

7-3-2020

Lie Group Modeling and Optimal Control of Underwater Vehicle

Bai Long

1. School of Mechanical Electronic & Information Engineering, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing 100083, China;;

Zhifeng Dong

1. School of Mechanical Electronic & Information Engineering, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing 100083, China;;

Xinsheng Ge

2. Mechanical & Electrical Engineering school, Beijing Information Science & Technology University, Beijing 100192, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Lie Group Modeling and Optimal Control of Underwater Vehicle

Abstract

Abstract: *The Lie group modeling method and Gauss pseudo-spectral energy optimal control of the underwater vehicle are in research. Simplifying the underwater vehicle to be a free rigid body, in view of the possible large attitude angle maneuvering of the underwater vehicle, importing the concept of Lie group and Lie algebra, combining with the variation method and Lagrange method, the dynamics equation of the rigid body was derived, translating the traditional expression of the hydrodynamic force to obtain the dynamics equation of the underwater vehicle based on the Lie group. With the Gauss pseudo-spectral method, the continuous space optimal control problem of the underwater vehicle was translated into the nonlinear programming solved with MATLAB. According to the simulation of the energy optimal control of the underwater vehicle under the constraints of boundary values, path and control, the optimal control method can satisfy the constraint conditions, the method has a high accuracy, has a low dependency on the initial value, and the calculation method is feasible.*

Keywords

underwater vehicle, Lie group, variational method, energy optimum, pseudo-spectral method

Recommended Citation

Bai Long, Dong Zhifeng, Ge Xinsheng. Lie Group Modeling and Optimal Control of Underwater Vehicle[J]. Journal of System Simulation, 2016, 28(5): 1150-1157.

基于李群的水下航体动力学建模及最优控制

白龙¹, 董志峰¹, 戈新生²

(1. 中国矿业大学(北京)机电与信息工程学院, 北京 100083; 2. 北京信息科技大学机电工程学院, 北京 100192)

摘要: 研究了水下航体的李群建模法和高斯伪谱能量最优控制。先将水下航体简化为自由刚体, 针对水下航体的大姿态转动角度存在的奇异性问题, 引入李群和李代数, 结合变分法和拉格朗日法, 得到刚体动力学方程, 将传统水动力表达式进行变换, 得到基于李群的水下航体动力学方程。利用高斯伪谱法, 将水下航体连续空间最优控制问题转化为非线性规划, 在此基础上采用 MATLAB 进行求解。通过对水下航体进行能量最优控制的仿真结果的分析可知, 所采用的最优控制方法较好的满足了约束条件, 算法的求解精度较高, 对初值的依赖性较小, 所设计的计算方法可行。

关键词: 水下航体; 李群; 变分法; 能量最优; 伪谱法

中图分类号: TP391.9

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2016) 05-1150-08

Lie Group Modeling and Optimal Control of Underwater Vehicle

Bai Long¹, Dong Zhifeng¹, Ge Xinsheng²

(1. School of Mechanical Electronic & Information Engineering, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing 100083, China;
2. Mechanical & Electrical Engineering school, Beijing Information Science & Technology University, Beijing 100192, China)

Abstract: The Lie group modeling method and Gauss pseudo-spectral energy optimal control of the underwater vehicle are in research. Simplifying the underwater vehicle to be a free rigid body, in view of the possible large attitude angle maneuvering of the underwater vehicle, importing the concept of lie group and lie algebra, combining with the variation method and Lagrange method, the dynamics equation of the rigid body was derived, translating the tradition expression of the hydrodynamic force to obtain the dynamics equation of the underwater vehicle base on the lie group. With the Gauss pseudo-spectral method, the continue space optimal control problem of the underwater vehicle was translated into the nonlinear programming solved with MATLAB. According to the simulation of the energy optimal control of the underwater vehicle under the constraints of boundary values, path and control, the optimal control method can satisfy the constraint conditions, the method has a high accuracy, has a low dependency to the initial value, and the calculation method is feasible.

Keywords: underwater vehicle; Lie group; variational method; energy optimum; pseudo-spectral method

引言

水下航体是一种高度非线性的动力学系统, 一

般情况下可看作在水动力作用下的刚体。目前国内关于水下航体建模的研究有边宇枢^[1]的水下航体六自由度模型, 孙尧^[2]和白涛^[3]等的高速水下航体的动力学模型, 吴琪^[4]等利用四元数建立了水下航体的动力学模型, 唐国元等^[5]对力矩陀螺控制下的水下航体的建模方法进行了研究; 而基于矩阵的水下航体建模及控制研究还比较少, 故而本文采用李群法建立矩阵形式的动力学方程。



收稿日期: 2015-05-15 修回日期: 2015-08-17;
基金项目: 国家自然科学基金(11472058);
作者简介: 白龙(1988-), 男, 山东兖州, 博士, 研究方向为水下航体的动力学与控制建模; 董志峰(1957-), 男, 吉林通化, 博士, 教授, 博导, 研究方向为机械系统动力学; 戈新生(1957-), 男, 安徽合肥, 博士, 教授, 博导, 研究方向为动力学与控制。

<http://www.china-simulation.com>

• 1150 •

水下航体的旋转矩阵是一种特殊的三维空间正交矩阵, 属于李群的一种。而李代数属于一种特殊欧几里德群, 李群和李代数之间可通过指数映射变换, 通过指数映射关系可以对李群实现变分计算, 从而得到系统的动力学方程。国际上关于李群建模方法的主要研究有 Taeyoung Lee 等分别研究了 3D 刚体摆^[6-7], 纯流体中的连接体^[8]中的李群建模法, Nikolaj Nordkvist 等研究了 SE(3)空间内的刚体^[9]的李群建模法, 并将其应用于水下航体动力学研究中。

由于水下航体工作中能量供给的有限性, 故需对其进行能量最优控制。目前伪谱法因其求解精度高在最优控制求解中得到广泛应用。Jie Li 研究了李群法^[10]和伪谱法^[11]在 3D 刚体摆中的应用, 徐少兵等^[12]研究了 Legendre 伪谱法, 孙勇等^[13]研究了改进 Gauss 伪谱法, 张友安等^[14]研究了基于伪谱法的最优反馈控制, 刘英杰^[15]将 Gauss 伪谱法应用于汽车紧急避让动力学问题中, 童科伟等^[16]研究了 Legendre-Gauss 伪谱法的最优控制求解问题。综合以上研究可知, 本文所选用的 Gauss 伪谱法能够以较少的节点获取较高的求解精度。

本文将李群建模法与伪谱法应用到水下航体的动力学与最优控制研究中, 为水下航体的动力学与控制研究提供有利参考。

1 基于李群的动力学方程

1.1 基于李群的运动学分析

建立如图 1 所示的坐标系。Oxyz 为惯性坐标系, O 为浮心, $Ox_1y_1z_1$ 为连体系, $Ox_0y_0z_0$ 为连体系的初始位置。根据水下航体设计的一般要求, 质心应该位于浮心的正下方, 故质心 m 在连体坐标系中的位置单位向量为 $e_3 = [0; 0; 1]$ 。水下航体的运动是位移运动及转动的耦合运动。首先分析转动, 按照分别绕 zyx 轴的转动顺序, $Ox_1y_1z_1$ 相对于 $Ox_0y_0z_0$ 的姿态可用姿态矩阵 R 表示, R 的三角函数的形式可参考相关文献, 根据李群的定义, R 具有如下性质:

$$RR^T = I_{3 \times 3}, \quad \det R = +1 \quad (1)$$

驱动姿态变化的是水下航体绕自身连体坐标系主轴的角速度 $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$, 与 R 存在以下关系:

$$R^T \dot{R} = S(\omega) \quad (2)$$

$S(\omega)$ 为由 ω 得到的反对称矩阵, 即

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

设浮心在惯性坐标系 xyz 中的坐标为 $b = [x, y, z]^T$, 水下航体沿连体坐标系各个主轴的速度为 $v = [p, q, r]^T$, 则在惯性坐标系中, v 与 b 的关系为:

$$\dot{b} = Rv \quad (4)$$

$\dot{b} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$ 为水下航体在惯性系各轴上的速度。式(2)和(4)为水下航体李群形式的运动学方程。

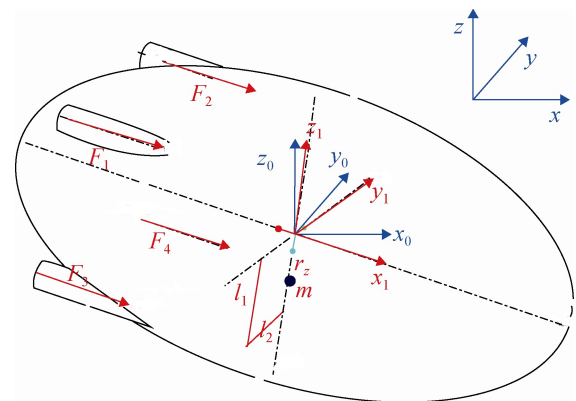


图 1 水下航体运动位姿图

1.2 积分变分型动力学表达式

首先建立系统的 Lagrange 函数, 其动能部分为

$$T(\dot{b}, \omega) = \frac{1}{2} \dot{b}^T m \dot{b} + \frac{1}{2} \omega^T J \omega \quad (5)$$

式中: m 为系统的质量; $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ 为转动惯量。系统势能为

$$U(b, R) = (\rho V - m) g e_3^T b + m g e_3^T R r \quad (6)$$

式中: $r = l_m e_3$ 为质心在连体坐标系中的位置坐标, l_m 为质心到坐标系原点的距离。 ρV 为系统的排水量。由式(5)和(6)可得系统的 Lagrange 函数为:

$$L(b, \dot{b}, R, \omega) = T(v, \omega) - U(b, R) \quad (7)$$

根据哈密顿原理, 动力学方程的积分型变分表达式为

$$\delta \mathcal{B} = \int_{t_0}^{t_f} \delta L(\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}) dt = 0 \quad (8)$$

由哈密顿原理可知, 动力学方程通过对 \mathcal{B} 求变分得到。在求变分之前, 需对拉格朗日函数中的参数 $\mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}$ 进行李群意义下的变换。定义非标准转动惯量矩阵:

$$\mathbf{J}_d = 1/2 \text{tr}[\mathbf{J}] \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{J} \quad (9)$$

其中 $\text{tr}[\cdot]$ 为矩阵对角线元素求和运算。由式(9)可得 $\mathbf{J} = \text{tr}[\mathbf{J}_d] \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{J}_d$, 将其带入动能表达式(5)整理后可得

$$T(\dot{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{b}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{b}} + \frac{1}{2} \text{tr}[S(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J}_d S^T(\boldsymbol{\omega})] \quad (10)$$

1.3 李代数变分运算

动能中的向量 $\boldsymbol{\omega}$ 变为反对称矩阵 $S(\boldsymbol{\omega})$ 的形式。由李代数的概念, 定义 \mathbf{R} 为指数形式:

$$\mathbf{R}^\varepsilon = \mathbf{R} e^{\varepsilon S(\boldsymbol{\eta})} \quad (11)$$

式中: ε 为无穷小变量; $\boldsymbol{\eta}$ 为三维变分向量; $S(\boldsymbol{\eta})$ 为反对称阵。对 \mathbf{R} 求变分可看作对无穷小量 ε 的微分

$$\delta \mathbf{R}^\varepsilon = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{R} e^{\varepsilon S(\boldsymbol{\eta})} = \mathbf{R} S(\boldsymbol{\eta}) \quad (12)$$

根据指数矩阵的性质, 将(11)展开为:

$$\mathbf{R}^\varepsilon = \mathbf{R} + \varepsilon \mathbf{R} S(\boldsymbol{\eta}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (13)$$

对(13)求导可得

$$\dot{\mathbf{R}}^\varepsilon = \dot{\mathbf{R}} + \varepsilon \dot{\mathbf{R}} S(\boldsymbol{\eta}) + \varepsilon \mathbf{R} S(\dot{\boldsymbol{\eta}}) \quad (14)$$

由式(2)可知 $S(\boldsymbol{\omega}^\varepsilon) = \mathbf{R}^{\varepsilon T} \dot{\mathbf{R}}^\varepsilon$, 将式(13)和(14)带入 $S(\boldsymbol{\omega}^\varepsilon)$ 后省略 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 可得

$$S(\boldsymbol{\omega}^\varepsilon) = S(\boldsymbol{\omega}) + \varepsilon S(\dot{\boldsymbol{\eta}}) + \varepsilon S(\boldsymbol{\omega}) S(\boldsymbol{\eta}) - \varepsilon S(\boldsymbol{\eta}) S(\boldsymbol{\omega}) \quad (15)$$

由(15)可得式(10)的 $\text{tr}[*]$ 部分的李代数变换形式, 保留系数为 ε 的项为

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{\omega}^\varepsilon) \mathbf{J}_d S^T(\boldsymbol{\omega}^\varepsilon) = & -\varepsilon S(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J}_d S(\dot{\boldsymbol{\eta}}) + \\ & \varepsilon S(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J}_d S(\boldsymbol{\eta}) S(\boldsymbol{\omega}) - \varepsilon S(\dot{\boldsymbol{\eta}}) \mathbf{J}_d S(\boldsymbol{\omega}) - \\ & \varepsilon S(\boldsymbol{\omega}) [\mathbf{J}_d S(\boldsymbol{\omega}) S(\boldsymbol{\eta}) + S(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{J}_d S(\boldsymbol{\omega})] + \\ & \varepsilon S(\boldsymbol{\eta}) S(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J}_d S(\boldsymbol{\omega}) \end{aligned} \quad (16)$$

由此, 式(8)对李群的变分变成了对李代数的变分

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{B} = & \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}) dt = \\ & \int_{t_0}^{t_f} \left[\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} L(\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}) \right] dt \end{aligned} \quad (17)$$

对式(17)展开后计算可得

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} L(\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}) = & \text{tr}[\text{mg} S(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3^T \mathbf{r}] - \\ & 1/2 \text{tr}\{S(\dot{\boldsymbol{\eta}})[S(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_d S(\boldsymbol{\omega})]\} + \\ & 1/2 \text{tr}\{S(\boldsymbol{\eta}) S(\boldsymbol{\omega}) [S(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_d S(\boldsymbol{\omega})]\} - \\ & 1/2 \text{tr}\{S(\boldsymbol{\eta}) [S(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_d S(\boldsymbol{\omega})] S(\boldsymbol{\omega})\} \end{aligned} \quad (18)$$

式中, $\text{mg} \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} S(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{r} = \text{tr}[\text{mg} \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} S(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{r}]$, $\mathbf{J}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}_d$ 之间存在以下关系:

$$S(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = S(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_d S(\boldsymbol{\omega}) \quad (19)$$

将式(19)带入式(18), 整理后得:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} L(\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}) = & \text{tr}[S(\boldsymbol{\eta}) \text{mg} \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3^T \mathbf{r}] + \\ & \frac{1}{2} \text{tr}\{S(\boldsymbol{\eta}) S(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) - S(\dot{\boldsymbol{\eta}}) S(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})\} \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $S(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = S(\mathbf{x}) S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}) S(\mathbf{x})$ 。

1.4 六自由度动力学方程

对式(20)求积分可得

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{B} = & \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \text{tr}\{S(\boldsymbol{\eta}) S(\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) + \\ & 2 \text{mg} S(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3^T \mathbf{r}^T\} dt \end{aligned} \quad (21)$$

由 $\text{tr}[S(\mathbf{x}) \mathbf{B}] = -\text{tr}[S(\mathbf{x}) \mathbf{B}^T]$ 可知 $2 \text{tr}[S(\mathbf{x}) \mathbf{B}] = -\text{tr}[S(\mathbf{x}) (\mathbf{B} - \mathbf{B}^T)]$, 则式(21)的第 2 项可表示为

$$\begin{aligned} \text{tr}\{2 \text{mg} \mathbf{e}_3^T \mathbf{r} S(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{R}^T\} = \\ \text{tr}\{S(\boldsymbol{\eta}) [\text{mg} (\mathbf{r} \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} - \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3^T \mathbf{r}^T)]\} \end{aligned} \quad (22)$$

式中: $\text{mg} (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3^T \mathbf{r}^T - \mathbf{r} \mathbf{e}_3^T \mathbf{R})$ 为重力矩 $\boldsymbol{\sigma}$ 的反对称形式。

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{\sigma}) = & \text{mg} (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3^T \mathbf{r}^T - \mathbf{r} \mathbf{e}_3^T \mathbf{R}) = \\ & -\text{mg} (\mathbf{r} (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3)^T - (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3) \mathbf{r}^T) \end{aligned} \quad (23)$$

将式(23)带入式(22)整理可得

$$S(\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = S(\boldsymbol{\sigma}) \quad (24)$$

式(23)中的力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 为反对称形式, 将其等价于向量形式为: $\boldsymbol{\sigma} = -mgS(\mathbf{r})\mathbf{R}^T\mathbf{e}_3$ 。由于拉格朗日函数(7)中显含 $\dot{\mathbf{b}}$ 和 \mathbf{b} , 故移动自由度的动力学方程可由拉格朗日方程直接得到, 即:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{b}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}} = 0 \quad (25)$$

计算得

$$m\dot{\mathbf{b}} = -(\rho V - m)g\mathbf{e}_3 \quad (26)$$

对式(4)求导, 用式(2)替换 $\dot{\mathbf{R}}$ 带入式(26)得:

$$m\dot{\mathbf{v}} = -mS(\boldsymbol{\omega})\mathbf{v} - (\rho V - m)g\mathbf{R}^T\mathbf{e}_3 \quad (27)$$

2 水动力和力矩分析

水下航体在水中会受到水动力的作用, 由此产生一定的阻力和阻力矩。为与上文所得到的李群形式的动力学方程一致, 传统的基于标量形式的水动力^[5]可转换为如下向量矩阵形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{water}} &= [C_2 |I_{\boldsymbol{\omega}}| + (e_2^T \boldsymbol{\omega})C_9 + (e_1^T \boldsymbol{\omega})C_{10}] \boldsymbol{\omega} + \\ &\quad C_3 \dot{\mathbf{v}} + C_4 \dot{\boldsymbol{\omega}} [I_{\mathbf{v}} |C_1 + (e_1^T \boldsymbol{\omega})C_5 + (e_2^T \boldsymbol{\omega})C_6 + \\ &\quad (e_3^T \boldsymbol{\omega})C_7 + (e_1^T \mathbf{v})C_8] \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\tau}_{\text{water}} &= C_{17} \dot{\mathbf{v}} + C_{13} \dot{\boldsymbol{\omega}} + (|I_{\boldsymbol{\omega}}| C_{11} + (e_3^T \boldsymbol{\omega})C_{19}) \boldsymbol{\omega} + \\ &\quad ((e_2^T \boldsymbol{\omega})C_{14} + (e_1^T \boldsymbol{\omega})C_{15} + (e_3^T \boldsymbol{\omega})C_{16} + \\ &\quad C_{12} |I_{\mathbf{v}}| + (e_1^T \mathbf{v})C_{18}) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (28)$$

式中, \mathbf{e}_i 为单位向量, $\mathbf{e}_1 = [1; 0; 0]$, $\mathbf{e}_2 = [0; 1; 0]$, $C_i, i=1, \dots, 12$ 分别为水动力系数的常数矩阵, 与各个标量水动力系数之间的关系见附录。

3 驱动分析

图 1 所示的水下航体的驱动力 $\mathbf{F}_i, i=1, \dots, 4$ 在浮心坐标系中的位置向量为 \mathbf{r}_i , 则驱动力对航体产生的前向驱动力 $\mathbf{F} = [F_x; F_y; F_z]$ 和转动驱动力矩 $\boldsymbol{\tau} = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]$ 为:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_i \quad \boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^4 S(\mathbf{r}_i) \mathbf{F}_i \quad (29)$$

式中: \mathbf{F}_i 都平行于 x 轴, 故 $F_y = F_z = 0$, $\tau_x = 0$ 。在驱动力和水动力共同作用下, 水下航体动力学方程为:

$$\begin{cases} m\dot{\mathbf{v}} = -mS(\boldsymbol{\omega})\mathbf{v} - \mathbf{F}_g - \mathbf{f}_{\text{water}} + \mathbf{F} \\ \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_{\text{water}} + \boldsymbol{\tau} \end{cases} \quad (30)$$

式中, $\mathbf{F}_g = (\rho V - m)g\mathbf{R}^T\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$, $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ 。由上述表达形式可知, 基于李群变分的推导方式相较基于三角函数求微分的方法, 推导过程得到简化, 结果也更加简洁。

4 水下航体最优控制的 Gauss 伪谱法

Gauss 伪谱法将最优控制问题的状态和控制变量在勒让德-高斯点上离散, 并以离散点为节点构造拉格朗日插值多项式来逼近状态变量和控制变量。通过对全局插值多项式求导来近似状态变量对时间的导数, 从而将微分方程约束转化为代数约束。性能指标中的积分项由高斯积分计算, 经上述变换, 可将最优控制问题转化为一组具有代数约束的非线性规划问题。

4.1 问题描述

一般最优控制问题可描述为: 寻找控制变量 $\mathbf{u}(t)$, 满足最小化目标函数:

$$J = \Phi(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (31)$$

其中, 状态变量 $\mathbf{x}(t)$, 初始时间 t_0 和终端时间 t_f 满足动力学微分方程约束

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (32)$$

边界条件: $\phi(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) = 0$ 。

控制约束: $\mathbf{C}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq 0$ 。

4.2 时域变换

使用 Gauss 伪谱法首先将最优控制的时间区间由 $t \in [t_0, t_f]$ 转换到 $\tau \in [-1, 1]$ 上

$$\tau = \frac{2t - t_f - t_0}{t_f - t_0} \quad (33)$$

对最小化性能指标转换

$$J = \Phi(\mathbf{x}(-1), t_0, \mathbf{x}(1), t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 g(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau \quad (34)$$

动力学微分方程约束

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau], \tau \in [-1, 1] \quad (35)$$

边界条件: $\phi(\mathbf{x}(-1), t_0, \mathbf{x}(1), t_f) = 0$ 。

路径约束: $\mathbf{C}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) \leq 0$ 。

4.3 全局插值多项式近似状态变量和控制变量

高斯伪谱法以 n 个勒让德-高斯点和 $\tau_0 = -1$ 为节点, 构成 $n+1$ 个 Lagrange 插值多项式 $L_i(\tau)$, $i = 0, 1, \dots, n$, 以此为基函数近似状态变量

$$\mathbf{x}(\tau) \approx \mathbf{X}(\tau) = \sum_{i=0}^n L_i(\tau) \mathbf{x}(\tau_i) \quad (36)$$

其中, 拉格朗日插值基函数

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (37)$$

使得节点上的近似状态与实际状态相等,

$$\mathbf{x}(\tau_i) \approx \mathbf{X}(\tau_i), i = 0, 1, \dots, n。$$

采用拉格朗日插值多项式 $\tilde{L}_i(\tau), i = 1, 2, \dots, n$ 作为基函数近似控制变量

$$\mathbf{u}(\tau) \approx \mathbf{U}(\tau) = \sum_{i=1}^n \tilde{L}_i(\tau) \mathbf{U}(\tau_i) \quad (38)$$

其中 $\tau_i, i = 1, 2, \dots, n$ 为勒让德-高斯点。

4.4 微分约束换代数约束

对状态变量 $\mathbf{x}(\tau)$ 求导, 可以将动力学微分方程约束转化为代数约束, 即

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau_k) \approx \dot{\mathbf{X}}(\tau_k) = \sum_{i=0}^n \dot{L}_i(\tau_k) \mathbf{x}(\tau_i) = \sum_{i=0}^n \mathbf{D}_{ki}(\tau_k) \mathbf{x}(\tau_i) \quad (39)$$

微分矩阵的表达式为

$$\mathbf{D}_{ki} = \dot{L}_i(\tau_k) = \begin{cases} \frac{(1 + \tau_k) \dot{P}_n(\tau_k) + P_n(\tau_k)}{(\tau_k - \tau_i)[(1 + \tau_i) \dot{P}_n(\tau_i) + P_n(\tau_i)]}, i \neq k \\ \frac{(1 + \tau_i) \ddot{P}_n(\tau_i) + 2\dot{P}_n(\tau_i)}{2[(1 + \tau_i) \dot{P}_n(\tau_i) + P_n(\tau_i)]}, i = k \end{cases} \quad (40)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, n, i = 0, 1, \dots, n$ 。由此, 动力学微分约束转换为代数约束

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{D}_{ki}(\tau_k) \mathbf{X}(\tau_i) - \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}(\mathbf{X}(\tau_k), \mathbf{U}(\tau_k), \tau_k, t_0, t_f) = 0 \quad (41)$$

4.5 离散条件下的终端状态约束

由于高斯伪谱法中的节点不包括终点 $\tau_f = 1$, 故而动力学微分方程约束中未定义末端状态 \mathbf{X}_f , 故末端状态应满足动力学方程约束

$$\mathbf{x}(\tau_f) = \mathbf{x}(\tau_0) + \int_{-1}^1 \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau \quad (42)$$

将终端约束离散后用高斯积分近似可得

$$\mathbf{X}(\tau_f) = \mathbf{X}(\tau_0) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^n w_k \mathbf{f}(\mathbf{X}(\tau_k), \mathbf{U}(\tau_k), \tau, t_0, t_f) \quad (43)$$

式中, $w_k = \int_{-1}^1 L_i(\tau) d\tau$ 为高斯权重, τ_k 为勒让德-高斯点。

4.6 离散条件下的性能指标

将性能指标中的积分项用高斯积分近似, 可得性能指标函数的高斯伪谱法形式

$$J = \Phi(\mathbf{X}_0, t_0, \mathbf{X}_f, t_f) +$$

$$\frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^n w_k g(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k; t_0, t_f) \quad (44)$$

由此, 高斯伪谱法将连续最优控制问题离散后转化为非线性规划问题, 然后求取离散状态变量和控制变量, 使性能指标最小, 并满足状态约束和终端状态约束, 边界条件 $\phi(\mathbf{X}_0, t_0, \mathbf{X}_f, t_f) = 0$, 路径约束 $\mathbf{C}(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k; t_0, t_f) \leq 0$

4.7 水下航体的最优控制描述

水下航体能量最优控制方案描述为: 找到控制输入 \mathbf{F} , 从给定的初始状态 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t_0 = 0$ 运动到期望的末端状态 $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$, 并令能耗最小, 并满足一定的约束条件。其最优控制策略为一能量最优泛函极值问题, 其能量最优性能指标为:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^4 |F_i|^2 dt \quad (45)$$

需要满足的初值约束为 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t]$, 其具体形式如式 (30), 控制约束为 $\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{\max}$, 状态约束为 $\mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max}$, 边界条件约束为 $t \leq t_f, \mathbf{x}(t_f) \leq \mathbf{x}_f$ 。在以上约束条件下, 即可对系统进行能量最优控制仿真分析。

5 仿真分析

本研究以一主体为旋转椭球体的水下航体为例, 对其进行最优控制仿真。设该鱼体三轴直径分别为 0.4 m, 0.2 cm 和 0.2 m, 则排水量 $V=8.37 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, 总体质量应控制为 8.37 kg。按照重心位于浮心正下方的原则对总质量进行三维布局后, 测得重心位置向量 $\boldsymbol{r}=[0;0;0.01]\text{m}$; 转动惯量为 $J_x=0.391, J_y=0.948, J_z=0.926$, 单位为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。水的密度为 $1\ 000 \text{ kg/m}^3$ 。驱动器到连体坐标系 y 轴和 z 轴长度分别为 $l_1=l_2=0.075 \text{ m}$ 。水动力参数的取值参照文献[5]。由于本设计所采用的驱动方式是靠驱动器与水之间的相互作用实现的, 故而驱动力越大, 对周围流场所造成的影响也就越大, 故而多组驱动力最大值约束下的水下航体进行最优控制计算, 并作比较。

根据驱动器的驱动性能, 设定 3 组控制约束为: $|\boldsymbol{u}| \leq 5 \text{ N}, |\boldsymbol{u}| \leq 10 \text{ N}, |\boldsymbol{u}| \leq 15 \text{ N}$ 。设水下航体的初始和终端条件为:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}^0 &= 0, \boldsymbol{b}^f = [0.4; 0.4; 0.4], \boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{v}^f = 0, \\ \boldsymbol{\omega}^0 &= \boldsymbol{\omega}^f = 0, \boldsymbol{R}^0 = \boldsymbol{R}^f = \boldsymbol{I}, t_f = 5 \end{aligned}$$

其中 0 即在 5 s 的时间内, 系统从初始点静止的状态下前进, 上浮和偏航各 0.4 m, 并在终端时刻保持静止, 且初始时刻和终端时刻的姿态相同。仿真所得到在 3 种控制输入约束条件下运动轨迹, 速度, 角速度以及控制输入随时间的变化对比如图 2~5 所示。

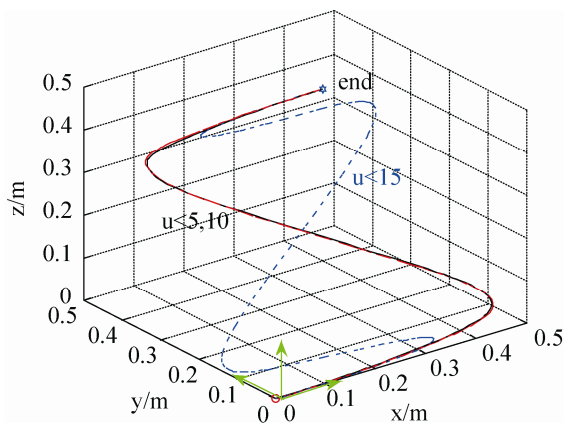


图 2 运动轨迹

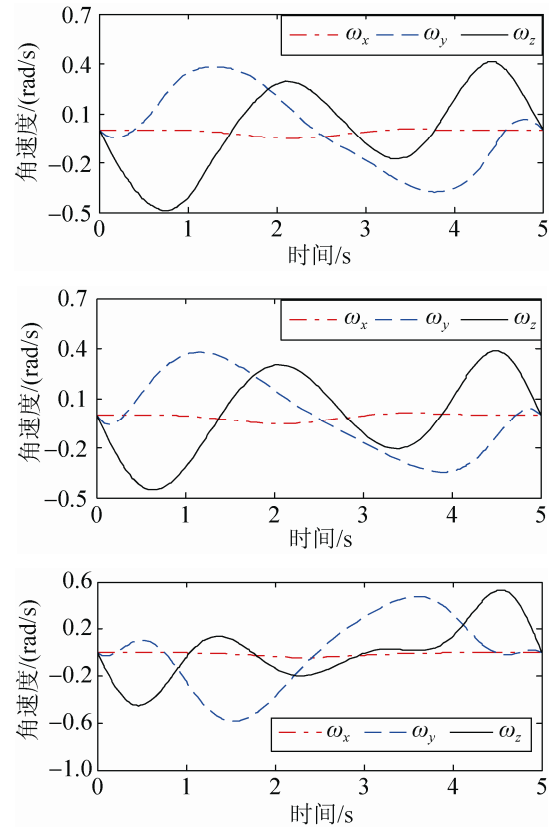


图 3 运动角速度

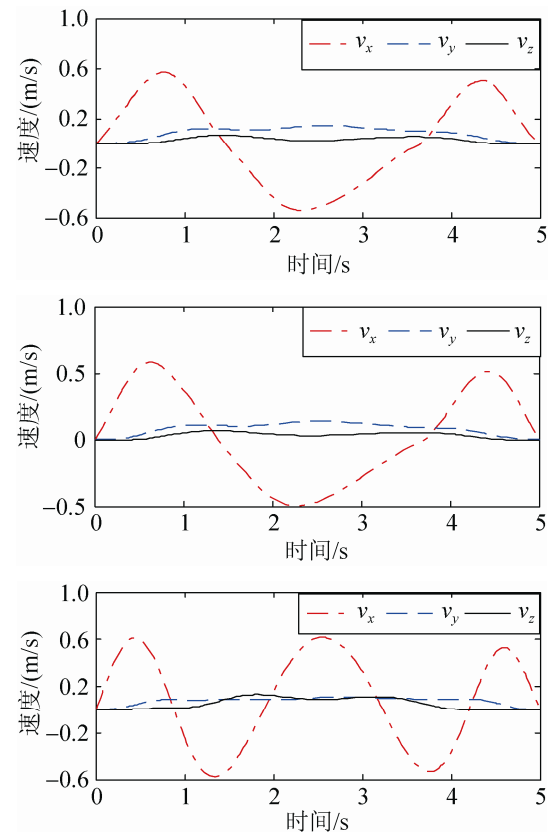


图 4 运动速度

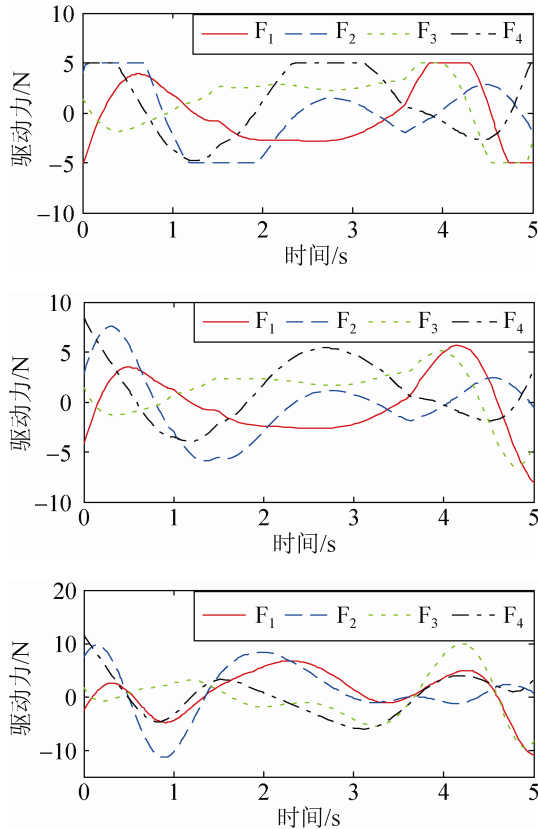


图5 控制力输入

由图2可知,在3种控制下,航体浮心从坐标系原点出发,都到达所指定的点(0.4, 0.4, 0.4),各轴轨迹均未超出设定的终点值范围,3条轨迹都较为光滑,其中前2种情况 $|\mathbf{u}| \leq 5\text{ N}$, $|\mathbf{u}| \leq 10\text{ N}$ 下的轨迹相同,且比在条件 $|\mathbf{u}| \leq 15\text{ N}$ 下的轨迹简单。

由图3可知,俯仰 ω_y 和偏航 ω_z 运动角速度远大于翻滚角速度 ω_x ,这是由于航体驱动力不会产生翻滚力矩的缘故,而翻滚角速度出现轻微变化则是由于水动力作用所造成的,在3种驱动下, $|\mathbf{u}| \leq 5\text{ N}$, $|\mathbf{u}| \leq 10\text{ N}$ 下的角速度变化情况大致相同,且小于 $|\mathbf{u}| \leq 15\text{ N}$ 情况下的变化;由图4可知,艏向速度变化大于其他两个方向的速度,这是由于所设计的驱动器只能产生艏向驱动力,3种情况下艏向速度变化情况大致相同,而侧向速度的变化同样是受水动力的影响。

由图5可知,4个驱动器的驱动力的变化呈现较为复杂的变化趋势,其中 $|\mathbf{u}| \leq 15\text{ N}$ 的情况下呈现驱动力恒定和匀变区间,而 $|\mathbf{u}| \leq 10\text{ N}$ 和

$|\mathbf{u}| \leq 5\text{ N}$ 的情况下驱动力的变化各区间呈现抛物线形式。

综上所述,在3种驱动力限制的情况下,水下航体都可以达到所需的位置,且在 $|\mathbf{u}| \leq 5\text{ N}$ 情况下运动速度角速度的变换区间也相对较小,故而可以作为驱动器选型的依据。

6 结论

与基于欧拉角和四元数,采用微分理论推导得到的水下航体动力学方程相比,采用李群和李代数为基础,利用变分法推导得到的模型形式更加简洁,且推导过程大大简化;同时可避免数值计算中的奇点问题和平衡点附近模糊性问题。水下航体最优控制问题求解的难点在于所选择的数值算法能否满足初值敏感所需的精度。相较智能控制算法的寻优过程,伪谱法在保证计算精度的前提下大大降低了计算量,而相较离散变分积分分子算法,基于伪谱法的推导过程也得到简化。李群理论和伪谱法在工程领域的应用研究也为李群理论和伪谱法在水下航体最优控制问题中的深入研究提供了大量的参考。

参考文献:

- [1] 边宇枢,高志慧,负超. 6自由度水下机器人动力学分析与运动控制[J]. 机械工程学报, 2007, 43(7): 87-92.
- [2] 孙尧,赵新华. 水下超高速航行体的动力学建模及控制问题研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2008, 29(2): 144-150.
- [3] 白涛,孙尧,莫宏伟. 水下高速运动体空间运动的建模与仿真[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(22): 6109-6113.
- [4] 吴琪,李晔. 基于四元数的欠驱动AUV的镇定控制设计[J]. 智能系统学报, 2014, 9(2): 186-191.
- [5] 唐国元,徐正武,黄道敏,等. 基于姿态控制力矩陀螺的水下航形体运动建模方法研究[J]. 中国造船, 2014, 55(2): 18-27.
- [6] Nalin A Chaturvedi, Taeyoung Lee. Nonlinear Dynamics of the 3D pendulum[J]. Nonlinear Science (S0938-8974), 2011, 21(1): 3-32.
- [7] Lee Taeyoung, McClamroch, N Harris. A Lie group variational integrator for the attitude dynamics of a rigid body with application to the 3D pendulum [C]//

- Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications (S1085-1992). USA: IEEE, 2005: 962-967.
- [8] Taeyoung Lee, Melvin Leok, N HarrisMcClamroch. Dynamics of connected rigid bodies in a perfect fluid [C]// 2009 American Control Conference (S0743-1619). NEW YORK, NY 10017 USA : IEEE,345 E 47TH ST, 2009: 408-413.
- [9] Nikolaj Nordkvist, Amit K Sanyal. A Lie group variational integrator for rigid body motion in SE(3) with applications to underwater vehicle dynamics [C]// 49th IEEE Conference on Decision and Control (S0191-2216). USA: IEEE, 2010: 5414-5419.
- [10] Jie Li. Geometric Pseudo-spectral Method on Lie Group with application to 3D Pendulum [C]// Proceedings of 3rd International Conference on Material Science and Information Technology (S1662-8985), STAFZA-ZURICH, SWITZERLAND , Trans Tech Publications, Ltd, 2013, 3021-3029.
- [11] Jie Li, Xiangjiang Xiao. Discrete Mechanics Modeling and Real-time Optimal Control Method Based on Lie Group Variational Integrator [C]// 2013 Chinese Automation Congress (S4799-0333). NEW YORK, NY 10017 USA : IEEE,345 E 47TH ST , 2013: 930-937.
- [12] 徐少兵, 李升波, 成波. 最优控制问题的 Legendre 伪谱法求解及其应用 [J]. 控制与决策, 2014, 29(12): 2113-2120.
- [13] 孙勇, 张卯瑞. 求解含复杂约束非线性最优控制问题的改进 Gauss 伪谱法 [J]. 自动化学报, 2013, 39(5): 672-678.
- [14] 张友安, 王丽英. 基于伪谱法的自由采样实时最优反馈控制及应用[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(9):

1151-1156.

- [15] 刘英杰, 赵又群. 基于 Gauss 伪谱法的紧急避让汽车操纵逆动力学 [J]. 机械工程学报, 2012, 48(22): 127-132.
- [16] 童科伟, 周建平. Legendre-Gauss 拟谱法求解最优控制问题 [J]. 航空学报, 2008, 29(6): 1531-1537.

附录: 水动力参数矩阵

$$C_1 = \begin{bmatrix} X_{u|q|} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{v|q|} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{w|q|} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{r|q|} \\ 0 & Z_{q|q|} & 0 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\dot{v}} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{\dot{w}} \end{bmatrix},$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_r \\ 0 & Z_q & 0 \end{bmatrix}, C_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{vp} \\ 0 & Z_{vp} & 0 \end{bmatrix}, C_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & X_{wq} \\ 0 & 0 & 0 \\ Z_{uq} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_7 = \begin{bmatrix} 0 & X_{vr} & 0 \\ Y_{ur} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{wv} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{wv} \end{bmatrix}, C_9 = \begin{bmatrix} 0 & X_{qq} & 0 \\ Y_{pq} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{rp} \end{bmatrix}, C_{11} = \begin{bmatrix} K_{r|p|} & 0 & 0 \\ 0 & M_{q|q|} & 0 \\ 0 & 0 & N_{r|q|} \end{bmatrix}, C_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & M_{w|q|} \\ 0 & N_{v|q|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{13} = \begin{bmatrix} K_p & 0 & 0 \\ 0 & M_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & 0 & N_r \end{bmatrix}, C_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M_{uq} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{vp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{16} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ N_{ur} & r & 0 \end{bmatrix}, C_{17} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{\dot{w}} \\ 0 & N_{\dot{v}} & 0 \end{bmatrix}, C_{18} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{wv} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{19} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M_{rp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$