1.1.2 基于 KD 树索引的搜索

KD 树索引在搜索方面具有优势, 能够加快搜索速度, 而在插入和删除方面较为繁琐。本文仅仅涉及到点的搜索, 因此能充分发挥 KD 树索引在搜索方面的优势。KD 树的搜索以先序递归的形式遍历二叉树, 判断二叉树节点  $\text{node}$  的分割边界(超平面)与待搜索点所形成的搜索圆是否相交, 如果相交则计算待搜索点与节点的距离, 与搜索范围进行对比, 判断节点是否满足搜索条件, 如果满足将该

节点返回，添加到结果链表 L 中，递归查找左子节点和右子节点。定义查找函数 FindAroundPoints，它是根据距离和待查找位置返回查找结果，

FindAroundPoints 的伪代码如下：

KD 树查找算法的伪代码

FindAroundPoints (node, s, p)

输入：KD 树根节点 node，搜索范围 s，待查找位置 p

输出：搜索到的点链表 L

计算 p 到节点 node 的分割边界(超平面)的距离 dist;

IF dist < s

    计算 p 点到 node 的距离  $d_{node}$ ;

    IF  $d_{node} < s$

        将节点 node 加入到链表 L;

    END

END

% node->left 表示为左子节点，node->right 为右子节点

IF node->left 且 node->right 均为空

    返回链表 L;

END

IF node->left 存在

    L= FindAroundPoints (node->left, s, p);

END

IF node->right 存在

    L= FindAroundPoints (node->right, s, p);

END

### 1.2 CSRBF 的隐式曲面模型

在对点云数据建立 KD 树引的基础上，构建点云数据的 CSRBF 隐式曲面模型，其表达式为<sup>[7]</sup>：

$$f(x_k) = \sum_{i=1}^n c_i \phi(\|x_k - x_i\|_2) + p(x_i) \quad (1)$$

其中  $p(x)$  为低次多项式，表达式为：

$$p(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 y + \lambda_4 z \quad (2)$$

使其满足附加条件：

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i = 0 \quad (3)$$

将式(1)展开的表达式为：

$$\begin{bmatrix} \phi(\|x_1 - x_1\|_2) & \cdots & \phi(\|x_1 - x_n\|_2) & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi(\|x_n - x_1\|_2) & \cdots & \vdots & 1 & x_n & y_n & z_n \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & \cdots & x_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & \cdots & z_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中  $x$  为点云数据的三维坐标  $x=(x, y, z)$ ，由于构建的是隐式曲面的零等值面，因此点云数据所对应的属性值  $f$  的值为 0， $[c_1, \dots, c_n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]^T$  为 CSRBF 隐式曲面模型权重系数， $\phi(\|\cdot\|_2)$  为 CSRBF 基函数表达式，几种常见的 CSRBF 基函数如表 1 所示。

表 1 几种常见的 CSRBF 表达式<sup>[8]</sup>

CSRBF	正定、连续性
$\phi_{3,0} = (1-r)_+^2$	$C^0$
$\phi_{3,1} = (1-r)_+^4(4r+1)$	$C^2$
$\phi_{3,2} = (1-r)_+^6(35r^2+18r+3)$	$C^4$

其中， $\phi_{d,k} \in PD_d \cap C^{2k}$ ， $PD_d$  表示在  $d$  维空间中基函数的正定性， $C^{2k}$  表示基函数的连续性。 $(1-r)_+$  定义为：

$$(1-r)_+ = \begin{cases} (1-r), & \text{if } 0 \leq r \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

记  $\alpha$  为紧支撑半径，需要对  $\alpha$  进行拉伸，记  $d_{ik} = \|x_i - x_k\|_2$  为二点之间的距离，则  $r = d_{ik} / \alpha$ 。 $\alpha$  的取值尤为关键，如果  $\alpha$  取值太小，影响 CSRBF 的插值精度， $\alpha$  取值过大，系数矩阵会出现非稀疏或者病态等不稳定性缺点，因为点云数据密度较大，因此本文选取点集最大距离的 0.2 倍作为紧支撑半径。在求解 CSRBF 隐式曲面模型时，通过增加约束点避免权值系数出现平凡解。约束点是沿着点云数据单位法向量的正方向或反方向偏移极小量(通常取 0.001 或 0.0001 倍的单位法向量)作为约束点

坐标, 对应的属性值为 0.001 或 0.0001。将点云数据和约束点代入 CSRBF 隐式曲面模型, 求解系数矩阵的逆, 其权值系数即为隐式曲面表达式。

### 1.3 MC 算法

在隐式曲面基础上抽取等值面进行可视化表达, 等值面的提取采用 MC 算法。

MC 算法是由 Lorenson 等人在 1987 年提出的三维经典等值面提取方法<sup>[9]</sup>。该方法以规则六面体为基本处理单元, 六面体包含 8 个顶点, 给定所要抽取隐式曲面等值面的值(本文为 0), 每个顶点属性值分为 2 种状态, 即大于或等于等值面的值, 状态记为 1, 小于等值面的值, 状态记为 0。六面体共有 8 个顶点, 则六面体共有 28~256 种状态, 由于六面体具有旋转对称性, 最终可将 256 种状态简化为 15 种状态<sup>[10]</sup>, 如图 1 所示。对于六面体任何一条边, 如果连接边的 2 个顶点属性值中的一个大于等值面的值而另一个小于等值面的值, 则该边一定存在等值面的顶点, 根据边的 2 个顶点可以求出等值面的顶点, 图 1 阴影面是 15 种状态下的等值面顶点组成的三角形网格, 其中黑色的点为大于等值面的值。

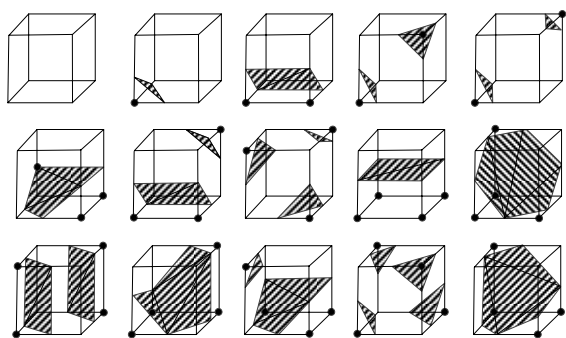


图 1 15 种状态下等值面的绘制<sup>[11]</sup>

求取点云数据最小外包矩形 (Minimum Bounding Rectangle, MBR), 分别沿着  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向将 MBR 进行剖分可得若干个六面体, 通过 1.2 中的 CSRBF 隐式曲面模型插值计算六面体八个顶点的属性值, 每个六面体根据 MC 方法可映射出不同状态下的等值面。

## 2 基于 KD 树索引的 CSRBF 点云建模与可视化方法

为了避免在建模及可视化中因穷举搜索导致计算机内存溢出, 采用 KD 树索引结合 CSRBF 曲面模型对点云进行建模与可视化表达, 其步骤为:

(1) 首先建立点云的 KD 树索引及设置 CSRBF 的紧支撑半径;

(2) 将 CSRBF 系数矩阵分为紧支撑半径范围内和紧支撑半径范围外的 CSRBF 函数值, 结合紧支撑半径和 KD 树搜索策略确定紧支撑半径范围内和紧支撑半径范围外的点, 对于采用紧支撑半径范围内的点直接用 CSRBF 计算函数值, 而对于紧支撑半径范围外的 CSRBF 函数值直接赋值为 0;

(3) 根据步骤 2 构建的 CSRBF 系数矩阵(其矩阵呈现稀疏带状分布)并对矩阵进行求逆操作, 得到了权值系数也就构建了点云数据的隐式曲面;

(4) 构建点云的 MBR, 对 MBR 进行离散化剖分, 将剖分后若干个立方体构成立方体集  $V$ , 将剖分后的点作构成插值点集  $S$ ;

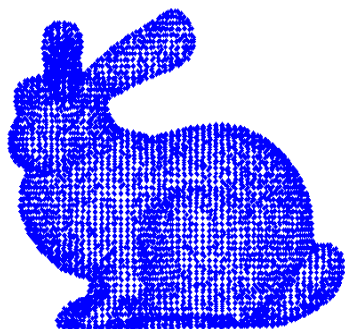
(5) 从点集  $S$  中取插值点, 结合 KD 树和紧支撑半径, 计算插值点与点云数据的 CSRBF 插值矩阵, 根据步骤(3)中的权值系数和 CSRBF 插值矩阵线性组合求出插值点的属性值, 直到点集  $S$  为空;

(6) 根据 MC 算法, 从集合  $V$  和  $S$  中抽取零等值面连接成三角网, 即为 CSRBF 的点云数据模型的可视化表达。

## 3 实验验证

为了验证基于 KD 树索引下的 CSRBF 建模与可视化方法的可行性。实验平台软件采用 Matlab2012b, 计算机处理器为 Inter Core Duo 2.10GHz, 内存为 2G。选取斯坦福大学提供的兔子点云数据进行实验, 其中点云数据个数为 8 171, CSRBF 基函数为  $\phi_{3,1}$ , 因为抽取零等值面, 所以给定等值面的值为 0。在 MC 算法中, 对点云的 MBR 采用的  $50*50*50$  的格网进行剖分, 则集合  $V$  共有

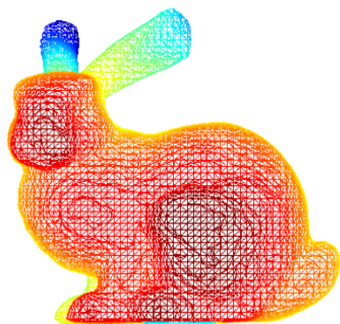
62 500 个六面体。图 2(a)为初始点云数据,图 2(b)为抽取零等值线的隐式曲面,图 2(c)为抽取零等值线的三角化表达。如果直接采用穷举搜索策略结合 CSRBF 隐式曲面建模会出现计算机内存溢出,最终导致建模失败,无法对点云数据的隐式曲面进行有效的表达,而本文结合 KD 树索引避免了建模失败且模型能够反映出物体的整体形态特征。



(a) 点云数据



(b) 抽取零等值线的隐式曲面模型



(c) 抽取零等值线的三角化

图 2 CSRBF 的隐式曲面建模与表达

## 4 结论

本文将 KD 树索引和 CSRBF 结合对点云数据进行了建模和表达,给出了该方法的建模流程,重点介绍了 KD 树索引的建立、CSRBF 的隐式曲面模型以及 MC 算法,采用点云数据验证了方法的可行性。本文仅仅关注了点云的建模方法,而在建模前可通过识别点云数据的特征点进行保形建模是后续开展的研究工作。

## 参考文献:

- [1] 方林聪,汪国昭. 基于径向基函数的曲面重建算法 [J]. 浙江大学学报(工学版), 2010, 44(4): 728-731.
- [2] 韩燮,武敬民,韩慧研,等. 基于椭球约束的径向基函数隐式曲面重建 [J]. 图学学报, 2014, 35(4): 504-510.
- [3] 段平,盛业华,张思阳,等. 顾及异向性的局部径向基函数三维空间插值 [J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2015, 40(5): 632-637.
- [4] 段平,盛业华,吕海洋,等. 基于多层紧支撑径向基函数的 DEM 插值方法 [J]. 地理与地理信息科学, 2014, 30(5): 38-41.
- [5] Robinson J T. The KDB-tree: a search structure for large multidimensional dynamic indexes [C]// Proceedings of the 1981 ACM SIGMOD international conference on Management of data. USA: ACM, 1981: 10-18.
- [6] 杨建思,刘华,林鹏. 基于 KD 树的点云数据自适应屏幕精度高效显示方法 [J]. 测绘通报, 2014, 43(7): 18-22.
- [7] 江永全. 径向基函数隐式曲面的研究及应用 [D]. 成都: 西南交通大学, 2011: 1-6.
- [8] Wendland H. Scattered data approximation [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2005.
- [9] Lorensen W E, Cline H E. Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm [C]// ACM Siggraph Computer Graphics. USA: ACM, 1987, 21(4): 163-169.
- [10] 邹艳红,何建春. 移动立方体算法的地质体三维空间形态模拟 [J]. 测绘学报, 2012, 41(6): 910-917.
- [11] 盛业华,刘平,袁林旺,等. 地学现象三维空间模拟-以点源烟气扩散为例 [J]. 地球信息科学学报, 2005, 7(3): 16-20.