

7-3-2020

## Harmony Gravitational Search Algorithm for Solving the Problem of Parameter Estimation for Fractional-order Chaotic Systems

Huang Yu

*Hebei Engineering Research Center of Simulation Optimized Control for Power Generation, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;*

Jiarong Wang

*Hebei Engineering Research Center of Simulation Optimized Control for Power Generation, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;*

Weiping Liang

*Hebei Engineering Research Center of Simulation Optimized Control for Power Generation, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

# Harmony Gravitational Search Algorithm for Solving the Problem of Parameter Estimation for Fractional-order Chaotic Systems

## Abstract

**Abstract:** Aiming at parameter estimation for fractional-order chaotic systems, a harmony gravitational search algorithm was proposed. *The particles, which were updated by gravitational search algorithm, were recreated and searched through memory selections and probability search in harmony search algorithm. At the same times, in order to solve the problem that the speed changed too fast when the particles closed to the optimal solution, the partial adjustment probability was set to non-linearly decrease with the adsorption capacity increasing.* Standard test functions were used to test the algorithm, and the test results show that the algorithm has good stability and global search capability. At last, the harmony gravitational search algorithm is applied in the parameter estimation for fractional-order Rössler system and fractional-order Lorenz system, and the estimation results show that the algorithm is effective and robust.

## Keywords

fractional-order chaotic systems, parameter estimation, gravitational search algorithm, harmony search

## Recommended Citation

Huang Yu, Wang Jiarong, Liang Weiping. Harmony Gravitational Search Algorithm for Solving the Problem of Parameter Estimation for Fractional-order Chaotic Systems[J]. Journal of System Simulation, 2016, 28(5): 1045-1053.

## 求解分数阶混沌系统参数估计问题的和声引力搜索算法

黄宇, 王佳荣, 梁伟平

(华北电力大学 河北省发电过程仿真与优化控制工程技术研究中心, 保定 071003)

**摘要:** 针对分数阶混沌系统的参数估计问题, 提出了一种和声引力搜索算法。通过和声搜索算法中的记忆选择与概率搜索对引力搜索算法更新后的粒子进行再创作与调整。为解决粒子接近最优解时出现速度变化过快的问题, 提出将和声搜索算法中的局部调整概率值设置为随算法迭代次数增加而非线性减小。采用标准测试函数对该算法进行了测试, 测试结果表明本文算法具有良好的稳定性和全局搜索能力。将该算法应用于分数阶 Rössler 混沌系统与分数阶 Lorenz 混沌系统的参数估计, 计算结果表明了本算法的有效性和鲁棒性。

**关键词:** 分数阶混沌系统; 参数估计; 引力搜索算法; 和声搜索

中图分类号: TP273

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2016) 05-1045-09

## Harmony Gravitational Search Algorithm for Solving the Problem of Parameter Estimation for Fractional-order Chaotic Systems

Huang Yu, Wang Jiarong, Liang Weiping

(Hebei Engineering Research Center of Simulation & Optimized Control for Power Generation,  
North China Electric Power University, Baoding 071003, China)

**Abstract:** Aiming at parameter estimation for fractional-order chaotic systems, a harmony gravitational search algorithm was proposed. *The particles, which were updated by gravitational search algorithm, were recreated and searched through memory selections and probability search in harmony search algorithm. At the same times, in order to solve the problem that the speed changed too fast when the particles closed to the optimal solution, the partial adjustment probability was set to non-linearly decrease with the adsorption capacity increasing.* Standard test functions were used to test the algorithm, and the test results show that the algorithm has good stability and global search capability. At last, the harmony gravitational search algorithm is applied in the parameter estimation for fractional-order Rössler system and fractional-order Lorenz system, and the estimation results show that the algorithm is effective and robust.

**Keywords:** fractional-order chaotic systems; parameter estimation; gravitational search algorithm; harmony search

### 引言

在对混沌系统进行分析和研究的过程中, 不断

有学者发现: 整数阶混沌系统在当阶数变为分数时仍会出现混沌现象<sup>[1]</sup>。近年来, 分数阶混沌系统的控制与同步引起了学者广泛的关注<sup>[2-4]</sup>。对分数阶混沌系统控制与同步的研究往往需要研究对象具有精确的参数值, 因此根据可测数据对分数阶混沌系统进行参数估计是非常必要的, 具有十分重要的研究意义。

目前已经有许多针对整数阶混沌系统的参数



收稿日期: 2014-12-30 修回日期: 2015-04-23;  
基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金 (2015MS66);  
作者简介: 黄宇(1982-), 男, 江苏沐阳, 博士, 讲师, 研究方向为热工系统辨识与控制; 王佳荣(1988-), 女, 河北保定, 硕士生, 研究方向为热工控制系统结构及参数优化。

<http://www.china-simulation.com>

• 1045 •

估计方法, 主要包括混沌引力搜索算法<sup>[5]</sup>、量子遗传算法<sup>[6]</sup>、混沌蚁群优化算法<sup>[7]</sup>、变分法<sup>[8]</sup>和布谷鸟搜索算法<sup>[9]</sup>等。但是由于分数阶混沌系统本身的复杂性且需辨识的参数较多, 其参数估计的难度相对较大。袁利国验证了粒子群优化算法在分数阶混沌系统参数辨识中的有效性<sup>[10]</sup>。朱武采用一种改进的差分演化算法研究分数阶混沌系统在确定性环境下的未知阶次和参数的估计问题<sup>[11]</sup>。总体而言, 针对分数阶混沌系统参数估计的研究处于起步阶段, 是目前研究的难点和重点。

引力搜索算法(gravitational search algorithm, GSA)是最近提出的一种智能进化算法<sup>[12]</sup>。不同于原有进化算法, 引力搜索算法原理简单且易于实现, 具有较强的搜索能力。目前, GSA 已在电力负荷预测<sup>[13]</sup>、物流服务<sup>[14]</sup>、参数整定<sup>[15]</sup>等诸多领域得到了研究与应用。然而, GSA 在解决分数阶混沌系统参数估计问题上至今仍少有研究。本文针对 GSA 存在容易陷入局部最优的问题, 结合和声搜索算法中的随机生成机制, 提出了和声引力搜索算法(harmony gravitational search algorithm, HGSA), 用以解决分数阶混沌系统的参数估计问题。通过对每代 GSA 计算更新后的粒子进行再创作与调整, 有效地解决了 GSA 容易陷入局部最优的问题。通过仿真测试与算法比较, 验证了所提算法对分数阶混沌系统参数估计的有效性和鲁棒性。

## 1 研究背景描述

### 1.1 参数估计问题描述

一般情况下,  $n$  维分数阶混沌系统可以用以下公式描述<sup>[11]</sup>:

$$D^q X = G(X, X_0, \theta_0) \quad (1)$$

式中:  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$  表示原系统状态向量;  $X_0$  表示初始状态,  $\theta_0=(\theta_{01}, \theta_{02}, \dots, \theta_{0m})^T \in R^m$  表示系统原始参数向量;  $q=(q_1, q_2, \dots, q_n)^T \in R^n$  代表分数阶混沌系统的阶次。

若在原系统结构已知的情况下, 对(1)式中的未知参数进行估计, 则参数估计系统可定义如(2)式:

$$D^q Y = G(Y, X_0, \theta) \quad (2)$$

式中:  $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$  和  $\theta=(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T \in R^m$  分别为估计系统的状态向量和参数向量;  $X_0$  为系统的初始状态。系统的参数估计问题可以表述为求如(3)式所示目标函数的最小值问题。

$$J = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n e^2(k) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \|X_k - Y_k\|^2 \quad (3)$$

式中:  $M$  为用于参数估计所需状态变量的数据长度,  $X_k$  与  $Y_k(k=1, 2, \dots, M)$  分别为原始系统与待估计系统于  $k$  时刻的状态向量。在实际应用中, 可以选择原系统的输出和待估计系统的输出作为(3)式中的  $X_k$  与  $Y_k$ 。

式(3)是一个多维的连续优化问题, 且存在非凸、非光滑和不可微的特点。本文提出一种和声引力搜索算法用于求解分数阶混沌系统的参数估计问题。

### 1.2 引力搜索算法

引力搜索算法是 Rashedi 等人基于万有引力定律提出的, GSA 的原理示意图如图 1 所示<sup>[16]</sup>。其中, 每个粒子的位置对应于优化问题的一个候选解, 在解空间内由向量  $x$  表示。

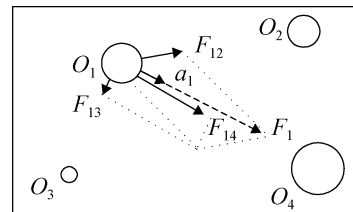


图 1 引力搜索算法原理示意图

在 GSA 中, 粒子的惯性质量  $M_i(t)$  是根据种群的适应度得出的。粒子  $i$  所受的总作用力  $F_i^d$  可以看作其它所有粒子对其作用力的随机加权和, 计算公式如(4)所示:

$$F_i^d = \sum_{j=1, j \neq i}^N \text{rand}() \times F_{ij}^d(t) \quad (4)$$

式中:  $F_{ij}^d$  表示  $d$  维空间中粒子  $j$  作用于粒子  $i$  的引力;  $\text{rand}()$  是一个随机数, 范围为  $[0, 1]$ 。

GSA 中速度和位置的更新运动方程分别如式(5)和式(6)所示。

$$v_i^d(t+1) = \text{rand}_i \times v_i^d(t) + a_i^d(t) \quad (5)$$

$$x_i^d(t+1) = x_i^d(t) + v_i^d(t+1) \quad (6)$$

标准的引力搜索算法流程如图 2 所示。

步骤1:初始化。明确搜索空间与参数取值,初始化种群数目、最大迭代次数、万有引力系数与粒子位置;  
步骤2:根据目标函数和设定范围求粒子的适应度函数值;  
步骤3:更新万有引力系数 $G(t)$ 和惯性质量 $M_i(t)$ ;  
步骤4:计算不同方向上的总作用力,计算粒子的速度和加速度;  
步骤5:利用式(5)和(6)更新粒子的速度和位置;  
步骤6:重复迭代以上步骤,直到达到最大迭代次数。

图 2 引力搜索算法流程

从公式(4)~(6)可以看出, GSA 中的粒子在向最优解运动时,其所受的万有引力值可能会增加,导致粒子在接近最优解时的速度可能会很大。当粒子越过最优解时,受力的方向突然改变,这可能会导致粒子在最优解附近反复来回震荡,从而令算法陷入局部最优。因此,需要对 GSA 算法进行改进。

### 1.3 和声搜索算法

和声搜索(Harmony Search, HS)算法<sup>[17]</sup>是 Geem 基于音乐家们为找到最完美的和声而不断调整音调的基础上提出的。主要操作有 3 种:记忆选择、局部调整和随机生成。

对于目标函数为  $\min(\text{or } \max)_x f(x)$  的  $N$  维函数优化问题,和声搜索算法通过在可行域内生成一组随机数来初始化<sup>[18]</sup>。可以用式(7)来表示:

$$x_i^j = x_i^L + \text{rand}() \times (x_i^H - x_i^L) \quad (7)$$

式中:  $1 \leq i \leq N, j=1, 2, \dots, HMS$  ( $HMS$  为可行域内随机数个数),  $x_i^H$  与  $x_i^L$  为变化量的搜索上下界。 $\text{rand}()$  为 0~1 均匀分布的随机数<sup>[19]</sup>。

和声搜索的即兴创作过程需要遵守 3 种规则<sup>[20]</sup>:

- 1) 根据和声记忆选择概率 HMCR 在和声记忆库中进行新和声的选择与创作;
- 2) 根据局部调整概率 PAR 调整所选择的和声;
- 3) 利用随机策略探寻新的音符。

根据(8)式产生新和声  $hm$ :

$$hm_i = \begin{cases} x_i^{\text{rand}}, & \text{rand}() < \text{HMCR} \\ x_i^L + \text{rand}() \times (x_i^H - x_i^L), & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $\text{rand}$  为 1 到  $HMS$  之间的随机整数。

经过记忆选择的和声,需要进一步进行音高调整,如式(9)所示:

$$hm_i = \begin{cases} hm_i \pm \text{rand}() \times bw, & \text{rand}() < \text{PAR} \\ hm_i, & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

式中:  $bw$  为调节带宽。若迭代得来的新和声优于记忆库中最差的和声,则应用(8)式将差和声取代,函数优化问题的目标函数是衡量和声好坏的唯一标准。

和声搜索算法能够充分利用记忆库中的元素,改进记忆库。但是,仅仅通过随机产生元素的方法,和声搜索往往很难产生有效元素,得不到有效的新和声。因此,需要对和声搜索算法进行改进。

## 2 和声引力搜索算法

在 GSA 中,粒子的运动遵循公式(4)~(6),其中公式(5)中粒子的加速度  $a$  是由粒子所受的合力和粒子质量共同决定的。因此,当粒子接近最优解时,由于万有引力的增大,其加速度值可能会变大,导致粒子在最优解附近来回反复震荡,使算法陷入局部最优。HS 算法通过公式(8)和公式(9)产生新速度,不同于 GSA,在 HS 算法中的速度是随机生成的,因此可以在一定程度上克服 GSA 中存在的震荡问题。为保证算法在初始搜索时具有较快的速度,同时防止在接近最优解时出现速度变化过快的现象。应使(9)式中的 PAR 值随算法迭代次数的增加而非线性的减小,故本文采用的调整策略如下

$$\text{PAR}(\text{popsize}) = \sqrt{\frac{1}{\text{popsize}}} \quad (10)$$

其中:  $\text{popsize}$  为粒子的进化代数。迭代刚开始时, PAR 较大,算法的搜索能力很强,能够获得较强的全局搜索能力; PAR 随着迭代的进行不断减小,局部搜索能力增强。

由此,本文将 HS 算法与 GSA 相结合,提出一种 HGSA。算法的流程类似于图 2 的 GSA 流程,而其中步骤 5 之后的操作步骤采用图 3 的流程。

步骤6: 将(6)式计算出的粒子位置作为HS算法的记忆库;  
步骤7: 利用公式(10)对PAR行动态调整, 根据式(8)和式(9)进行再创作与调整, 生成新和声;  
步骤8: 计算新和声的适应度, 如果新和声的适应度值优于当前粒子适应度的最差值, 则利用新和声替换当前最差粒子;  
步骤9: 如果终止条件满足, 则停止算法。否则, 转图2中的步骤3。

图 3 HGSA 算法中的后续步骤

### 3 HGSA 算法性能分析

#### 3.1 计算复杂度分析

算法的计算复杂度包括空间复杂度和时间复杂度。空间复杂度指一个算法计算所占用存储空间的度量, 本文算法与 GSA 算法最大的区别在于通过和声搜索算法中的记忆选择与概率搜索对引力搜索算法更新后的粒子进行再创作与调整, 的确增加了算法的空间复杂度, 但是增加的复杂度是线性阶的。所以, 在低维条件下, 对存储空间的增加并不多。

引入和声搜索算法后, 增加了根据式(8)和式(9)进行再创作与调整生成新和声的过程, 增加了  $O(t_{\max}nm)$  级的运算量, 但是由于最坏情况下的计算复杂度为  $O(t_{\max}n^2m)$ , 因此本文提出算法的复杂度仍然与 GSA 算法的复杂度相同。具体分析过程见图 4 所示, 其中,  $t_{\max}$  为最大迭代次数,  $n$  为问题的维数,  $m$  种群规模。

```
%初始化%
参数设置.....O(1)
种群初始化、速度初始化.....O(nm)
%寻优迭代过程%
For t=1:tmax.....O(tmax (m+nm+nm^2+1))→O(tmaxnm^2)
更新万有引力系数G.....O(1)
%计算个体质量%
边界约束检查及修正.....O(nm)
计算个体适应度值.....O(m)
计算个体质量.....O(m)
%计算个体之间的万有引力%
For i=1:m.....O(m(m-1)n)→O(nm^2)
For j=1:n.....O((m-1)n)
For k=1:m(k≠i).....O(m-1)
计算个体i与个体k之间的万有引力.....O(1)
End
End
End
%计算个体加速度%
计算每个个体每维上的加速度.....O(nm)
%计算个体速度%
更新各个个体下一时刻的速度.....O(nm)
更新个体位置.....O(nm)
%引入和声算法%
根据式(8)和式(9)进行再创作与调整, 生成新和声.....O(2nm)
计算新和声适应度.....O(nm)
End
```

图 4 HGSA 算法复杂度简要分析

#### 3.2 对比实验性能分析

为了证明所提出算法的有效性, 选择了 6 个标准基准测试函数, 这些函数已经被广泛的用于测试优化算法的性能<sup>[21]</sup>。本文采用测试函数的维度、变量的容许范围和最优值汇总如表 1 所示。

表 1 基准测试函数

测试函数	变量范围
$f_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$	$[-100, 100]^n$
$f_2(x) = \sum_{i=1}^n  x_i  + \prod_{i=1}^n  x_i $	$[-10, 10]^n$
$f_3(x) = \max\{ x_i , 1 \leq i \leq n\}$	$[-100, 100]^n$
$f_4(x) = \sum_{i=1}^n ( x_i + 0.5 )^2$	$[-100, 100]^n$
$f_5(x) = -20 \exp\left(-0.2 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(2\pi x_i)\right) + 20 + e$	$[-32, 32]^n$
$f_6(x) = \frac{\pi}{n} \left\{ 10 \sin(\pi y_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - 1)^2 \left[ 1 + 10 \sin^2(\pi y_{i+1}) \right] + \sum_{i=1}^n u(x_i, 10, 100, 4) \right\} + y_i = 1 + \frac{x_i + 1}{4}$	$[-50, 50]^n$
$u(x_i, a, k, m) = \begin{cases} k(x_i - a)^m & x_i > a \\ 0 & -a < x_i < a \\ k(-x_i - a)^m & x_i < -a \end{cases}$	

在表 1 中,  $n$  代表函数的维数。所示 6 个基准测试函数均是高维函数, 最优值为 0。 $f_1, f_2, f_3$  与  $f_4$  为单峰测试函数,  $f_5$  与  $f_6$  为多峰测试函数, 有多个最优值点。将本文算法与粒子群优化算法 (Particle Swarm Optimization, PSO)、HS 算法以及 GSA 相比较。在相同的给定条件下, 比较 4 种算法求最优解的能力, 最优解的平均值与理论值越接近, 表明算法求解的精度越高。

在以上所有算法中, 种群规模均设置为 50, 多维函数维数设为 30, 即  $n=30$ , 最大迭代次数为 1 000, 4 种算法对每个测试函数独立实验 30 次。测试结果如表 2 所示, 其中 PSO 算法与 GSA 的计算结果参见文献[12]。

表 2 4 种算法对 8 个测试函数的实验结果比较

函数	HS	PSO	GSA	HGSA	
$f_1$	最优值	$4.96 \times 10^2$	$1.80 \times 10^{-3}$	$7.3 \times 10^{-11}$	$2.99 \times 10^{-17}$
	中值	$4.97 \times 10^2$	$1.20 \times 10^{-3}$	$7.1 \times 10^{-11}$	$2.03 \times 10^{-17}$
	平均值	$3.11 \times 10^2$	$5.00 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-10}$	$2.86 \times 10^{-17}$
$f_2$	最优值	19.3655	2.0000	$4.03 \times 10^{-5}$	$1.03 \times 10^{-8}$
	中值	18.8798	$1.90 \times 10^{-3}$	$4.07 \times 10^{-5}$	$1.03 \times 10^{-8}$
	平均值	18.8788	2.000 0	$6.90 \times 10^{-5}$	$1.18 \times 10^{-8}$
$f_3$	最优值	54.7552	8.100 0	$3.70 \times 10^{-6}$	$1.31 \times 10^{-9}$
	中值	58.4740	7.400 0	$3.70 \times 10^{-6}$	$1.02 \times 10^{-9}$
	平均值	59.6218	23.600 0	$8.50 \times 10^{-6}$	$1.12 \times 10^{-9}$
$f_4$	最优值	$6.10 \times 10^{+2}$	$1.00 \times 10^{-3}$	$8.30 \times 10^{-11}$	0
	中值	$6.77 \times 10^{+2}$	$6.60 \times 10^{-3}$	$7.70 \times 10^{-11}$	0
	平均值	$5.25 \times 10^{+2}$	0.0200	$2.60 \times 10^{-10}$	0
$f_5$	最优值	15.423 3	$9.00 \times 10^{-3}$	$6.90 \times 10^{-6}$	$3.52 \times 10^{-9}$
	中值	14.682 1	$6.00 \times 10^{-3}$	$6.90 \times 10^{-6}$	$3.65 \times 10^{-9}$
	平均值	15.995 5	0.020 0	$1.10 \times 10^{-6}$	$3.31 \times 10^{-9}$
$f_6$	最优值	16.051 1	0.290 0	0.0100	$1.42 \times 10^{-19}$
	中值	21.520 1	0.110 0	$4.20 \times 10^{-13}$	$1.45 \times 10^{-19}$
	平均值	32.330 7	$9.30 \times 10^{+3}$	0.010 0	$2.06 \times 10^{-19}$

从表 2 中函数的优化结果可以看出, 本文提出的 HGSA, 在寻优精度上均优于 PSO 算法、GSA 和 HS 算法, 表明了本文算法的具有较强的稳定性和全局搜索能力, 为 HGSA 应用于混沌系统的参数估计奠定了良好的算法基础。

#### 4 HGSA 算法用于求解分数阶混沌系统参数估计问题的性能测试

为了验证本文提出的 HGSA 对分数阶混沌系统参数估计的有效性和鲁棒性, 利用 HGSA 分别对分数阶 Rössler 混沌系统和分数阶 Lorenz 混沌系统进行参数估计, 具体过程如下。

##### 4.1 利用 HGSA 对分数阶 Rössler 混沌系统的参数估计

分数阶 Rössler 系统混沌系统的动态特性可由下面常微分方程组来描述<sup>[22]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = -(y + z) \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = x + \delta y \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = \gamma + z(x - b) \end{cases} \quad (11)$$

式(11)中  $x, y, z$  为系统的状态变量, 参数  $\delta, \gamma$  和  $b$  为混沌系统的相关系数,  $q_1, q_2, q_3$  为分数阶阶次。在数值仿真的过程中, 选取  $\delta, \gamma$  和  $b$  的值为 0.2, 0.2 和 5.7。

采用四阶龙格库塔算法求解上述方程(取步长  $h=0.01$ )。仿真过程中, 先让 Rössler 系统自由演化, 在经历暂态过程之后任意选取一点作为系统初值, 并以此为零时刻, 分别在参数的真实值和估计值下计算连续  $M$  个状态变量值(取  $M=300$ )。

为了验证算法的有效性和鲁棒性, 分别对整数阶 Rössler 混沌系统、分数阶 Rössler 混沌系统以及在噪声扰动下的分数阶 Rössler 混沌系统进行参数估计, 过程如下:

(1) 当  $q_1 = q_2 = q_3 = 1$  时, 系统演化为整数阶混沌系统, 利用本文提出的和声引力搜索算法对系统的 3 个参数进行辨识, 最大迭代次数为 100, 种群规模设为 50。将 HGSA 独立运行 30 次, 得到平均结果、最好结果和最差结果, 并与 GSA 和 HS 算法的估计结果进行比较, 统计信息总结如表 3 所示。

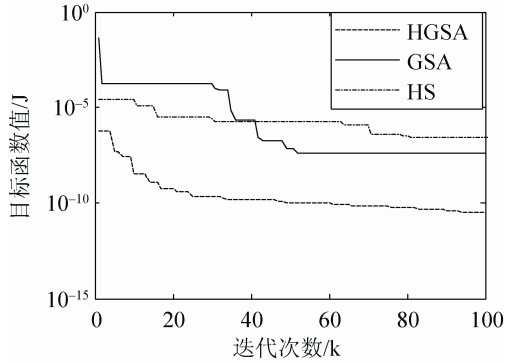
表 3 各算法参数估计结果比较

算法	$\delta$	$\gamma$	$b$	$J$
最优结果 HS	0.200 0	0.190 3	5.698 6	$3.20 \times 10^{-7}$
GSA	0.199 9	0.197 5	5.699 6	$2.20 \times 10^{-8}$
HGSA	0.200 0	0.200 0	5.700 0	$1.49 \times 10^{-11}$
平均结果 HS	0.201 4	0.182 8	5.699 5	$9.02 \times 10^{-6}$
GSA	0.196 5	0.226 3	5.698 6	$1.69 \times 10^{-7}$
HGSA	0.200 3	0.197 7	5.693 1	$1.49 \times 10^{-10}$
最差结果 HS	0.195 7	0.246 2	5.920 0	$3.24 \times 10^{-6}$
GSA	0.199 9	0.194 5	5.699 2	$1.03 \times 10^{-7}$
HGSA	0.200 4	0.196 4	5.688 5	$1.61 \times 10^{-9}$

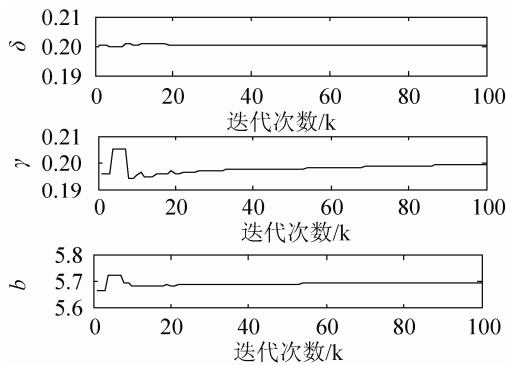
从表 3 中可以看出, HGSA 的估计结果与系统的真实值非常接近, 与 GSA 和 HS 算法相比, 有明显的优势。图 5 给出了 HGSA, GSA 与 HS 算法的目标函数进化曲线对比图和 HGSA 参数值估计进化曲线。

从图 5 可以看出, 相比于基本 GSA 和 HS 算法, HGSA 的适应度函数值收敛速度更快, 迅速减

小到  $10^{-10}$  数量级, 且 3 个待测参数能很快收敛到接近真实值。这说明本算法具有很好的全局搜索能力。



(a) 系统目标函数进化曲线



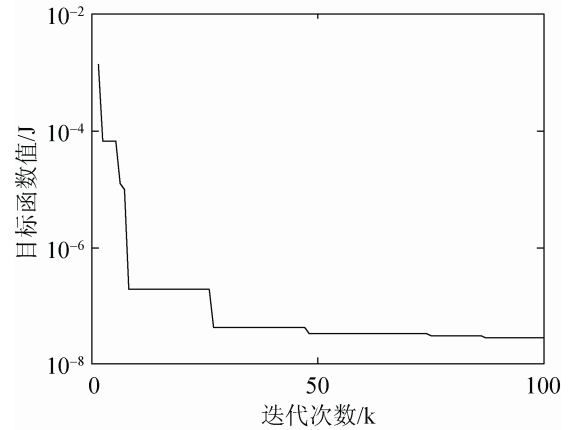
(b) 参数值估计进化曲线

图 5 整数阶 Rössler 系统目标函数进化曲线与参数值估计进化曲线

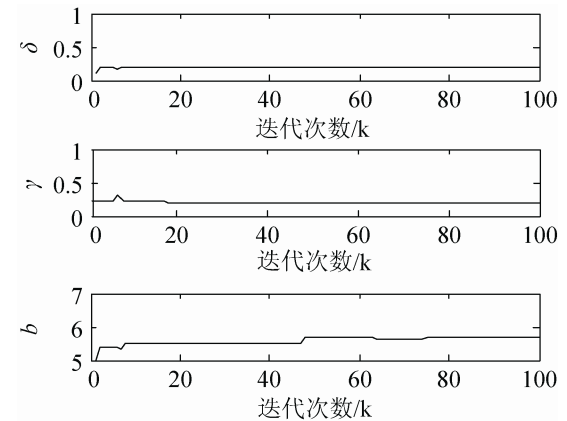
(2) 当  $q_1=0.9$ ,  $q_2=0.85$ ,  $q_3=0.95$  时, 原混沌系统演化为分数阶混沌系统。表 4 给出了参数估计结果, 图 6 给出了目标函数和估计参数的收敛过程。从结果中可以得到: 本文提出的算法完全适用于分数阶 Rössler 系统的参数估计, 并且具有良好的估计性能。

表 4 分数阶 Rössler 系统参数估计结果

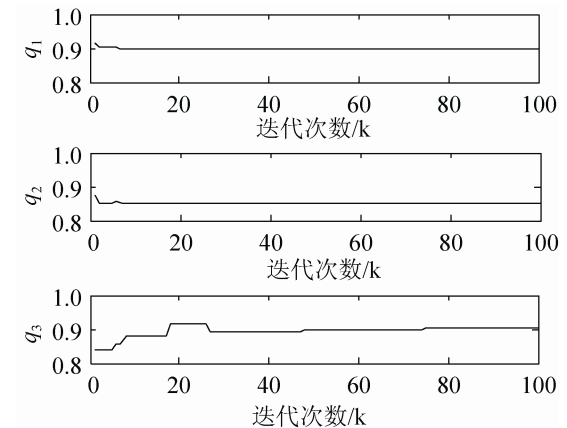
估计结果	$\delta$	$\gamma$	$b$	$q_1$
最优结果	0.208 7	0.205 2	5.706 6	0.900 0
平均结果	0.195 9	0.192 2	5.747 3	0.900 4
最差结果	0.199 8	0.207 3	5.569 0	0.899 4
估计结果	$q_2$	$q_3$	$J$	
最优结果	0.848 2	0.944 7	$3.71 \times 10^{-9}$	
平均结果	0.851 8	0.954 6	$1.31 \times 10^{-8}$	
最差结果	0.849 8	0.925 3	$1.46 \times 10^{-8}$	



(a) 系统目标函数进化曲线



(b) 分数阶混沌系统系数进化曲线



(c) 分数阶混沌系统阶次进化曲线

图 6 分数阶 Rössler 系统目标函数与参数值估计进化曲线

(3) 为了进一步检验算法的搜索能力, 考虑到实际情况中可能存在噪声干扰, 采用如式(12)所示的含噪声的 Rössler 系统的状态方程。其中  $\zeta_i (i=1,2,3)$  为范围  $[-0.1, 0.1]$  的白噪声, 同时维持运行环境和计算参数不变。



$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = -(y+z) + \zeta_1 \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = x + \delta y + \zeta_2 \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = \gamma + z(x-b) + \zeta_3 \end{cases} \quad (12)$$

表 5 给出了含噪声情况下利用 HGSA 进行参数估计的结果, 图 7 为适应度函数值和参数估计的收敛过程。从结果中可以看出, 在有噪声的情况下, 算法依然表现出较好的参数估计性能, 说明本算法具有良好的鲁棒性。

### 4.2 利用 HGSA 对分数阶 Lorenz 混沌系统的参数估计

为了验证算法对不同对象的适应能力, 选取分数阶 Lorenz 混沌系统进行参数估计, 其动态特性可以由下面的常微分方程组来描述<sup>[23]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = \delta(y-x) \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = \gamma x - xz - y \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = xy - bz \end{cases} \quad (13)$$

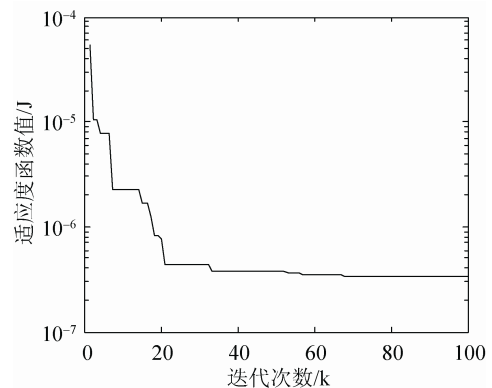
式(13)中  $x, y, z$  为系统的状态变量, 参数  $\delta$  和  $b$  分别取 10.0, 8/3,  $\gamma$  为混沌控制参数, 取 28.0。  $q_1, q_2, q_3$  为分数阶阶次, 且  $q_1=q_2=q_3=0.993$ 。将系统状态变量  $x, y, z$  叠加范围是[-0.1, 0.1]的白噪声, 并采用四阶龙格-库塔法进行仿真数值求解。仿真过程中, 先让分数阶 Lorenz 混沌系统自由演化, 在经历暂态过程之后任意选取一点作为系统初值, 并以此为零时刻, 分别在参数的真实值和估计值下计算连续 M 个状态变量值(取 M=300)。

利用 HGSA 对分数阶 Lorenz 混沌系统进行参数估计, HGSA 的参数设置与上节相同。将 HGSA 算法独立运行 30 次, 统计计算结果如表 6 所示。

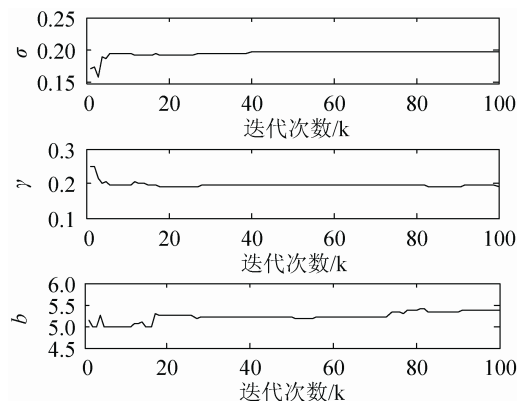
表 6 给出了含噪声情况下利用 HGSA 对分数阶 Lorenz 混沌系统进行参数估计的计算结果, 图 8 为对应的适应度函数值和参数收敛过程。从表 6 和图 8 所示的结果可以看出, HGSA 算法依然较好的参数估计性能, 说明本算法具有良好的鲁棒性。

表 5 噪声条件下分数阶 Rössler 系统参数估计结果

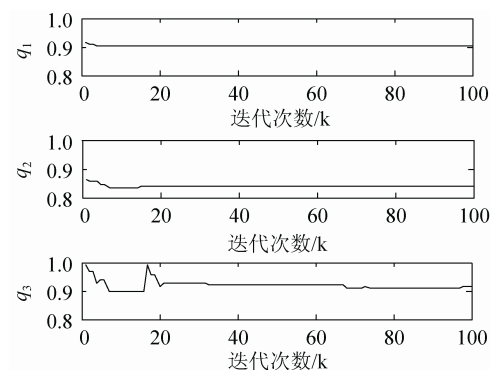
估计结果	$\delta$	$\gamma$	$b$	$q_1$
最优结果	0.200 4	0.183 1	5.587 4	0.9001
平均结果	0.264 4	0.107 1	5.795 9	0.901 0
最差结果	0.224 5	0.105 0	5.790 3	0.903 4
估计结果	$q_2$	$q_3$	$J$	
最优结果	0.850 4	0.934 1	$1.23 \times 10^{-8}$	
平均结果	0.841 5	0.914 8	$3.73 \times 10^{-7}$	
最差结果	0.848 4	0.903 2	$7.60 \times 10^{-7}$	



(a) 系统目标函数进化曲线



(b) 分数阶混沌系统系数进化曲线



(c) 分数阶混沌系统阶次进化曲线

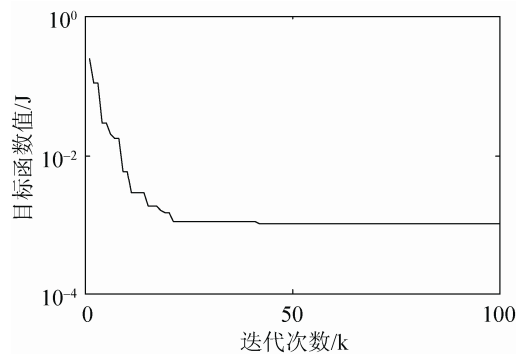
图 7 噪声条件下分数阶 Rössler 系统目标函数与参数值估计进化曲线

表 6 噪声条件下分数阶 Lorenz 系统参数估计结果

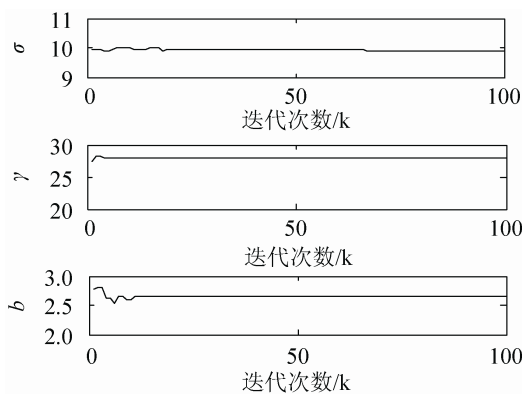
估计结果	$\delta$	$\gamma$	$b$	$q_1$
最优结果	10.020 6	28.338 0	2.609 5	0.989 3
平均结果	9.935 2	27.978 3	2.656 6	0.998 0
最差结果	9.795 0	28.487 9	2.611 4	0.985 9

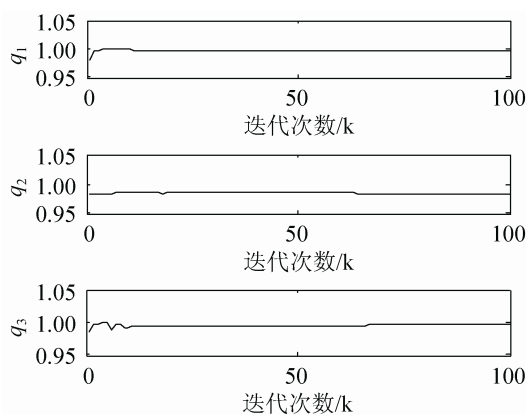
估计结果	$q_2$	$q_3$	$J$
最优结果	0.996 5	0.986 1	$1.72 \times 10^{-4}$
平均结果	0.983 6	0.996 2	$6.31 \times 10^{-4}$
最差结果	0.993 6	0.988 6	$6.74 \times 10^{-4}$



(a) 系统目标函数进化曲线



(b) 分数阶混沌系统系数进化曲线



(c) 分数阶混沌系统阶次进化曲线

图 8 噪声条件下分数阶 Lorenz 系统目标函数与参数值估计进化曲线

## 5 结论

本文提出了一种和声引力搜索算法,用以解决分数阶混沌系统的未知参数估计。该算法针对 GSA 算法容易陷入局部最优的缺点,引入和声搜索算法,对 GSA 更新后的粒子进行再创作与调整,有效的避免了 GSA 算法陷入局部最优的缺点,提高了算法的稳定性和全局搜索能力。同时将和声搜索算法中的局部调整概率值随算法迭代次数的增加而非线性的减小,用以解决粒子在接近最优解时出现速度变化过快的问题。为了说明本文所提算法的有效性,首先利用标准测试函数对该算法进行了测试,然后将其应用于分数阶 Rössler 混沌系统和分数阶 Lorenz 混沌系统的未知参数估计。结果表明, HGSA 对标准测试函数具有良好的全局寻优能力;在对分数阶混沌系统的未知参数估计中,无论是无噪声还是含有白噪声,本文算法的计算结果与参数的真实值都非常接近,表明了本算法的有效性和鲁棒性。

## 参考文献:

- [1] 李安平, 刘国荣, 沈细群. 不确定混沌系统用分数阶系统同步与参数辨识 [J]. 计算机仿真, 2012, 29(9): 191-194.
- [2] Gandomi A H, Yun G J, Yang X S, et al. Chaos-enhanced accelerated particle swarm optimization [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (S1007-5704), 2013, 18(2): 327-340.
- [3] 黄丽莲, 辛方, 王霖郁. 新分数阶混沌系统的异结构同步及其电路仿真 [J]. 系统仿真学报, 2012, 24(7): 1479-1484.
- [4] 孙克辉, 杨静利, 丘水生. 分数阶混沌系统的仿真方法研究 [J]. 系统仿真学报, 2011, 23(11): 2361-2365.
- [5] Li C, Zhou J, Xiao J, et al. Parameters identification of chaotic system by chaotic gravitational search algorithm [J]. Chaos, Solitons & Fractals (S0960-0779), 2012, 45(4): 539-547.
- [6] 张宏立, 宋莉莉. 基于量子粒子群算法的混沌系统参数辨识 [J]. 物理学报, 2013, 19(62): 106-111.
- [7] 李丽香, 彭海朋, 杨义先, 等. 基于混沌蚂蚁群算法的 Lorenz 混沌系统的参数估计 [J]. 物理学报, 2007, 56(1): 51-55.
- [8] 曹小群, 宋君强, 张卫民, 等. 基于变分方法的混沌系统参数估计 [J]. 物理学报, 2011, 60(7): 129-136.

- [9] Li X T, Yin M H. Parameter estimation for chaotic systems using the cuckoo search algorithm with an orthogonal learning method [J]. Chinese Physics B (S1674-1056), 2012, 21(5): 0505071-050576.
- [10] Yuan L G, Yang Q G. Parameter identification and synchronization of fractional-order chaotic systems [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (S1007-5704), 2012, 17(1): 305-316.
- [11] Zhu W, Fang J-a, Tang Y, et al. Identification of fractional-order systems via a switching differential evolution subject to noise perturbations [J]. Phys ics Letters A (S0375-9601), 2012, 376(45): 3113-3120.
- [22] Rashedi E, Nezamabadi-Pour H, Saryazdi S. GSA: a gravitational search algorithm [J]. Information Sciences (S0020-0255), 2009, 179(2009): 2232-2248.
- [13] Mondal S, Bhattacharya A, Nee Dey S H. Multi-objective economic emission load dispatch solution using gravitational search algorithm and considering wind power penetration [J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems (S0142-0615), 2013, 44(1): 282-292.
- [14] Pal K, Saha C, Das S, et al. Dynamic constrained optimization with offspring repair based gravitational search algorithm [C]// Evolutionary Computation (CEC), 2013 IEEE Congress on. USA: IEEE, 2013: 2414-2421.
- [15] Duman S, Maden D, Guvenc U. Determination of the PID controller parameters for speed and position control of DC motor using gravitational search algorithm [C]// Electrical and Electronics Engineering (ELECO), 2011 7th International Conference on. USA: IEEE, 2011: I-225-I-229
- [16] 戢钢, 王景成, 葛阳, 等. 城市小时级需水量的改进型引力搜索算法-最小二乘支持向量机模型预测 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(10): 1377-1382.
- [17] Geem Z W. Improved harmony search from ensemble of music players [C]// Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems. Germany: Springer, Berlin Heidelberg, 2006: 86-93.
- [18] 任子武, 王振华, 孙立宁. 全局和声搜索方法及其在仿人灵巧臂逆运动学求解中的应用 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(7): 867-876.
- [19] 李若平, 欧阳海滨, 高立群, 等. 学习型和声搜索算法及其在 0-1 背包问题中的应用 [J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 205-210.
- [20] 欧阳海滨, 高立群, 邹德旋, 等. 和声搜索算法探索能力研究及其修正 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(1): 57-65.
- [21] 徐遥, 王士同. 引力搜索算法的改进 [J]. 计算机工程与应用, 2012, 47(35): 188-192.
- [22] 林剑, 许力. 基于混合生物地理优化的混沌系统参数估计 [J]. 物理学报, 2013, 62(3): 0305051-0305057.
- [23] Li C, Yan J. The synchronization of three fractional differential systems [J]. Chaos, Solitons & Fractals (S0960-0779), 2007, 32(2): 751-757.