Journal of System Simulation

Volume 28 | Issue 5 Article 10

7-3-2020

Optimal Linear Moment Estimation Method for Gumbel Distribution

Yumei Zhai
1. Beijing Institute of Applied Meteorology, Beijing 100029, China;;

Ruixing Zhao
2. Unit 61741 of PLA, Beijing 100094, China;

Abstract

Abstract: Linear moment is one of the important methods to estimate the extreme value distribution function in engineering practice. In order to improve the estimation performance for Gumbel distribution, the estimating results of twelve empirical distribution functions were simulated by using Monte Carlo method. The optimal linear moment estimation method was constructed based on the empirical distribution function with the minimum estimation error, and compared with ordinary moment, traditional linear moment and maximum likelihood method. The study shows that *choosing an appropriate empirical distribution function can enhance the estimation accuracy. The optimal empirical distribution function varies depending on the sample size*, *and its result is quite satisfactory in most cases* and offers the best among the other methods especially in the sample size of 1 000~10 000.

Keywords

Gumbel distribution, Monte Carlo simulation, empirical distribution function, optimal linear moment, sample size

第 28 卷第 5 期 系统仿真学报© Vol. 28 No. 5
2016 年 5 月 Journal of System Simulation May, 2016

耿贝尔分布的最优线性矩估计

翟宇梅[1]，赵瑞星[2]
(1. 北京应用气象研究所，北京 100029；2. 中国人民解放军 61741 部队，北京 100094)

摘要：线性矩法是工程实践中极值分布函数参数估计常用方法之一。为提高线性矩法对耿贝尔分布的估计精度，通过蒙特卡罗模拟比较研究了 12 种常用经验分布函数的估计结果，选用估计误差最小的经验分布函数构造最优线性矩估计法，并与普通矩法、线性矩法和极大似然函数法进行了比较。仿真结果表明，*选择合适的经验分布函数可以提高参数估计精度*；*样本容量不同，最优经验分布函数不同*；*多数情况下最优线性矩法估计精度较高*，特别是在样本容量为 1 000~10 000 时，其估计结果均好于普通矩法、线性矩法和极大似然函数法。

关键词：耿贝尔分布；蒙特卡罗模拟；经验分布函数；最优线性矩；样本容量
中图分类号：TP301.6 文献标识码：A 文章编号：1004-731X (2016) 05-1070-07

Optimal Linear Moment Estimation Method for Gumbel Distribution

Zhai Yumei[1], *Zhao Ruixing*[2]
(1. Beijing Institute of Applied Meteorology, Beijing 100029, China; 2. Unit 61741 of PLA, Beijing 100094, China)

Abstract: Linear moment is one of the important methods to estimate the extreme value distribution function in engineering practice. In order to improve the estimation performance for Gumbel distribution, the estimating results of twelve empirical distribution functions were simulated by using Monte Carlo method. The optimal linear moment estimation method was constructed based on the empirical distribution function with the minimum estimation error, and compared with ordinary moment, traditional linear moment and maximum likelihood method. The study shows that *choosing an appropriate empirical distribution function can enhance the estimation accuracy. The optimal empirical distribution function varies depending on the sample size*, *and its result is quite satisfactory in most cases* and offers the best among the other methods especially in the sample size of 1 000~10 000.

Keywords: Gumbel distribution; Monte Carlo simulation; empirical distribution function; optimal linear moment; sample size

引言

Gumbel 分布是描述随机变量极值分布的一类重要的概率统计模型，在气象、水文、环境影响分析、工程风险管理、控制和决策等领域的极值统计实践中具有广泛应用。利用有限样本准确估计 Gumbel 分布函数的参数是极值统计的关键，估计结果除了与样本容量有关外，还与估计方法有关，常用参数估计方法包括矩法(普通矩法)、线性矩法和极大似然函数法等[1-12]。线性矩法相对于普通矩法，对变量的极大值和极小值不那么敏感，求得的参数估计值稳健性、适用性良好；相对于极大似然函数法，具有计算简单、易于实现等优点，因此线性矩法的学术与应用价值更高[13]。但是，线性矩

收稿日期：2014-12-30 修回日期：2015-04-17;
作者简介：翟宇梅(1963-)，女，河北，硕士，研究员，研究方向为天气气候分析与预测、统计建模；赵瑞星(1957-)，男，山西，硕士，高工，研究方向为建模与仿真、时间序列分析。

法的估算结果常与经验分布函数有关[14-16]，选择什么样的经验分布函数可以得到满意的参数估计结果就成为工程实践中必须考虑的问题。目前在工程应用时，经验分布函数的确定仍然存在一定的主观性和盲目性，技术人员常常依据自身对经验分布函数的熟悉程度或参照他人做法选取，由此得到的参数估计结果可能并不是最佳的。

为得到最优的经验分布函数，提高 Gumbel 分布函数的参数估计精度，本文利用蒙特卡罗模拟方法产生不同容量的极值样本，计算分析了不同样本容量情况下 12 种常见经验分布函数的估计结果，选用估计误差最小的经验分布函数构造最优线性矩估计法，并与普通矩法、线性矩法和极大似然函数法的估计结果进行了比较，所得结论为合理选用经验分布函数提供了依据，具有工程实用价值。

1 线性矩估计

Gumbel 分布函数的通用形式为：

$$G(x)=e^{-e^{-\frac{x-\theta}{\delta}}}$$

式中，θ 为位置参数，δ 为尺度参数。

线性矩亦称 L-矩，其参数估计原理类似普通矩，均是令样本矩与总体矩相等，得到总体参数的估计，最大特点是对序列的极大值和极小值没有普通矩那么敏感，参数估计结果比较稳健。Gumbel 分布函数位置参数和尺度参数的 L-矩估计值为：

$$\begin{cases}\hat{\theta}=L_1-\dfrac{\gamma L_2}{\ln 2}\\[2ex]\hat{\delta}=\dfrac{L_2}{\ln 2}\end{cases}$$

其中：L_1, L_2 分别为一阶和二阶线性矩；$\gamma=0.577\,2$ 为欧拉常数。

Hosking 等定义的 L-矩为次序统计量数学期望的线性函数[14]：

$$L_k=(k)^{-1}\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l\binom{k-1}{l}EX_{k-l:k}，\ k=1,2\cdots$$

式中 $EX_{k-l:k}$ 为次序统计量的数学期望，其一般表达式为：

$$EX_{n::k}=\frac{k!}{(n-1)!(k-n)!}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x)]^{n-1}[1-F(x)]^{k-n}dF(x)$$

整理系数可得到 L-矩公式为：

$$L_k=\int_{-\infty}^{\infty}x(F)P_{k-1}^{*}(F)dF，\ k=1,2\cdots$$

其中 $P_k^*(F)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}\binom{k+l}{l}F^l$，是第 k 阶的漂移勒让德多项式。

由于线性矩 L_k 为次序统计量数学期望的线性函数，因此如果求得次序统计量的数学期望，就可用线性矩 L_k 求得线性矩的估计值。利用 U-统计量的概念，Hosking 等给出了样本容量为 n 时线性矩 L_k 的样本矩的直接计算公式：

$$l_k=\binom{n}{k}^{-1}\sum\sum\cdots\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}k^{-1}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}x_{i_{k-j}:n}$$

$$k=1,2,\cdots n$$

前四阶的具体公式为：

$$\begin{cases}l_1=n^{-1}\sum_i x_i\\[1ex] l_2=\dfrac{1}{2}\dbinom{n}{2}^{-1}\sum_i\sum_{>j}(x_{i:n}-x_{j:n})\\[1ex] l_3=\dfrac{1}{3}\dbinom{n}{3}^{-1}\sum_i\sum_{>j}\sum_{>k}(x_{i:n}-2x_{j:n}+x_{k:n})\\[1ex] l_4=\dfrac{1}{4}\dbinom{n}{4}^{-1}\sum_i\sum_{>j}\sum_{>k}\sum_{>l}(x_{i:n}-3x_{j:n}+3x_{k:n}-x_{l:n})\end{cases}$$

其中 $x_{i:n}$ 表示次序统计量样本中的第 i 个样本。通过上式即可计算出线性矩 L_k 的样本矩。

2 最优线性矩估计

线性矩的计算与分布函数有关。通常认为经验分布函数(也称经验频率公式 plotting position formula)是任意分布函数的一种较好估计，因此，可用经验分布函数代替分布函数估计线性矩，进而可找到使估计效果最好的经验分布函数并构造最优线性矩估计法。

第 28 卷第 5 期 系统仿真学报 Vol. 28 No. 5
2016 年 5 月 Journal of System Simulation May, 2016

2.1 经验分布函数

利用经验分布函数估计线性矩的研究较多。Hosking 等给出了用经验分布函数计算线性矩的渐近估计值公式：

$$\lambda_k = k^{-1}\sum_{i=1}^{n} P_{k-1}^{*}(p_{i:n})x_{i:n}$$

其中：$p_{i:n}$ 为经验分布函数；$x_{i:n}$ 表示次序统计量样本中的第 i 个样本。通常的经验分布函数形式为：$p_{i:n}=\dfrac{i+a}{n+b}$，$b \geqslant a > -1$

如何选择参数 a 和 b 是决定经验分布函数的关键。表 1 列出了 a 和 b 取不同值时的 12 种常见的经验分布函数 $F_l(x)$，$l=1,2,\cdots,12$ 。

表 1　常见的 12 种经验分布函数

函数	a、b 取值	函数形式	早期使用者
$F_1(x)$	$a=0,b=0$	i/n	California
$F_2(x)$	$a=0,b=1$	$i/(n+1)$	Thomas
$F_3(x)$	$a=-0.35,b=0$	$(i-0.35)/n$	Hosking
$F_4(x)$		最可几抽样	董双林
$F_5(x)$	$a=-0.5,b=0$	$(i-0.5)/n$	Hazen
$F_6(x)$	$a=0,b=\mathrm{A}$	$i/(n+A)$	董双林
$F_7(x)$	$a=-0.44,b=0.12$	$(i-0.44)/(n+0.12)$	Gringorten
$F_8(x)$	$a=-0.375,b=0.25$	$(i-0.375)/(n+0.25)$	Blom
$F_9(x)$	$a=1,b=2$	$(i+1)/(n+2)$	包文清
$F_{10}(x)$	$a=-0.3,b=0.4$	$(i-0.3)/(n+0.4)$	Chegodayev
$F_{11}(x)$	$a=-1/3,b=1/3$	$(3i-1)/(3n+1)$	Tukey
$F_{12}(x)$	$a=-0.31,b=0.38$	$(i-0.31)/(n+0.38)$	Jenkinsion

注：$F_6(x)$ 中 $\mathrm{A}=\alpha^{1-2i/n}$，$\alpha=4.5+0.1n-0.0008n^2$

2.2 最优经验分布函数仿真流程

假定要素极值序列遵从 Gumbel 分布，其母体的位置参数 $\theta=\theta_0$，尺度参数 $\delta=\delta_0$，再现期为 T 的再现期值(也称极值分位数)：

$$x_i=\theta-\delta\ln(-\ln(P(x_i^*))) \tag{1}$$

其中分布函数 $P(x_i^*)=1-1/T$ 。

利用蒙特卡罗方法对表 1 中的 12 种经验分布函数进行模拟，用拟合标准差 σ、拟合相对偏差 ν 和拟合最大偏差 $w_{\max}$ 作为拟合优良性能指标对模拟结果进行评价。主要步骤如下：

1) 采用组合同余法产生在区间(0,1)上均匀分布的分布函数值 $P_{ij}=R_{ij}, i=1,2,\cdots,N$，$j=1,2,\cdots,M$，其中 N 为样本容量，M 为样本集个数。将这些值代入公式(1)就得到随机变量 X 的抽样 $x_{ij}, i=1,2,\cdots,N, j=1,2,\cdots,M$ 。抽样 x_{ij} 序列可认为是随机变量 X 真实分布的抽样序列集；

2) 用经验分布函数进行参数估计得到 θ_{il} 和 δ_{il}，并计算出估计的 $\hat{x}_{il}$，这里的下标 l 为经验分布函数标识，$l=1,2,\cdots,12$；

3) 计算 M 个样本的拟合优良性指标，得到 $\sigma_{\theta l}$，$\sigma_{\delta l}$，σ_{xl} 等；

4) 为分析不同样本容量时的估计结果，将上述样本集分成五组，分别计算各组的拟合标准差、拟合相对偏差和拟合最大偏差的平均值；

5) 选取一个再现期 T，计算分布函数 $P(x_i^*)=1-1/T$，用位置参数 $\theta=\theta_0$，尺度参数 $\delta=\delta_0$ 作为真值代入公式(1)，得到 Gumbel 分布的再现期极值真值。同样地，用位置参数 θ_{il} 和尺度参数 δ_{il} 的估计值代入公式(1)得到 Gumbel 分布的再现期极值估计值。计算再现期极值真值和估计值的标准差、相对偏差、最大偏差；

6) 改变位置参数和尺度参数的真值，重复上

述步骤，得到不同位置参数和尺度参数情况下的拟合优良性指标；

7) 选择拟合优良且受位置参数和尺度参数变化影响较小的经验分布函数作为最优经验分布函数。

2.3 实例仿真

假定某地年极端风速遵从 Gumbel 分布，采用蒙特卡罗随机抽样方法产生不同容量的样本，其母体的位置参数和尺度参数分别为 $\theta = 35.0$，$\delta = 1.5$。实际计算时设样本集个数 $M = 60$，并分成五组，每组样本集的样本容量 N 是一个和样本集个数有关的数。具体如下：

$$N(M) = \begin{cases} 20M, & M = 1,2,\cdots,10 \\ 250 + 50(M-10), & M = 11,12,\cdots,20 \\ 1000(M-20), & M = 21,22,\cdots,30 \\ 10000 + 1000(M-30), & M = 31,32,\cdots,50 \\ 1000M, & M = 51,52,\cdots,60 \end{cases}$$

利用 2.2 中的仿真流程，计算了每组样本集的平均拟合标准差、平均拟合相对偏差和平均拟合最大偏差，给出了分位数为 0.0 和 0.95 情况下不同样本容量对应的最优经验分布函数，见表 2。从表中可以看出，最优经验分布函数与样本容量有关，如样本容量较小时(750 以内)的最优经验分布函数是 $F_2(x)$，即次序统计量的数学期望函数最优；样本容量在 1 000~10 000 之间时，以 Hosking 等给出的经验分布函数 $F_3(x)$ 为最优。

表 2　不同样本组拟合的最优经验分布函数

样本容量	分位数 0.0	分位数 0.95
20~200	$F_2(x)$	$F_2(x)$
300~750	$F_2(x)$	$F_2(x)$
1 000~10 000	$F_3(x)$	$F_3(x)$
11 000~30 000	$F_9(x)$	$F_9(x)$
51 000~60 000	$F_6(x)$	$F_6(x)$

利用最优经验分布函数计算得到分布函数，进而计算得到再现期值是极值估计的重要目的。为比较经验分布函数对再现期极值估计的影响，以年极端风速实际样本容量一般在 200 以内的情况为例，计算了 10 种再现期取值情况下 12 个经验分布函数相应的再现期极值真值及其估计值的标准差，并按标准差由大到小的顺序排列，见表 3。可以看出，函数 $F_7(x)$，$F_8(x)$，$F_{10}(x)$，$F_{11}(x)$，$F_{12}(x)$的误差相近，$F_1(x)$效果最差，$F_2(x)$估计精度仍然最高。

改变位置参数和尺度参数的真值，分别取($\theta = 3.5$，$\delta = 1.5$)和($\theta = 35.0$，$\delta = 35.0$)，重复上述计算。通过与($\theta = 35.0$，$\delta = 1.5$)时的结果对比发现，3 种参数情况下得到的结论一致(表略)。也就是说，位置参数和尺度参数的变化并不改变参数估计结果的优劣排序，而仅仅引起误差数值的变化。

表 3　12 个经验分布函数的再现期极值估计标准差

函数	再现期									
	210	250	300	350	500	650	800	1 000	1 200	1 500
$F_1(x)$	5.630	5.832	6.043	6.222	6.634	6.938	7.178	7.436	7.647	7.905
$F_9(x)$	4.945	5.121	5.306	5.462	5.824	6.089	6.300	6.526	6.710	6.936
$F_3(x)$	2.155	2.229	2.306	2.371	2.521	2.632	2.719	2.813	2.890	2.984
$F_6(x)$	2.022	2.090	2.161	2.222	2.361	2.463	2.544	2.632	2.703	2.790
$F_4(x)$	1.911	1.982	2.056	2.119	2.264	2.371	2.455	2.546	2.620	2.711
$F_5(x)$	1.009	1.040	1.073	1.100	1.163	1.210	1.247	1.287	1.319	1.359
$F_7(x)$	0.999	1.030	1.062	1.089	1.152	1.198	1.234	1.274	1.306	1.345
$F_8(x)$	0.989	1.019	1.051	1.078	1.140	1.185	1.221	1.260	1.292	1.331
$F_{11}(x)$	0.983	1.013	1.044	1.071	1.132	1.177	1.213	1.252	1.283	1.322
$F_{12}(x)$	0.979	1.009	1.040	1.067	1.128	1.173	1.209	1.247	1.279	1.317
$F_{10}(x)$	0.978	1.007	1.039	1.065	1.126	1.171	1.207	1.245	1.277	1.315
$F_2(x)$	0.939	0.967	0.997	1.023	1.081	1.125	1.159	1.196	1.226	1.262

第 28 卷第 5 期 系统仿真学报 Vol. 28 No. 5
2016 年 5 月 Journal of System Simulation May, 2016

3 参数估计方法比较

为进一步分析最优线性矩估计方法的性能，分别采用普通矩、线性矩和极大似然函数 3 种方法对 Gumbel 分布函数进行估计，并与之进行比较。

样本集及其分组情况同前，Gumbel 分布函数的位置参数和尺度参数取为($\theta = 35.0$，$\delta = 1.5$)。表 4 给出了分位数为 0.0 和 0.95 时各样本集极值序列估计的平均误差情况。可以看出，若分位数为 0.0，当样本容量较小时(小于 200)，普通矩法估计效果最好，其次是最优线性矩法；当样本容量在 300~10 000 之间时，最优线性矩法估计效果最好，其次是线性矩法；当样本容量超过 10 000 时，极大似然函数法估计效果最好，其次是最优线性矩法。若分位数为 0.95，则结果基本类似，只是在样本容量为 300~750 时，线性矩估计法略好于最优线性矩估计法。以上分析说明，相比普通矩、线性矩和极大似然函数法，最优线性矩法能更好地拟合各种大小的样本。

表 5 是不同样本容量时尺度参数 δ 估计的拟合偏差情况。可见，不论样本容量如何，利用最优线性矩法进行尺度参数 δ 估计基本上都能获得最优或次优的估计结果。与表 4 不同的是，在样本量比较大的情况下，极大似然函数估计法并非总是表现最优，甚至不是次优。同样地，对位置参数 θ 估计的拟合偏差情况也进行了计算分析，但发现仅在样本容量为 300~10 000 的情况下，最优线性矩法才能给出误差最小的估计结果(表略)。因此，从分布函数参数估计的角度看，最优线性矩法的估计效果良好，特别是在样本容量为 300~10 000 时，最优线性矩法在 4 种方法中表现是最好的。

图 1 给出了用上述 4 种方法得到的再现期极值估计标准差。可见，样本容量较小时(200 以内)，以最优线性矩法的估计误差最小，其次是普通矩法(图 1(a))；样本容量为 300~10 000 时，仍以最优线性矩法的估计误差最小，线性矩法次之(图 1(b)和(c))；当样本容量超过 10 000 时，极大似然函数法估计结果最好，最优线性矩法次之(图 1(d))。

表 4 极值序列估计的误差平均值

样本容量	方法	分位数 0.0			分位数 0.95		
		标准差	最大误差	相对误差	标准差	最大误差	相对误差
20~200	矩法	0.251 915	0.603 500	0.005 524	0.612 511	0.588 055	0.012 337
	线性矩法	0.274 602	0.669 080	0.005 855	0.696 724	0.669 080	0.013 989
	似然法	0.280 392	0.748 577	0.006 056	0.712 210	0.741 713	0.014 506
	最优线性矩法	*0.252 363*	*0.631 958*	*0.005 591*	*0.650 877*	*0.631 076*	*0.013 163*
300~750	矩法	0.092 678	0.237 980	0.002 278	0.147 490	0.222 551	0.003 336
	线性矩法	*0.082 675*	*0.207 281*	*0.002 074*	0.118 075	*0.177 785*	0.002 709
	似然法	0.096 810	0.272 065	0.002 364	0.193 996	0.271 362	0.004 520
	最优线性矩法	0.082 212	0.204 438	0.002 064	*0.121 329*	0.176 950	*0.002 810*
1 000~10 000	矩法	0.026 475	0.099 610	0.000 648	0.044 049	0.094 195	0.001 036
	线性矩法	*0.024 974*	*0.087 859*	0.000 632	*0.040 469*	*0.083 312*	*0.000 960*
	似然法	0.025 842	0.093 448	0.000 644	0.046 948	0.092 733	0.001 116
	最优线性矩法	0.024 896	0.082 769	*0.000 633*	0.039 674	0.080 162	0.000 941
11 000~30 000	矩法	0.013 176	0.077 982	0.000 287	0.032 771	0.077 982	0.000 772
	线性矩法	0.011 468	0.064 763	0.000 252	0.028 020	0.064 763	0.000 661
	似然法	0.009 520	0.050 044	0.000 217	0.021 154	0.050 044	0.000 498
	最优线性矩法	*0.011 292*	*0.063 363*	*0.000 247*	*0.026 777*	*0.063 180*	*0.000 630*
51 000~60 000	矩法	0.009 962	0.060 521	0.000 221	0.023 808	0.060 460	0.000 563
	线性矩法	0.008 895	0.045 494	0.000 210	0.018 970	0.045 348	0.000 450
	似然法	0.008 550	0.042 935	0.000 204	0.016 747	*0.042 928*	0.000 391
	最优线性矩法	*0.008 726*	*0.043 405*	*0.000 208*	*0.017 899*	0.042 695	*0.000 424*

注：下划线表示最小值，斜体表示次最小值。

表 5 尺度参数估计的拟合偏差平均值

样本容量	方法	标准差	最大误差	相对误差
20~200	矩法	*0.170 187*	0.376 018	0.081 406
	线性矩法	0.199 318	0.449 915	0.088 086
	似然法	0.182 126	*0.323 537*	0.097 125
	最优线性矩法	0.166 420	0.322 395	*0.087 935*
300~750	矩法	0.060 909	0.121 331	0.030 538
	线性矩法	*0.040 183*	0.075 664	*0.021 105*
	似然法	0.045 278	0.066 268	0.023 874
	最优线性矩法	0.039 177	*0.068 696*	0.020 736
1 000~10 000	矩法	0.012 977	0.030 176	0.006 906
	线性矩法	*0.009 775*	*0.019 111*	*0.005 214*
	似然法	0.010 226	0.021 362	0.005 416
	最优线性矩法	0.009 181	0.018 341	0.004 886
11 000~30 000	矩法	0.009 908	0.017 282	0.005 171
	线性矩法	0.008 451	0.014 738	0.004 258
	似然法	0.005 993	0.008 952	0.003 323
	最优线性矩法	*0.008 428*	*0.014 736*	*0.004 257*
51 000~60 000	矩法	0.006 396	0.010 468	0.003 481
	线性矩法	*0.004 699*	*0.008 077*	*0.002 584*
	似然法	0.004 867	0.008 435	0.002 610
	最优线性矩法	0.004 556	0.007 081	0.002 506

注：下划线表示最小值，斜体表示次最小值。

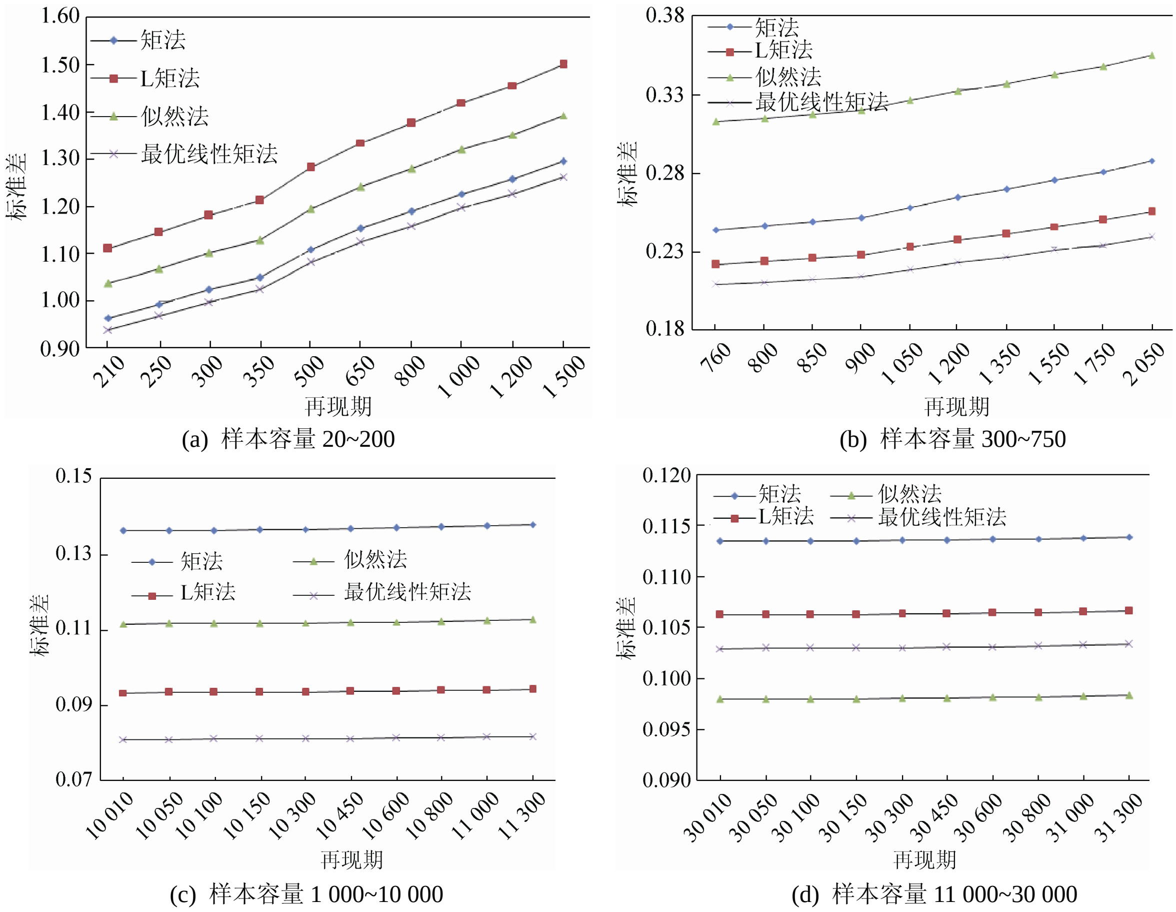

图 1 不同样本容量情况下 4 种参数估计方法再现期极值估计标准差

第 28 卷第 5 期 系统仿真学报 Vol. 28 No. 5
2016 年 5 月 Journal of System Simulation May, 2016

综上分析，不论是对分布函数的估计，还是对再现期极值的估计，最优线性矩法通常情况下均能得到较好的估计结果，4 种方法中，其总体表现最优。

4 结论

利用蒙特卡罗模拟方法选择最优经验分布函数，将最优经验分布函数用于线性矩估计法构造了最优线性矩估计法，通过实例仿真研究了最优线性矩估计法的误差性能，并与不同样本容量情况下普通矩、线性矩和极大似然函数法的估计效果进行了对比，得到以下结论：

1) 样本容量不同，最优经验分布函数不同，工程实践中应根据样本容量具体情况合理选择经验分布函数。

2) 从拟合的角度分析，不论样本容量如何，利用最优线性矩法进行耿贝尔分布函数估计一般都能获得满意的结果(最优或次优)；特别是当样本容量为 1 000~10 000 时，最优线性矩法对各参数的估计效果一致优于普通矩法、线性矩法和极大似然函数法；只有当样本容量超过 10 000 时，极大似然函数法才能表现出一定的优越性。

3) 从极值估计的角度分析，除样本容量超过 10 000 时，极大似然函数法估计结果略优于最优线性矩估计法外，其他样本容量情况下，均以最优线性矩法的估计精度最高。

4) 从工程应用的角度分析，由于超大容量样本(超过 10 000)一般不易获得，所以极大似然函数法更偏重理论意义，此外利用该方法进行估计不仅计算求解复杂，而且不易得到最优结果。相比较而言，基于最优经验分布函数的最优线性矩法既计算简单，又可在多数样本情况下获得良好估计效果，因而可以作为一种普适的估计方法在工程实践中加以利用。

参考文献：

[1] 张延年，王元清，张勇，等. Gumbel分布的基本风压计算与分析 [J]. 土木建筑与环境工程，2012，34(2): 27-31.

[2] 卢安平，赵林，郭增伟. 基于Monte Carlo法的极值分布类型及其参数估计方法比较 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2013, 45(2): 88-95.

[3] 韩克江，田灿，王新生，等. 基于Gumbel极值分布的大型原油储罐剩余寿命预测 [J]. 科学技术与工程, 2012, 12(13): 3211-3215.

[4] 陈元芳，李兴凯，陈民，等. 考虑历史洪水时Gumbel分布线性矩法的研究 [J]. 水电能源科学，2008，26(1): 1-4.

[5] 刘广海，谢如鹤. 基于耿贝尔分布的高温参数模型的分析与确定 [J]. 广州大学学报, 2009, 8(4): 83-86.

[6] 黄浩辉，宋丽莉，植石群，等. 广东省风速极值I型分布参数估计方法的比较 [J]. 气象，2007，33(3): 101-106.

[7] 王怀清，彭静，赵冠男. 近50年江西省雨凇过程气候特征分析 [J]. 气象科技, 2009, 37(3): 311-314.

[8] 肖阳. Gumbel模型中高值记录对设计风速影响 [J]. 江西科学, 2012, 30(4): 503-505, 524.

[9] 陈丽霞，殷坤龙，刘长春. 降雨重现期及其用于滑坡概率分析的探讨 [J]. 地质工程学报，2012，20(5): 745-750.

[10] 董双林. 水文气象极值统计推断的可靠性问题 [J]. 水科学进展, 2012, 23(4): 575-580.

[11] 林晶，陈惠，陈家金，等. 福建省极端低温的分布及其参数估计 [J]. 中国农业气象, 2011, 23(增1): 24-27.

[12] 李阔，李国胜. 珠江三角洲地区风暴潮重现期及增水与环境要素的关系 [J]. 地理科学进展, 2010, 29(4): 16-21.

[13] 梁玉音，刘曙光，钟桂辉，等. 线性矩法与常规矩法对太湖流域降雨频率分析的比较研究 [J]. 水文，2013, 33(4): 433-438.

[14] Hosking J R M. L-Moments analysis and estimation of distributions using linear combination of order statistics [J]. J. R. Stat. Soc. Ser. B, 1990, 52(1): 105-124.

[15] 包文清. 关于经验分布的最优选择问题 [J]. 应用概率统计, 2009, 14(1): 12-20.

[16] 黄国如，陈永勤，解河海. 东江流域枯水径流的频率分析 [J]. 清华大学学报，2005，45(12): 1633-1635, 1649.