

7-2-2020

## Bernstein Neural Network Chaotic Sequence Prediction Based on Phase Space Reconstruction

Hongli Zhang

*1. Department of Electrical Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830047, China;;*

Ruiguo Li

*1. Department of Electrical Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830047, China;;*

Wenhui Fan

*2. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

# Bernstein Neural Network Chaotic Sequence Prediction Based on Phase Space Reconstruction

## Abstract

**Abstract:** In view of the low prediction accuracy and the complex structure of traditional BP neural network, RBF neural network and AR model, *a new prediction method with the combination of phase space reconstruction and Bernstein neural network* was proposed, and PSO algorithm was used for parameters optimization of combination forecast model. Taking Sprott-J chaotic system and traffic flow system as models respectively, the combination of autocorrelation and Cao method was used to reconstruct phase space of chaotic time sequence, the refactoring phasor of time delay and Bernstein neural network were used to establish the prediction model, and do comparative analysis with traditional BP neural network, RBF neural network and AR models. The simulation results show that *the combination prediction of phase space reconstruction and Bernstein neural network* has a simple structure and can get more preferable simulation effect and higher prediction accuracy.

## Keywords

phase space reconstruction, Bernstein neural network, PSO algorithm, chaotic time sequence prediction

## Recommended Citation

Zhang Hongli, Li Ruiguo, Fan Wenhui. Bernstein Neural Network Chaotic Sequence Prediction Based on Phase Space Reconstruction[J]. Journal of System Simulation, 2016, 28(4): 880-889.

# 基于相空间重构的 Bernstein 神经网络混沌序列预测

张宏立<sup>1</sup>, 李瑞国<sup>1</sup>, 范文慧<sup>2</sup>

(1. 新疆大学电气工程学院, 新疆 乌鲁木齐 830047; 2. 清华大学自动化系, 北京 100084)

**摘要:** 针对传统 BP 神经网络、RBF 神经网络及 AR 模型预测精度不高、结构复杂, 提出了相空间重构与 Bernstein 神经网络组合预测的新方法, 并结合 PSO 算法进行组合预测模型的参数优化。分别以 Sprott-J 混沌系统和交通流系统为模型, 利用自相关法和 Cao 方法相结合对混沌时间序列进行相空间重构; 利用重构时间延迟相量及 Bernstein 神经网络建立预测模型, 并与传统的 BP 神经网络、RBF 神经网络及 AR 模型进行对比分析。仿真结果表明, 相空间重构与 Bernstein 神经网络组合预测较传统模型结构简单、模拟效果好、预测精度高。

**关键词:** 相空间重构; Bernstein 神经网络; PSO 算法; 混沌时间序列预测

中图分类号: TP391.9

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2016) 04-0880-10

## Bernstein Neural Network Chaotic Sequence Prediction Based on Phase Space Reconstruction

Zhang Hongli<sup>1</sup>, Li Ruiguo<sup>1</sup>, Fan Wenhui<sup>2</sup>

(1. Department of Electrical Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830047, China;

2. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** In view of the low prediction accuracy and the complex structure of traditional BP neural network, RBF neural network and AR model, a new prediction method with the combination of phase space reconstruction and Bernstein neural network was proposed, and PSO algorithm was used for parameters optimization of combination forecast model. Taking Sprott-J chaotic system and traffic flow system as models respectively, the combination of autocorrelation and Cao method was used to reconstruct phase space of chaotic time sequence, the refactoring phasor of time delay and Bernstein neural network were used to establish the prediction model, and do comparative analysis with traditional BP neural network, RBF neural network and AR models. The simulation results show that the combination prediction of phase space reconstruction and Bernstein neural network has a simple structure and can get more preferable simulation effect and higher prediction accuracy.

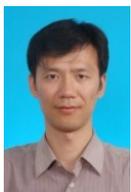
**Keywords:** phase space reconstruction; Bernstein neural network; PSO algorithm; chaotic time sequence prediction

## 引言

混沌现象是由一种低阶确定性的非线性动力系统所表现出来的非常复杂的行为, 它已在天气预

报、经济预测、电力负荷预测、股市预测等领域得到了广泛的应用。在对混沌时间序列的分析中, 混沌信号的相空间重构是关键环节。Takens 和 Packard 等人提出了相空间重构的延时坐标法<sup>[1]</sup>, 即用单一的标量时间序列来重构一个等价的相空间, 并在这个相空间中恢复原有的动力学特性。

相空间重构有 2 个关键的参数, 即最佳延迟时间  $\tau$  和最小嵌入维数  $m$ <sup>[2]</sup>。对于最佳延迟时间  $\tau$  的估计方法有自相关法、复自相关法、互信息法、平



收稿日期: 2014-11-18 修回日期: 2015-04-22;  
基金项目: 国家自然科学基金(61463047);  
作者简介: 张宏立(1972-), 男, 湖南, 博士, 副教授,  
研究方向为混沌分析、系统辨识等; 李瑞国(1986-),  
男, 满族, 河北, 硕士生, 研究方向为混沌理论与应用、模式识别等; 范文慧(1966-), 男, 吉林, 博士,  
教授, 研究方向为协同仿真、协同优化等。

<http://www.china-simulation.com>

均位移法等<sup>[3]</sup>, 最小嵌入维数  $m$  的选取方法有饱和关联维数法(即 G-P 法)、伪最近邻域法、Cao 方法以及  $\tau$  和  $m$  的联合算法——C-C 法等<sup>[4]</sup>。本文选择自相关法和 Cao 方法相结合的方法确定  $\tau$  和  $m$ , 程序简单、易于实现。

相空间重构之后, 通过计算最大 Lyapunov 指数判断系统混沌性, 然后建立数学模型对该混沌时间序列进行预测。传统混沌时间序列预测模型有 BP 神经网络模型、RBF 神经网络模型及 AR 模型等。但混沌时间序列对初始条件具有敏感依赖性, 是一组具有非线性和时变的数据, 采用传统的预测模型很难把这种复杂规律表达出来。传统的 BP 神经网络、RBF 神经网络计算效率低、泛化能力低, 预测精度不高<sup>[5]</sup>。AR 模型是一种线性模型, 对于混沌时间序列预测往往不能满足精度要求。鉴于此, 本文提出了 Bernstein 神经网络预测模型, 以解决传统神经网络权值训练过程中出现的运算量大、收敛慢、容易陷入局部最小值<sup>[6]</sup>及 AR 模型精度不够等问题。粒子群优化(Particle Swarm Optimization, PSO)算法作为一种并行优化算法, 操作简单, 而且保留了基于种群的全局搜索策略, 它特有的记忆功能使其可以动态跟踪当前的搜索情况, 防止陷入局部最优。因此, 本文将 PSO 算法用于预测模型的参数优化中。

## 1 相空间重构

### 1.1 最佳延迟时间

利用自相关法确定最佳延迟时间。自相关法也称自相关函数法, 通过计算自相关函数  $Cl(\tau)$  来判断  $x(i)$  和  $x(i+\tau)$  的相关性<sup>[7]</sup>。定义自相关函数如下:

$$Cl(\tau) = \frac{\frac{1}{N-\tau} \sum_{i=1}^{N-\tau} (x(i+\tau) - \bar{x})(x(i) - \bar{x})}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x(i) - \bar{x})^2} \quad (1)$$

式中:  $x(i)$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 为时间序列;  $N$  为序列长度;

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i)。$$

经验证明, 选  $Cl(\tau)$  下降到距离初始值的  $1-1/e$  最近的  $\tau$  为最佳延迟时间。

### 1.2 最小嵌入维数

采用 Cao 方法<sup>[8]</sup>确定最小嵌入维数。 $m$  维相空间中的重构时间延迟相量为

$$\begin{cases} Y_{m,i} = [x(i), x(i+\tau), \dots, x(i+(m-1)\tau)]^T (i=1, 2, \dots, L) \\ L = N - (m-1)\tau \end{cases} \quad (2)$$

定义

$$e_{m,i} = \frac{\min \left\{ \|Y_{m+1,i} - Y_{m+1,k}\|_2 \right\}}{\min \left\{ \|Y_{m,i} - Y_{m,j}\|_2 \right\}} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & (i=1, 2, \dots, N-m\tau) \\ & (j=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N-m\tau) \\ & (k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N-m\tau) \end{aligned}$$

式中:  $\|\cdot\|_2$  为向量的 2 范数。

$$\text{定义} \begin{cases} E_m = \frac{1}{N-m\tau} \sum_{i=1}^{N-m\tau} e_{m,i} \\ EE_m = |E_{m+1} - E_m| \end{cases} \quad (4)$$

如果时间序列是有吸引子产生的, 则  $m \geq m_0$  后, 若  $EE_m < \varepsilon$ , 那么最小嵌入维数为  $m_0$ 。其中,  $\varepsilon$  为任意给定的很小的正数。

### 1.3 最大 Lyapunov 指数

运用最大 Lyapunov 指数判断系统的混沌性<sup>[9]</sup>。Lyapunov 指数是一个谱系  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, m-1$ ),  $m$  为重构相空间的最小嵌入维数。如果谱系中最大者为正值, 则该系统为混沌系统<sup>[10]</sup>。最大 Lyapunov 指数是判断混沌存在与混沌特性的一个重要依据, 它可以度量混沌系统对初值的敏感程度—其值越大, 混沌特性越强, 对初值的敏感性也越强。根据(5)式求取最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$ 。

$$\begin{cases} l_i = \min_{i \neq j} \left\{ \|Y_{m,i} - Y_{m,j}\|_2 \right\} (i, j=1, 2, \dots, L) \\ \lambda_{\max} = \frac{1}{(L-1)\tau} \sum_{i=1}^{L-1} \frac{\ln l_{i+1}}{l_i} \end{cases} \quad (5)$$

若  $\lambda_{\max} < 0$ , 系统具有稳定的不动点; 若  $\lambda_{\max} = 0$ , 系统出现周期现象; 若  $\lambda_{\max} > 0$ , 系统具有混沌特性。

## 2 Bernstein 神经网络

### 2.1 Bernstein 多项式及性质

定义 1<sup>[11]</sup> 设函数  $f(x)$  在区间  $[0,1]$  上连续, 则

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (6)$$

式中:  $f\left(\frac{k}{n}\right) (k=0, 1, \dots, n)$  为  $[0,1]$  区间内的各个节点函数值, 称由(6)式确定的  $B_n(f, x)$  为  $n(n \geq 1)$  次 Bernstein 多项式。

定理 1<sup>[12]</sup> 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 则  $B_n(f, x)$  满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - B_n(f, x)| = 0 \quad (7)$$

定理 1 表明 Bernstein 多项式可以逼近  $[0,1]$  上的任意连续函数。根据定理 1 对 Bernstein 多项式进行推广, 使之逼近  $[a,b]$  上的任意连续函数。

定理 2<sup>[12]</sup> 设  $f(x)$  在  $[a,b]$  上连续, 则修正的 Bernstein 多项式为

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \times C_n^k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-k} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - B_n(f, x)| = 0 \quad (9)$$

此外, Bernstein 多项式还有 3 条重要性质:

(1) 保值性, 即线性函数的 Bernstein 多项式是它本身。

(2) 同单调性。若  $f(x)$  在  $[a,b]$  上单调增加(或单调减少), 则  $f(x)$  的  $n$  次 Bernstein 多项式在  $[a,b]$  上亦单调增加(或单调减少)。

(3) 同凹凸性。若  $f(x)$  是  $[a,b]$  上的凹函数(或凸函数), 则  $f(x)$  的  $n$  次 Bernstein 多项式亦是  $[a,b]$  上的凹函数(或凸函数)。

### 2.2 Bernstein 多项式外推性质

根据 2.1 节理论, 本文推导出了一条 Bernstein 多项式的新性质。

设函数  $f(x) (0 \leq x \leq 1)$  的  $n+1$  个插值节点  $x_k (k=0, 1, \dots, n)$ , 根据定理 2, 利用 Bernstein 多

项式插值逼近  $f(x)$ , 则有

$$f(x) \rightarrow B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n b_k(x) f(x_k) \quad (10)$$

根据(10)式推知  $f(x + \Delta x)$ , 即

$$f(x + \Delta x) \rightarrow B_n(f, x + \Delta x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) C_n^k (x + \Delta x)^k (1 - (x + \Delta x))^{n-k} = \sum_{k=0}^n l_k b_k(x) f(x_k) \quad (11)$$

令  $\Delta x > 0$ , 则  $(x + \Delta x) > 1$ , 即  $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$  为区间外的点。

证明:  $\exists p > 1$ , 使得  $x + \Delta x = px$  成立, 则有

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n f(x_k) C_n^k (x + \Delta x)^k (1 - (x + \Delta x))^{n-k} = \\ & \sum_{k=0}^n f(x_k) C_n^k (px)^k (1 - px)^{n-k} = \\ & \sum_{k=0}^n f(x_k) C_n^k p^k x^k ((1-x) - (p-1)x)^{n-k} \quad (12) \end{aligned}$$

将  $((1-x) - (p-1)x)^{n-k}$  按二项式展开, 得到

$$\begin{aligned} & ((1-x) - (p-1)x)^{n-k} = \\ & \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i (1-x)^{n-k-i} (-(p-1)x)^i \quad (13) \end{aligned}$$

令  $p \rightarrow 1^+$ ,  $x \rightarrow 0^+$ , 则有

$$-(p-1)x^q = o((1-x)^{n-k}) \quad (q=2, 3, \dots, n-k) \quad (14)$$

$$\therefore ((1-x) - (p-1)x)^{n-k} = (1-x)^{n-k} -$$

$$(n-k)(1-x)^{n-k-1}(p-1)x + o((1-x)^{n-k}) \quad (15)$$

将(15)式忽略高阶无穷小量代入(12)式, 得到

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n f(x_k) C_n^k (x + \Delta x)^k (1 - (x + \Delta x))^{n-k} = \\ & \sum_{k=0}^n f(x_k) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} p^k \left(1 - \frac{(n-k)(p-1)x}{1-x}\right) \quad (16) \end{aligned}$$

$$\therefore p \rightarrow 1^+, x \rightarrow 0^+, 0 \leq k \leq n$$

$$\therefore p^k \leq M, 1 - \frac{n(p-1)x}{1-x} \leq \left(1 - \frac{(n-k)(p-1)x}{1-x}\right) \leq 1$$

$$\therefore \left(1 - \frac{n(p-1)x}{1-x}\right) M \leq p^k \left(1 - \frac{(n-k)(p-1)x}{1-x}\right) \leq M$$

根据连续函数介值定理,  $\exists l_k$ , 使得

$$(1 - \frac{n(p-1)x}{1-x})M \leq p^k (1 - \frac{(n-k)(p-1)x}{1-x}) = l_k \leq M$$

$$\therefore f(x + \Delta x) \rightarrow B_n(f, x + \Delta x) =$$

$$\sum_{k=0}^n f(x_k) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} l_k = \sum_{k=0}^n l_k b_k(x) f(x_k) \quad (17)$$

### 2.3 Bernstein 神经网络

三层基神经网络可以逼近任意的非线性函数, 因此, 结合(11)式可以构建一个多输入单输出的基神经网络, 以解决多个插值节点的函数拟合问题。据此, 本文提出一种 Bernstein 神经网络, 它是一种以 BP 神经网络拓扑结构为基础, 把 Bernstein 多项式基函数作为隐层神经元激励函数的神经网络。

Bernstein 神经网络的基函数为

$$B_{n,k}(y, x) = y C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (18)$$

式中:  $n$  为 Bernstein 多项式的阶数, 一般,  $n$ =输入层神经元的个数-1;  $y$  隐层的神经元输入;  $x$  为固定参数。

## 3 基于相空间重构的 Bernstein 神经网络预测模型

### 3.1 预测原理

相空间重构后,  $m$  维相空间中的重构时间延迟相量为

$$X_{m,i-(m-1)\tau} = [x(i), x(i-\tau), \dots, x(i-(m-1)\tau)]^T \times (i = (m-1)\tau + 1, (m-1)\tau + 2, \dots, N) \quad (19)$$

Takens 定理<sup>[13]</sup>证明了存在一个光滑函数  $f(X)$ , 使得

$$x_p(i+1) = f(X_{m,i-(m-1)\tau}, \theta) \quad (20)$$

其中:  $\theta$  为模型参数向量。

构建一个三层多输入的新型 Bernstein 神经网络。网络中隐层、输出层各神经元激励函数全为恒等映射, 且所有神经元的阈值均为 0, 其拓扑结构如图 1 所示。

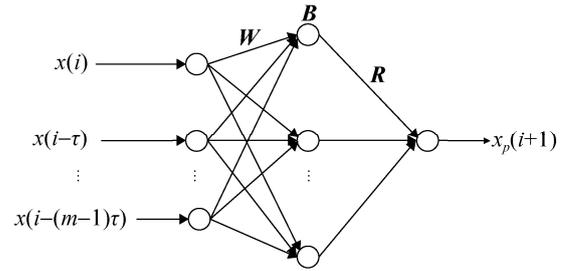


图 1 Bernstein 神经网络预测模型

图 1 中,  $W$  是一个  $m \times m$  的权值矩阵;

$$R = [r_1, r_2, \dots, r_m]^T;$$

$$B = [B_{m-1,0}(net_1, x), B_{m-1,1}(net_2, x), \dots, B_{m-1,m-1}(net_m, x)]^T$$

由于输入层神经元激励函数采用的是恒等映射, 故隐层神经元输入为

$$net_j = \sum_{k=1}^m W(k,j) X_{m,i-(m-1)\tau}(k) \quad (21)$$

$$其中: W(k,j) = \begin{cases} 1 & (k = j, k; j = 1, 2, \dots, m) \\ 0 & (k \neq j) \end{cases}$$

输出层神经元激励函数采用的也是恒等映射, 因此其输出为

$$x_p(i+1) = \sum_{j=1}^m r_j B_{m-1,j-1}(net_j, x) \quad (22)$$

### 3.2 模型参数优化原理

网络训练时, 将原始混沌时间序列与预测序列误差的平方和反馈到算法中, 其原理如图 2 所示。

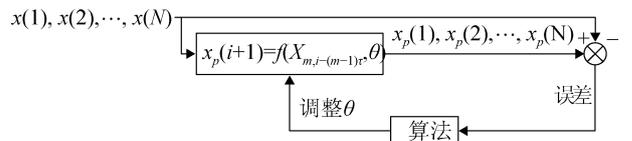


图 2 模型参数优化原理图

通过算法中的适应度函数不断调整模型参数, 直至适应度最小。适应度函数取为

$$F = \min_{\theta} \left\{ \sum_{n=(m-1)\tau+2}^N (x_p(n) - x(n))^2 \right\} \quad (23)$$

式中:  $\theta$  为模型参数向量,  $\theta = [R^T x] = [r_1, r_2, \dots, r_m, x]$ 。

### 3.3 基于 PSO 算法的模型参数优化实现

PSO 算法是一种并行优化算法, 源于对鸟群捕

食行为的研究<sup>[14]</sup>，其基本思想是，每个优化问题的潜在解都是搜索空间的粒子，所有的粒子都有一个被优化的函数决定的适应度，每个粒子还有一个速度向量决定它们飞翔的方向和距离，然后粒子们就随当前的最优粒子在解空间中搜索。PSO 初始化为—群随机粒子(随机解)，然后通过迭代找到最优解。在每次迭代中，粒子通过跟踪两个“极值”来更新自己，一个是粒子本身所找到的最优解——个体极值  $P_{id}$ ，另一个是整个种群目前所找到的最优解——全局极值  $P_{gd}$ <sup>[15]</sup>。找到这两个最优解时，每个粒子根据(24)，(25)式来更新自己的速度和位置。

$$v_{id}(t+1) = \omega v_{id}(t) + \eta_1 \text{rand}() (P_{id} - x_{id}(t)) + \eta_2 \text{rand}() (P_{gd} - x_{id}(t)) \quad (24)$$

$$x_{id}(t+1) = x_{id}(t) + v_{id}(t+1) \quad (25)$$

式中： $v_{id}(t+1)$ 表示第*i*个粒子在*t+1*代中第*d*维上的速度； $x_{id}(t+1)$ 表示第*i*个粒子在*t+1*代中第*d*维上的位置； $\omega$ 为惯性权重； $\eta_1, \eta_2$ 为加速常数。此外，为使粒子速度和位置不致过大，设置速度上限  $v_{\max}$ 、下限  $-v_{\max}$  和位置上限  $x_{\max}$ 、下限  $-x_{\max}$ 。

PSO 算法作为一种并行群智能优化算法，全局搜索能力强，避免陷入局部最优解，目前已广泛应用于函数优化、神经网络训练、模糊系统控制等领域。因此，利用 PSO 算法优化 Bernstein 神经网络预测模型。将待优化参数向量  $\theta = [r_1, r_2, \dots, r_m, x]$  比作算法中的一个粒子，在适应度函数(23)式的评价下，算法基本流程如下：

**Step 1:** 初始化粒子群，即设定种群数量  $Q$  及各粒子的初始位置  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_Q]^T$  和初始速度  $\mathbf{V} = [V_1, V_2, \dots, V_Q]^T$ 。其中， $X_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ir}]$ ， $V_i = [v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ir}]$  ( $i=1, 2, \dots, Q$ )； $r$  为粒子维数。

**Step 2:** 计算每个粒子的适应度值。

$$\begin{cases} F_i = \sum_{n=(m-1)\tau+2}^N (x_p(n) - x(n))^2 (i=1, 2, \dots, Q) \\ x_p(n) = \sum_{j=1}^m X_i(j) B_{m-1, j-1}(net_j, X_i(r)) \\ r = m + 1 \end{cases} \quad (26)$$

式中： $x_p(n)$ 为  $x(n)$  的估计值； $m$  为最小嵌入维数；

$net_j$  如(21)式所示。

**Step 3:** 根据初始位置和初始速度及式(24)~(25)更新各粒子的位置。

**Step 4:** 计算每个粒子的新适应度值。

$$\begin{cases} F_{\text{new-}i} = \sum_{n=(m-1)\tau+2}^N (x_{\text{new-}p}(n) - x(n))^2 (i=1, 2, \dots, Q) \\ x_{\text{new-}p}(n) = \sum_{j=1}^m X_{\text{new-}i}(j) B_{m-1, j-1}(net_j, X_{\text{new-}i}(r)) \\ r = m + 1 \end{cases} \quad (27)$$

**Step 5:** 计算自身极值。对每个粒子，比较它的适应度值和它所经历过的最好位置  $P_{id}$  的适应度值，如果比  $P_{id}$  更小，更新自身最优解  $P_{id}$ 。

**Step 6:** 计算全局极值。对每个粒子，比较它的适应度值和群体所经历过的最好位置  $P_{gd}$  的适应度值，如果比  $P_{gd}$  更小，更新全局最优解  $P_{gd}$ 。

**Step 7:** 如果达到约束条件(或终止进化代数  $Gen$ )，则结束，否则转至 Step 2 继续。

## 4 仿真实验

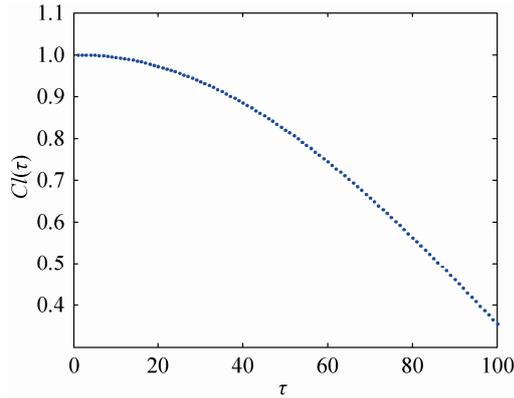
为验证本文所提预测模型的有效性，以连续多输入多输出 Sprott-J 系统和某一市区交通流系统为模型进行仿真实验。

### 4.1 Sprott-J 系统

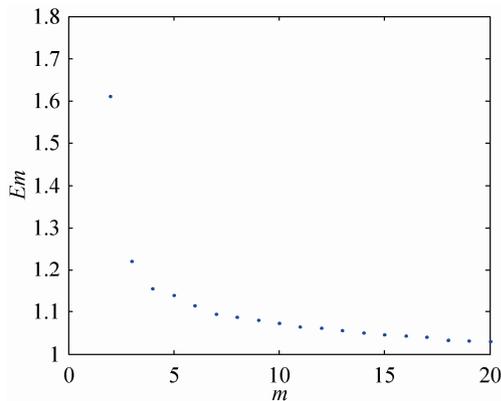
1994 年，美国学者 Sprott 在大量数值实验的基础上提出了 19 种混沌系统，并为这些系统设置了固定的参数，其中的 Sprott-J 系统是一个具有调幅特性的分段性混沌系统，其模型如(28)式所示。

$$\begin{cases} \dot{x} = 2z \\ \dot{y} = -2y + z \\ \dot{z} = -x + y + y^2 \end{cases} \quad (28)$$

该模型存在一个典型的单涡旋混沌吸引子。仿真时，初值  $x_0, y_0, z_0$  分别取为 -1, 0, 1，步长  $h$  取为 0.01。利用四阶 Runge-Kutta 法计算包含 8 000 个数据点的混沌时间序列，通过前 4 000 个数据点建立预测模型，后 4 000 个数据点用来作预测分析。对混沌时间序列  $x$  进行相空间重构，取  $\varepsilon = 0.01$ ， $\tau - Cl(\tau)$  及  $m - E_m$  图分别如图 3(a)和图 3(b)所示。



(a) 自相关函数离散图

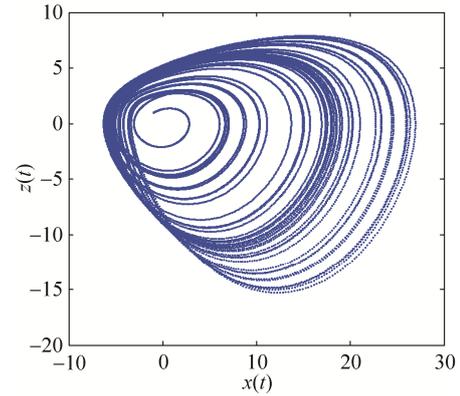


(b) Cao 方法离散图

图 3 相空间重构参数图

根据 1.1 节及图 3(a) 得到最佳延迟时间  $\tau = 73$ , 根据 1.2 节及图 3(b) 得到最小嵌入维数  $m = 7$ , 根据得到的  $m$ 、 $\tau$  及 1.3 节得到最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max} = 6.4397 \times 10^{-6}$ 。由此可见,  $\lambda_{\max} > 0$ , 根据 1.3 节知该系统为混沌系统, 具有混沌特性。原 Sprott-J 吸引子及重构吸引子轨迹图如图 4 所示。其中,  $Td = 0.01\tau$ 。图 4(a) 是 Sprott-J 吸引子在  $x-z$  平面的轨迹图, 图 4(b) 是  $\tau$  取 73 时变量  $z$  的重构吸引子轨迹图, 证明了 Sprott-J 系统典型的单涡旋混沌吸引子的存在。另外,  $\tau = 73$  时, 重构吸引子轨迹图既不压缩也不折叠, 很好的保留了原系统吸引子的动力学特性, 同时也验证了自相关法和 Cao 方法相结合进行相空间重构的有效性。

利用相空间重构参数和混沌时间序列  $x$ , 得到重构时间延迟向量, 结合 Bernstein 神经网络预测模型, 利用 PSO 算法优化模型参数, 其参数实现如表 1 所示。



(a) 原吸引子

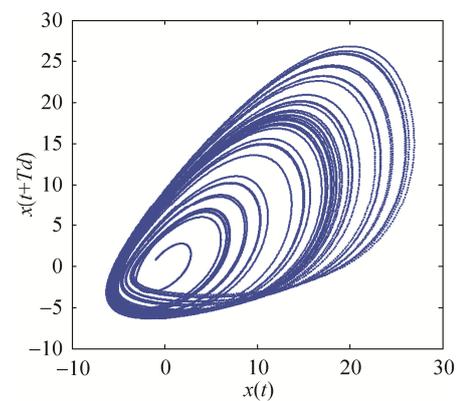
(b)  $Td=0.73$  时重构吸引子

图 4 原吸引子轨迹图及重构吸引子轨迹图

表 1 PSO 算法初始化及优化参数

初始化参数		优化参数	
$x_{\max}$	20	$r_1$	1.092 4
$v_{\max}$	0.2	$r_2$	-0.191 2
$r$	8	$r_3$	-0.141 3
$Q$	40	$r_4$	-0.701 5
$Gen$	30	$r_5$	-2.440 1
$\omega$	$\omega_t$	$r_6$	-0.183 5
$\eta_1$	2	$r_7$	0.381 8
$\eta_2$	2	$x$	0.013 1

$$\omega_t = \omega_{\max} - \frac{t}{Gen} (\omega_{\max} - \omega_{\min}) \quad (1 \leq t \leq Gen) \quad (29)$$

其中:  $\omega_{\max} = 0.9$  及  $\omega_{\min} = 0.4$  分别是最大和最小加权系数;  $t$  为当前进化代数;  $Gen$  为终止进化代数。

根据表 1 参数, 将 Bernstein 神经网络模型和传统的 AR 模型、RBF 神经网络模型、BP 神经网络模型比较, 各种预测模型仿真结果如图 5~6 所示。

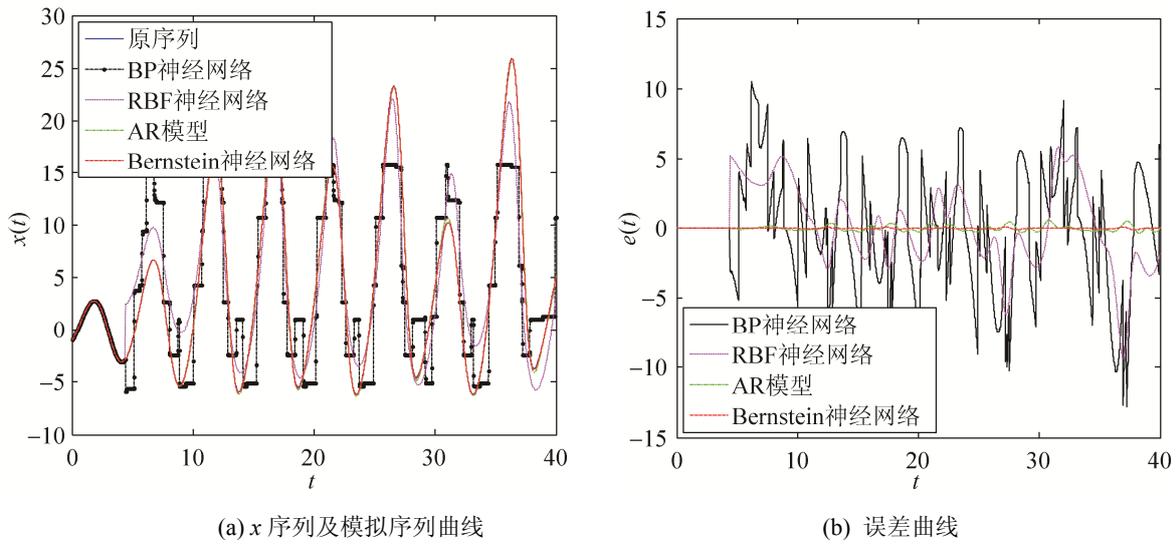


图5 建模分析图

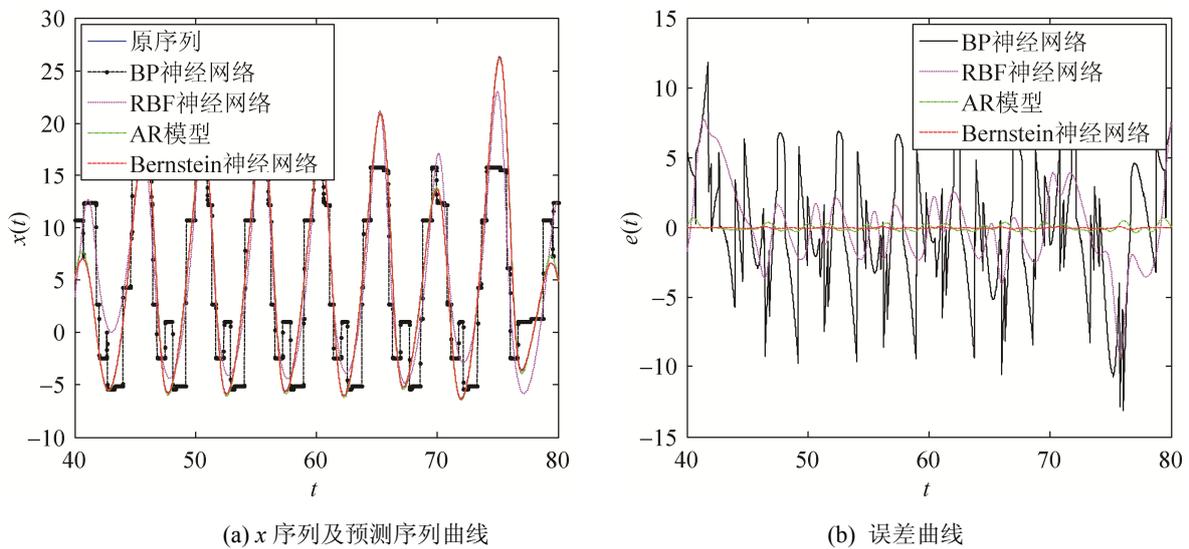


图6 预测分析图

为了分别定量比较模拟值、预测值与观测值的差异，引用3个误差评价指标<sup>[16]</sup>：

$$E_{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_{pi} - y_i| \quad (30)$$

$$E_{R^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{pi} - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (31)$$

$$E_{MSE} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_{pi} - y_i)^2} \quad (32)$$

其中， $y_{pi} (1 \leq i \leq n)$  为预测值； $y_i (1 \leq i \leq n)$  为观

测值； $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  为观测值的均值。

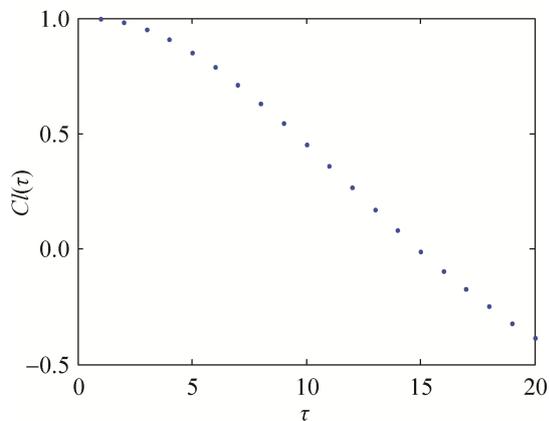
各种模型的误差定量评价如表2所示。

表2 各种预测模型误差评价表

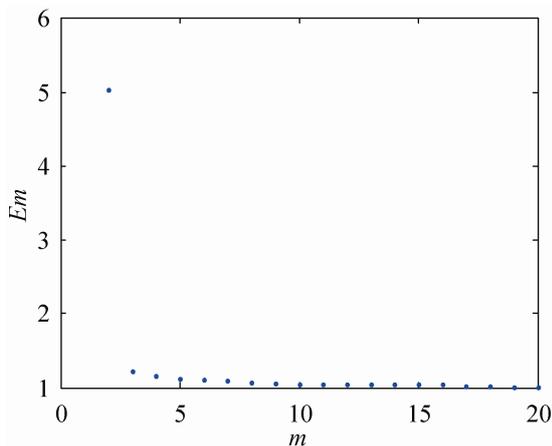
模型		BP神经网络	RBF神经网络	AR模型	Bernstein神经网络
模拟性能指标	$E_{MAE}$	3.239 6	2.256 9	0.141 8	0.031 3
	$E_{R^2}$	0.864 4	0.815 0	1.010 0	1.001 3
	$E_{MSE}$	4.251 5	2.915 7	0.181 2	0.041 1
预测性能指标	$E_{MAE}$	3.532 3	2.169 9	0.179 9	0.036 4
	$E_{R^2}$	0.879 6	0.872 3	1.014 3	1.002 3
	$E_{MSE}$	4.406 4	2.839 6	0.221 0	0.043 8

## 4.2 交通流系统

实时准确的交通流预测是交通控制和交通诱导的前提和关键。城市的交通流系统具有明显的混沌特性, 可根据采样的交通流数据对未来时刻的交通流进行预测, 以便交通管理。近年来, 对某一交通流繁多的市区路口进行了观测与记录, 每隔 7.2 小时观测一次, 共记录了 20 个月的 2 000 个交通流数据, 其中, 前 1 000 个点用来建立预测模型, 后 1 000 个点用来进行预测分析。利用所记录数据进行相空间重构, 如图 7 所示。



(a) 自相关函数离散图

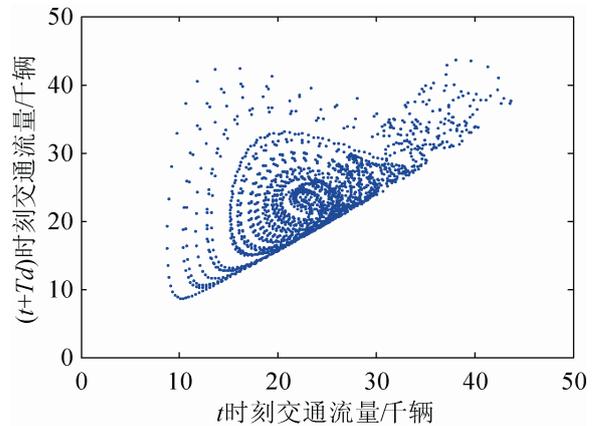


(b) Cao 方法离散图

图 7 相空间重构参数图

根据 1.1 节及图 7(a)得到最佳延迟时间  $\tau = 8$ , 根据 1.2 节及图 7(b)得到最小嵌入维数  $m = 9$ , 根

据得到的  $m$ ,  $\tau$  及 1.3 节得到最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max} = 2.9016 \times 10^{-4}$ 。由此可见,  $\lambda_{\max} > 0$ , 根据 1.3 节知该系统为混沌系统, 具有混沌特性。重构后的交通流吸引子轨迹图如图 8 所示。

图 8 交通流吸引子轨迹图( $Td = 0.01\tau$ )

利用相空间重构参数和交通流混沌时间序列, 得到重构时间延迟向量, 结合 Bernstein 神经网络预测模型, 利用 PSO 算法优化模型参数, 其参数实现如表 3 所示。

表 3 PSO 算法初始化及优化参数

初始化参数		优化参数	
$x_{\max}$	2	$r_1$	1.247 7
$v_{\max}$	0.2	$r_2$	0.086 0
$R$	10	$r_3$	-0.116 2
$Q$	40	$r_4$	1.450 9
$Gen$	30	$r_5$	0.627 4
$\omega$	$\omega_t$	$r_6$	0.058 0
$\eta_1$	2	$r_7$	0.474 7
$\eta_2$	2	$R_8$	-0.525 9
		$r_9$	0.324 4
		$x$	0.029 4

根据表 3 参数, 将 Bernstein 神经网络模型和传统的 AR 模型、RBF 神经网络模型、BP 神经网络模型比较, 各种预测模型仿真结果如图 9~10 所示。

各种模型的误差定量评价如表 4 所示。

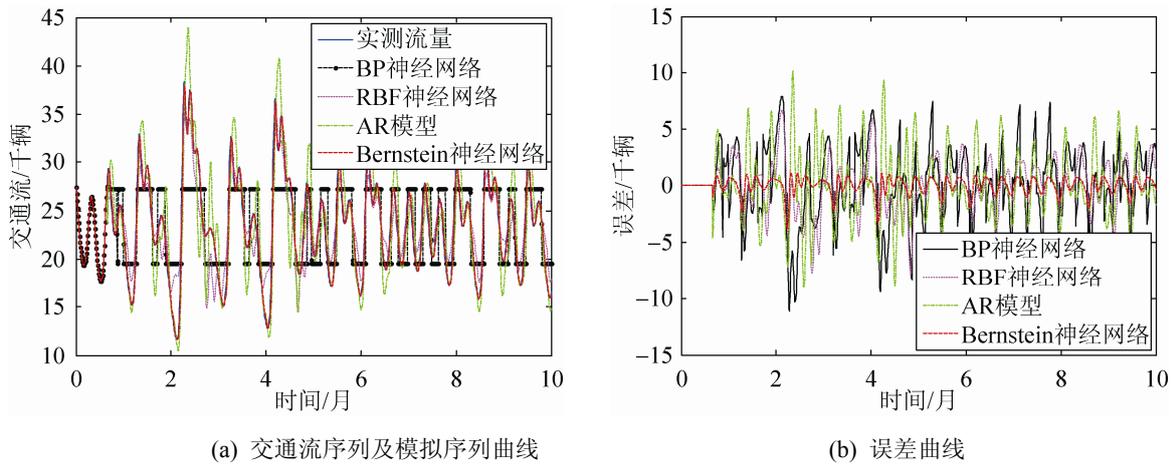


图9 建模分析图

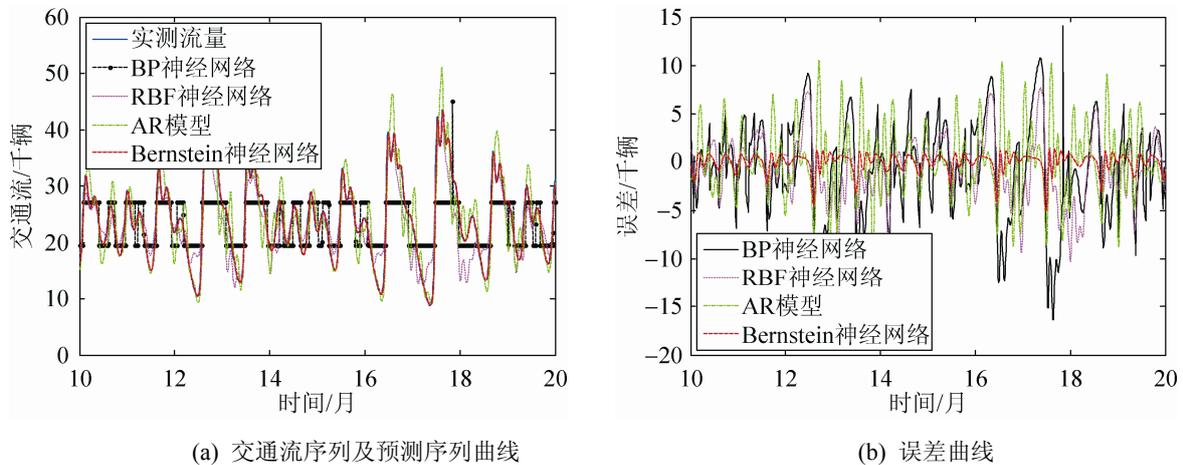


图10 预测分析图

表4 各种预测模型误差评价表

模型	BP神经网络	RBF神经网络	AR模型	Bernstein神经网络	
模拟性能指标	$E_{MAE}$	2.525 4	1.682 0	2.194 0	0.536 3
	$E_{R^2}$	0.590 6	0.594 0	1.404 7	0.980 9
	$E_{MSE}$	3.282 4	2.258 6	3.004 2	0.729 8
预测性能指标	$E_{MAE}$	3.861 0	2.585 1	2.768 8	0.651 4
	$E_{R^2}$	0.318 1	0.658 6	1.262 0	0.985 8
	$E_{MSE}$	4.977 0	3.374 6	3.633 1	0.931 7

### 4.3 性能分析

从图5~6、图9~10可以看出,不论是做建模,还是做预测,BP神经网络模型拟合不平滑、波动很大,使之偏差最大,次之为RBF神经网络模型或AR模型,精度最高的是Bernstein神经网络模型,几乎和原曲线重合。

从图5(b),图6(b),9(b),图10(b)及表2、表4可以看出,Bernstein神经网络模型的 $E_{MAE}$ , $E_{MSE}$ 约是AR模型的1/5~1/4、RBF模型的1/7~1/3,BP模型的1/10~1/5,Bernstein神经网络模型的 $E_{R^2}$ 相对其他模型更接近于1,说明Bernstein神经网络模型较AR模型、RBF神经网络模型、BP神经网络模型精度更高,预测更稳定。

## 5 结论

传统的混沌时间序列预测方法,常将相空间重构与AR模型、BP神经网络模型及RBF神经网络模型结合。与AR模型结合时,结构简单,但预测精度不够;与BP神经网络模型、RBF神经网络模型结合时,结构复杂,预测效果不好。因此,本文

提出了相空间重构与 Bernstein 神经网络组合预测模型。分别通过 Sprott-J 系统和交通流系统模型进行仿真实验, 并将 PSO 算法用于模型的参数优化。仿真结果表明, 本文所提方法不但结构简单, 而且预测精度高, 证明了该方法的有效性。因此, 可将相空间重构与 Bernstein 神经网络组合预测方法广泛应用于序列预测、系统辨识及故障诊断等领域。

### 参考文献:

- [1] CHAN Hsiao-Lung, WANG Chun-Li, FANG Shih-Chin, et al. Recognition of Ventricular Extrasystoles Over the Reconstructed Phase Space of Electrocardiogram [J]. *Annals of Biomedical Engineering* (S1573-9686), 2010, 38(3): 813-823.
- [2] Zhang Shuqing, Hu Yongtao, Bao Hongyan, et al. Parameters Determination Method of Phase-space Reconstruction Based on Differential Entropy Ratio and RBF Neural Network [J]. *Journal of Electronics (China)* (S1993-0615), 2014, 31(1): 61-67.
- [3] 蒋爱华, 周璞, 章艺, 等. 基于相空间重构离心泵基础振动的研究 [J]. *农业工程学报*, 2014, 30(2): 56-62.
- [4] 李鹤, 杨周, 张义民, 等. 基于径向基神经网络预测的混沌时间序列嵌入维数估计方法 [J]. *物理学报*, 2011, 60(7): 070512-1-070512-6.
- [5] 聂秋平, 吴敏, 杜友武, 等. 基于灰色RBF神经网络的炼钢煤气消耗预测 [J]. *系统仿真学报*, 2011, 23(11): 2460-2464. (Nie Qiuping, Wu Min, Du Youwu, et al. Gas Consumption Forecast Model in Steel Corporation Based on Grey RBF Neural Network [J]. *Journal of System Simulation* (S1004-731X), 2011, 23(11): 2460-2464.)
- [6] 田启川, 田茂新. 基于Fourier神经网络的图像复原算法[J]. *计算机应用研究*, 2012, 29(3): 1143-1145.
- [7] Tongal H, Berntgsson R. Phase-space Reconstruction and Self-exciting Threshold Modeling Approach to Forecast Lake Water Levels [J]. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* (S1436-3259), 2014, 28(4): 955-971.
- [8] 张淑清, 贾健, 高敏, 等. 混沌时间序列重构相空间参数选取研究 [J]. *物理学报*, 2010, 59(3): 1576-1582.
- [9] Sun Y, Zhou D, Rangan A V, et al. Pseudo-Lyapunov Exponents and Predictability of Hodgkin-Huxley Neuronal Network Dynamics [J]. *Journal of Computational Neuroscience* (S1573-6873), 2010, 28(2): 247-266.
- [10] 史丽晨, 段志善. 基于混沌—分形理论的往复式活塞隔膜泵磨损故障分析 [J]. *农业机械学报*, 2010, 41(4): 222-226.
- [11] Wu Zongmin, Sun Xingping, Ma Limin. Sampling Scattered Data with Bernstein Polynomials: Stochastic and Deterministic Error Estimates [J]. *Advances in Computational Mathematics* (S1572-9044), 2013, 38(1): 187-205.
- [12] 闫华, 魏平, 肖恩赐. 基于Bernstein多项式的自适应混沌时间序列预测算法 [J]. *物理学报*, 2007, 56(9): 5111-5118.
- [13] Lee S H, Chung K Y, Lim J S, et al. Detection of Ventricular Fibrillation Using Hilbert Transforms, Phase-space Reconstruction, and Time-domain Analysis [J]. *Personal and Ubiquitous Computing* (S1617-4917), 2014, 18(6): 1315-1324.
- [14] Zhong Yubin, Xiang Yi, Jiang Yuanbin, et al. A Hybrid Dynamic Multi-swarm PSO Algorithm with Nelder-mead Simplex Search Method [J]. *Journal of Computational Information Systems* (S1553-9105), 2013, 9(19): 7741-7748.
- [15] Kumar S, Chaturvedi D K. Optimal Power Flow Solution Using GA-Fuzzy and PSO-Fuzzy [J]. *Journal of the Institution of Engineering (India): Series B* (S2250-2114), 2014, 95(4): 363-368.
- [16] 孔玲爽, 阳春华, 桂卫华, 等. 氧化铝配料过程中返料成分的实时预测与仿真 [J]. *系统仿真学报*, 2010, 22(6): 1508-1511. (Kong Lingshuang, Yang Chunhua, Gui Weihua, et al. Real-time Prediction and Simulation of Returned Materials in Blending Process of Alumina Production [J]. *Journal of System Simulation* (S1004-731X), 2010, 22(6): 1508-1511.)