

7-2-2020

Performance Evaluation of Bayesian Estimator with Consistency Validation

Zuolei Sun

1. Information communication college, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China;;

Li Ying

1. Information communication college, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China;;

Zhang Bo

2. Shanghai Advanced Research Institute, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201210, China;

Zhang Wen

1. Information communication college, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China;;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Performance Evaluation of Bayesian Estimator with Consistency Validation

Abstract

Abstract: Considering the lack of sound evaluation method for Bayesian estimator design, an approach employing consistency as the core criterion was proposed. *By studying the unbiasedness and whiteness of innovation sequence yielded during observation update routine, the normalized innovations square (NIS) was constructed, and then the chi-square test being able to detect the Posterior's consistency was carried out on NIS.* Experiments demonstrate that the proposed algorithm can identify the inappropriate parameter configuration for both linear and nonlinear systems, therefore the performance of the estimators can be evaluated.

Keywords

Bayesian estimator, consistency, chi-square test, normalized innovations squared

Recommended Citation

Sun Zuolei, Li Ying, Zhang Bo, Zhang Wen. Performance Evaluation of Bayesian Estimator with Consistency Validation[J]. Journal of System Simulation, 2016, 28(3): 569-576.

基于一致性校验的贝叶斯估计器性能评估

孙作雷¹, 李影¹, 张波², 张文¹

(1. 上海海事大学信息工程学院, 上海 201306; 2. 中国科学院上海高等研究所, 上海 201210)

摘要: 针对贝叶斯估计器设计中缺乏严谨评估手段的问题, 提出以估计一致性作为表征贝叶斯估计器性能的核心指标。通过分析观测更新中新息序列的无偏性和白特性, 构造正则化新息平方序列, 并对它实施卡方校验以判断相应贝叶斯估计器后验概率的估计一致性。仿真结果表明所提算法能同时在线性及非线性系统中有效辨识贝叶斯估计器设计中不恰当的参数配置, 进而评估估计器性能。

关键词: 贝叶斯估计器; 一致性; 卡方检测; 正则化新息平方

中图分类号: TP13 文献标识码: A 文章编号: 1004-731X (2016) 03-0569-08

Performance Evaluation of Bayesian Estimator with Consistency Validation

Sun Zuolei¹, Li Ying¹, Zhang Bo², Zhang Wen¹

(1. Information communication college, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China;

2. Shanghai Advanced Research Institute, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201210, China)

Abstract: Considering the lack of sound evaluation method for Bayesian estimator design, an approach employing consistency as the core criterion was proposed. By studying the unbiasedness and whiteness of innovation sequence yielded during observation update routine, the normalized innovations square (NIS) was constructed, and then the chi-square test being able to detect the Posterior's consistency was carried out on NIS. Experiments demonstrate that the proposed algorithm can identify the inappropriate parameter configuration for both linear and nonlinear systems, therefore the performance of the estimators can be evaluated.

Keywords: Bayesian estimator; consistency; chi-square test; normalized innovations squared

引言

在实时的动力系统中, 如果已知系统的输出及包含噪声的观测量, 那么基于贝叶斯理论框架, 采用递归估计的手段能获取隐藏的状态信息, 这称为贝叶斯估计^[1]。近几十年来, 贝叶斯估计在国防、航空航天、机器人导航、目标追踪^[2]以及金融等领域发挥了重要作用。

搭建有效的贝叶斯估计器并调试适用于实际

问题的参数是颇具挑战性的工作, 在这一过程中, 选取恰当的性能评价指标, 探讨具有严谨概率基础的数理衡量手段是至关重要的。学者在该方向做了一定的探索, Ali-Löyty S^[3]等通过直接比较真实值和估计值之间的误差论证贝叶斯估计器的性能。Lei M 等^[4]基于贝叶斯递归的估计目标状态的均值和协方差近似表示其状态的后验分布来评估非线性追踪的性能。Kaess M^[5]等基于贝叶斯树数据结构根据系统状态的条件密度有选择地重复线性化, 通过仿真实验证明过程噪声配置的不恰当会降低估计器的估计精度。Huang G P^[6]等则从非线性估计器的搭建原理推导并阐明了线性化过程中雅可比矩阵的近似从本质上导致后验概率的



收稿日期: 2014-11-03 修回日期: 2015-05-14;
基金项目: 国家自然科学基金项目(61105097;
51279098, 61401270); 上海海事大学研究生创新基金(2015ycx059);
作者简介: 孙作雷(1982-), 男, 山东枣庄, 博士, 副教授, 研究方向为移动机器人导航、机器学习等。

<http://www.china-simulation.com>

• 569 •

不一致性。

然而, 这些学者的研究大多侧重于分析并挖掘降低贝叶斯估计器全局推理性能的原因, 并未给出明确的性能指标及能高效地校验估计器性能优劣的概率方法。Sussman D L^[7]等利用贝叶斯估计器对神经元的点积图进行分类, 仿真表明隐藏神经元位置的估计一致性对估计效果至关重要。故本文从贝叶斯估计方法的概率原理出发, 提出将贝叶斯估计器后验概率的估计一致性作为核心的性能评价指标, 并引入概率统计中的 χ^2 方法, 选择估计器观测更新中的新息(Innovation)做统计量实施 χ^2 检验, 进而验证估计一致性指标是否合理, 为了保证其严谨性, 同时考虑归一化新息序列的白特性, 作为估计器的性能评估的依据。最后, 在线性系统和非线性系统中搭建的仿真实验证明了本文所提方法的有效性。

1 迭代贝叶斯估计器

1.1 概率框架

迭代贝叶斯估计的核心思想是利用系统状态的先验信息估计相应状态的后验概率密度函数^[8]。假设已知 $t=0$ 时刻系统状态的先验概率分布为 $p(\mathbf{x}_0)$, \mathbf{x}_t 和 \mathbf{z}_t 分别表示 t 时刻系统的状态向量和观测向量, $\mathbf{Z}^t = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_t\}$ 表示1到 t 时刻所有观测向量的集合, 条件概率 $p(\mathbf{x}_t / \mathbf{Z}^t)$ 表示 t 时刻系统的后验概率密度函数, 根据条件概率和贝叶斯法则, 可得:

$$p(\mathbf{x}_t / \mathbf{Z}^t) = \frac{p(\mathbf{z}_t / \mathbf{x}_t) p(\hat{\mathbf{x}}_t / \mathbf{Z}^{t-1})}{p(\mathbf{z}_t / \mathbf{Z}^{t-1}) \eta p(\mathbf{z}_t / \mathbf{x}_t) p(\hat{\mathbf{x}}_t / \mathbf{Z}^{t-1})} \quad (1)$$

式(1)中使用了观测之间相互独立的假设条件, $p(\mathbf{x}_t / \mathbf{Z}^t)$ 由系统已经得到的 t 个观测估计得到, 表征 t 时刻状态的估计量 $\hat{\mathbf{x}}_t$, 并非真实状态。设 η 表示归一化参数, 可通过式(2)计算:

$$\frac{1}{\eta} = p(\mathbf{z}_t / \mathbf{Z}^{t-1}) = \int p(\mathbf{z}_t / \mathbf{x}_t) p(\hat{\mathbf{x}}_t / \mathbf{Z}^{t-1}) d\mathbf{x}_t \quad (2)$$

其中, $p(\hat{\mathbf{x}}_t / \mathbf{Z}^{t-1})$ 表示 t 时刻的先验概率。根据全

概率公式, 该先验信息可展开为:

$$p(\hat{\mathbf{x}}_t / \mathbf{Z}^{t-1}) = \int p(\hat{\mathbf{x}}_t / \mathbf{x}_{t-1}) p(\mathbf{x}_{t-1} / \mathbf{Z}^{t-1}) d\mathbf{x}_{t-1} \quad (3)$$

将式(2)、(3)带入式(1)中, 可以得到迭代贝叶斯估计的递推公式如下:

$$p(\mathbf{x}_t / \mathbf{Z}^t) = \eta p(\mathbf{z}_t / \mathbf{x}_t) \int p(\hat{\mathbf{x}}_t / \mathbf{x}_{t-1}) p(\mathbf{x}_{t-1} / \mathbf{Z}^{t-1}) d\mathbf{x}_{t-1} \quad (4)$$

从式(4)可以看出, 迭代贝叶斯估计器是一个循环估计的过程, 当前时刻状态向量的后验概率密度函数 $p(\mathbf{x}_t / \mathbf{Z}^t)$ 只与当前时刻的观测向量 \mathbf{z}_t 、状态转移概率 $p(\hat{\mathbf{x}}_t / \mathbf{x}_{t-1})$ 以及前一时刻的后验概率 $p(\hat{\mathbf{x}}_t / \mathbf{Z}^{t-1})$ 有关。故 $\mathbf{Z}^t = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_t\}$ 提供的观测信息, 可作为参考量来估计系统状态的后验概率密度函数 $p(\mathbf{x}_t / \mathbf{Z}^t)$, 衡量贝叶斯估计器的估计性能, 校验其估计质量。

1.2 观测更新中的信息

贝叶斯估计器的循环估计可以分为两个重要的更新过程: 预测更新和观测更新^[8]。通常, 式(3)表示的过程称作预测更新, 式(4)称作观测更新, 交替进行2个更新过程就可以实现迭代贝叶斯估计。由于在估计器的实际应用中, 系统的真实状态值往往难以获得, 观测向量 \mathbf{z}_t 成为可以得到的唯一有效信息。因此, 完整包含了观测信息的新息成为贝叶斯估计器的重要环节。新息 \mathbf{Y}_t 定义为实际观测向量 \mathbf{z}_t 与预测观测向量 $\hat{\mathbf{z}}_t$ 之间的差值:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_t \quad (5)$$

其中: \mathbf{z}_t 表示系统通过各种传感器等工具获得的实际观测数值; 而 $\hat{\mathbf{z}}_t = E[\mathbf{z}_t / \mathbf{Z}^{t-1}]$ 则表示当前时刻观测的条件均值。

如何利用后验概率密度和新息校验贝叶斯估计器的性能是本文的关键。

2 基于 χ^2 的一致性校验

2.1 估计一致性

传统的研究中, 评估估计器的性能通常使用

两类方法。第 1 类, 比较估计状态的真实值和估计值之间的误差, 观察标准状态估计误差平方 (Normalized State Estimated Error Square)^[9]是否满足无偏性, 但由于状态真实值难以获得, 该方法在工程中难以实施。第 2 类, 直接观察新息序列的变化趋势, 这类方法本质上利用了新息序列的无偏性, 但仅通过 $3-\sigma$ 原则校验却忽略了新息的白特性 (White)。针对传统方法的不足, 本文从估计状态的后验概率密度函数出发, 提出以估计一致性 (Consistency) 表征贝叶斯估计器性能。一致性主要是指估计状态向量与真实状态向量服从的概率分布差异较小, 趋于一致。因此, 如果估计器满足无偏性, 也就满足一致性, 即:

$$\hat{x}_t = E[x_t | Z^t] \quad (6)$$

由于状态向量是直接观测的基础上获得的, 仅考虑了观测噪声, 并没有考虑运动过程中带来的过程噪声, 故本文并没有直接利用状态向量衡量估计器的一致性, 而是选择对同时考虑观测噪声和过程噪声的新息序列实施 χ^2 检测的方法校验估计器是否满足一致性。

2.2 χ^2 检测的原理

χ^2 检测是一种广泛应用的统计假设检验^[3]方法。设 r_1, r_2, \dots, r_n 表示一组独立同分布的 m 维样本随机变量, $H_0: r_i \sim N(\mu, \Sigma) (i=1, 2, \dots, n)$ 表示构造的原假设, 依据概率论的知识可知: $R_i = (r_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (r_i - \mu) \sim \chi^2(m)$, 对样本 R_i 求统计平均得:

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i \quad (7)$$

所以, 可以得到:

$$n\bar{R} = \sum_{i=1}^n R_i \sim \chi^2(nm) \quad (8)$$

根据 χ^2 分布的性质, 有 $E[\bar{R}] = m$ 。

为了检验原假设中 r_i 服从均值为 μ , 方差为 Σ 的高斯分布的假设是否正确, 选取 $n\bar{R}$ 作校验统计量并以 $1-\alpha$ 作置信水平进行假设检验, 即:

$$P(n\bar{R}) \in [\chi_{nm}^2(\frac{\alpha}{2}), \chi_{nm}^2(1-\frac{\alpha}{2}) | H_0] = 1-\alpha \quad (9)$$

若设 $1-\alpha=0.95$, 则 \bar{R} 的置信区间为:

$$[b_{low}, b_{up}] = [\frac{\chi_{nm}^2(0.025)}{n}, \frac{\chi_{nm}^2(0.975)}{n}] \quad (10)$$

也就是说, 当 \bar{R} 落在上述置信区间内时, 原假设 H_0 正确, 否则, 应该拒绝原假设。

根据上面的原理, 若假设估计器满足一致性, 则新息序列 Y_t 应该服从均值为零的高斯分布, 设其方差为 Σ_t , 以此作为原假设 H_0 , 并构造正则化新息平方 (Normalized Innovation Square)^[9]:

$$q_t = (Y_t - 0)^T \Sigma_t^{-1} (Y_t - 0) = Y_t^T \Sigma_t^{-1} Y_t \quad (11)$$

同理, q_t 服从自由度为 $\dim(z_t) = m$ 的 χ^2 分布, 其中 \dim 用来求取向量的维数。

为了获得 χ^2 检验中需要的样本, 采用蒙特卡洛方法运行估计器 N 次, 得到 N 个相互独立的样本序列 $q_t^i (i=1, 2, \dots, N)$, 计算出样本均值为:

$$\bar{q}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_t^i \quad (12)$$

因此, $N\bar{q}_t$ 也服从自由度为 Nm 的 χ^2 分布。由于在一致性假设条件下, 新息序列满足白噪声性, 故具有遍历性, 可用下式的时间均值代替式 (12) 中的样本均值:

$$\bar{q}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_t \quad (13)$$

因此, $E[\bar{q}_t] = m$, 且相应的 95% 置信区间为 $[\frac{\chi_{Nm}^2(0.025)}{N}, \frac{\chi_{Nm}^2(0.975)}{N}]$ 。

如果实验结果表明 \bar{q}_t 确实落在上面的置信区间内, 则以 95% 的概率认为原假设成立, 该估计器满足估计一致性, 性能良好, 否则可以初步判断估计器设计中存在导致其性能下降的问题。

2.3 白特性检测的原理

当滤波器满足一致性假设条件时, 新息序列是零均值的白噪声序列, 满足白特性。为了更严格、精确的方法检验滤波器的一致性, 在检验验证新息无偏性的同时, 还要验证其是白噪声序列。

假设新息序列是白噪声序列, 则它必须满足:

$$E[Y_t^T(i)Y_t(j)] = S(i)\delta_{ij} \quad (14)$$

其中, $S(i)$ 表示零均值新息序列的协方差矩阵, 为了验证式(14)的正确性, 计算新息序列的自相关函数 $R(\tau)$:

$$R(\tau) = E[Y_t^T(i)Y_t(i+\tau)] \quad (15)$$

根据新息序列式白噪声的假设, 具有平稳遍历的特性, 故可以用时间均值代替统计平均值:

$$R(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{i=0}^{N-\tau-1} Y_t^T(i)Y_t(i+\tau) \quad (16)$$

归一化后 $R(0)=1$, 因此, 只要将归一化新息序列的自相关函数计算出来, 在某个合理的边界范围内, 检验新息序列自相关函数曲线的随机成分是否为零, 如果为零说明新息序列满足白特性, 否则不满足白特性。对于足够大的样本量 N , $R(\tau)$ 的检测统计近似是标准误差为 $1/\sqrt{N}$ 的正态分布。因此, 新息序列归一化自相关函数 95% 的置信区间大约是 $[-2|\sqrt{N}, 2|\sqrt{N}]$, 只要归一化自相关函数 95% 落在这个区间内, 就认为对应的新息序列满足白特性, 反之, 不满足白特性。

3 仿真及结果

在工程实践中, 由于真实物理过程中的噪声是未知的, 故设计贝叶斯估计器时, 对过程噪声和观测噪声的配置是否与未知的真实噪声相匹配是影响估计器性能的关键。为了全面验证本文所提方法的有效性, 分别针对线性估计器和非线性估计器进行实验。使用设置偏离真值噪声的方式来模拟贝叶斯估计器性能不佳的情况, 分别讨论过程噪声不匹配、观测噪声不匹配及两者都匹配这 3 种情况, 从新息序列一致性和白特性这 2 方面校验是否能正确评估出估计器的性能。

3.1 线性贝叶斯估计器

假设一刚体粒子以二维常速度运动, 其状态向量为 $x_t = [x_t, v_t^x, y_t, v_t^y]^T$, 该刚体粒子所搭载位

置传感器的观测向量为 $z_t = [z_t^x, z_t^y]^T$ 。设 v 表示粒子运动的恒定速度, $u_t = [c_t^x, c_t^y]^T$ 表示驱动粒子运动的控制量, 系统中的过程噪声为 $w_t = [w_{c_x}, w_{c_y}]^T$, 观测噪声为 $v_t = [v_{z_x}, v_{z_y}]^T$, 则系统运动模型为:

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} \Delta t & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w_t \quad (17)$$

观测模型为:

$$z_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_t + v_t \quad (18)$$

其中, 噪声均为高斯白噪声 $w_t \sim N(0, Q)$, $v_t \sim N(0, R)$, Q 为过程噪声的协方差矩阵, R 为观测噪声的协方差矩阵。在实验中, 通过调整滤波器设计中的两类噪声协方差与真值之间的比例来模拟由于估计器设计不恰当而使估计性能下降的情况。实验中设 $v = 3m/s$, $\Delta t = 1s$, 且估计器独立运行的次数为 $N = 100$ 。根据 2.3 节, 可知新息归一化自相关函数 95% 的置信区间为 $[-0.2, 0.2]$ 。

3.1.1 线性估计器过程噪声不匹配

在观测噪声和其真实噪声相匹配的情况下, 过程噪声分别被设置为真实噪声的 0.1 倍、0.2 倍、1 倍、20 倍和 50 倍, 来验证过程噪声对贝叶斯估计器一致性的影响, 其正则化新息平方的均值对应于图 1(a)。

当过程噪声欠估计(被设置为真实噪声的 0.1 倍和 0.2 倍, 分别对应与上方的双划线和点划线)时, 在 40 s 后, 其对应的正则化新息平方的均值都落在 95% 置信区间的上侧, 新息序列不满足一致性。当过程噪声过估计(被设置为真实噪声的 20 倍和 50 倍, 分别对应与下方的双划线和点划线)

时, 其对应的正则化新息平方的均值都落在 95% 置信区间的下侧, 新息序列不满足一致性。因此, 本文方法能检测出线性估计器过程噪声欠估计和过估计时的性能下降。

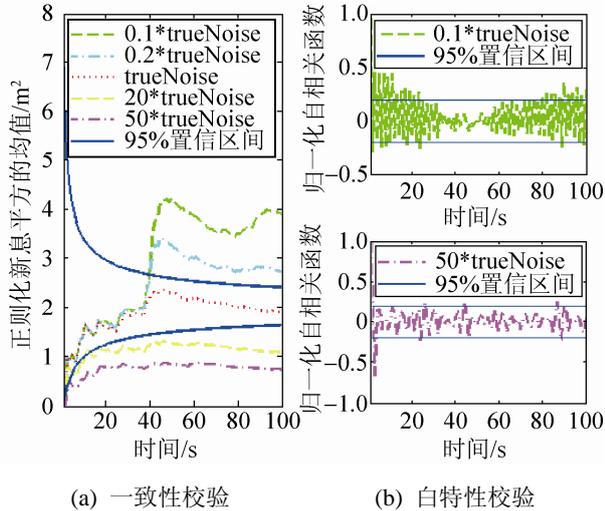


图 1 不同配置的过程噪声采用本文方法对线性估计器的校验结果

利用新息序列的归一化自相关函数验证新息序列的白特性, 图 1(b)上角的子图, 是过程噪声欠估计(被设定为真实噪声的 0.1 倍)时, 其并不全在 95% 的置信区间内, 不满足白特性。图 1(b)下角的子图, 表示过程噪声过估计(被设定为真实噪声的 50 倍)时, 其落在其 95% 的置信区间满足白特性。

3.1.2 线性估计器观测噪声不匹配

由于观测噪声直接影响刚体粒子的位置, 而过程噪声是通过影响速度进而影响位置, 故估计器对观测噪声更敏感。为了校验不同配置的观测噪声对应估计器的性能, 在过程噪声和其真实噪声相匹配的情况下, 观测噪声分别被设置为真实噪声的 0.7 倍、0.8 倍、1 倍、2 倍和 10 倍, 其正则化新息平方的均值对应于图 2(a)。

当观测噪声欠估计(被设置为真实噪声的 0.7 倍和 0.8 倍, 分别对应与上方的双划线和点划线)时, 在 40 s 后, 其对应的正则化新息平方的均值

都落在 95% 置信区间的上侧, 新息序列不满足一致性。当观测噪声过估计(被设置为真实噪声的 2 倍和 10 倍, 分别对应与下方的双划线和点划线)时, 其对应的正则化新息平方的均值都落在 95% 置信区间的下侧, 新息序列仍然不满足一致性。因此, 本文方法能检测出线性估计器观测噪声欠估计和过估计时的性能下降。

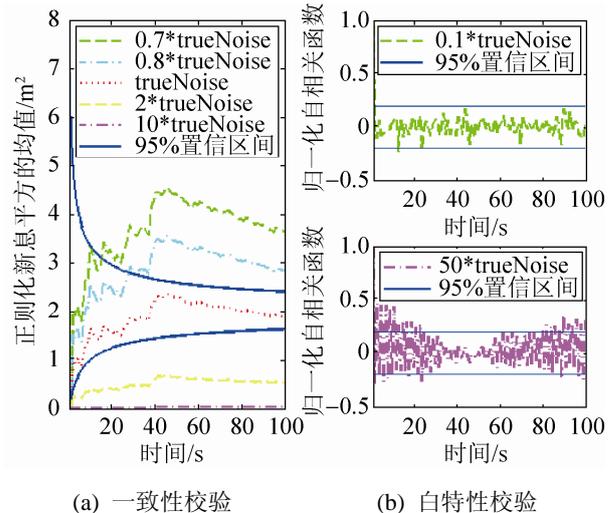
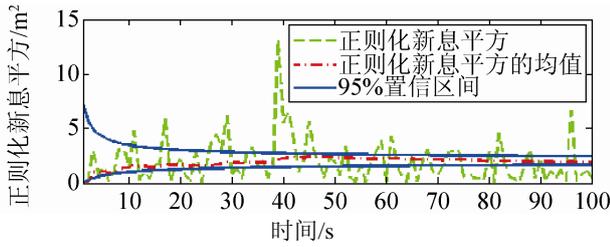


图 2 不同配置的观测噪声采用本文方法对线性估计器的校验结果

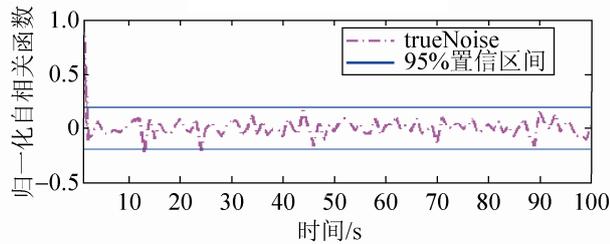
同样, 采用新息序列的归一化自相关函数验证新息序列的白特性, 图 2(b)上角的子图是观测噪声欠估计(被设定为真实噪声的 0.7 倍), 新息序列的自相关函数在其 95% 的置信区间内, 满足白特性。图 2(b)下角的子图是观测噪声过估计(被设定为真实噪声的 10 倍), 其自相关函数并不完全落在其 95% 的置信区间不满足白特性。

3.1.3 线性估计器噪声匹配

使用真实的噪声水平的结果示于图 3, 正则化新息平方的均值很好地带限于置信区间内, 并最终收敛到 2, 与观测向量 z_t 的维数相同, 如前所述, 这证明正则化新息平方序列满足 χ^2 分布, 可判定估计器满足一致性, 性能优异。同样新息序列的归一化自相关函数在 95% 的置信区间内平稳的收敛于 0, 满足白特性。



(a) 一致性校验



(b) 白特性校验

图 3 本文方法对线性估计器性能正常时的校验结果

3.2 非线性贝叶斯估计器

实验基于搭载了室内二维激光传感器的 Pioneer 机器人平台所采集的激光粒子云数据进行, 在 320 m 的行进过程中, 共采集了 2 610 束激光粒子云, 采用文献[10]所述方法, 解算出 2 609 组相对运动, 作为系统控制量。 $\mathbf{x}_t = [x_t, y_t, \theta_t]^T$ 表示载体状态向量, 其中, θ_t 为载体的航向角。系统观测向量为 $\mathbf{z}_t = [r_t, b_t]^T$, 其中 r_t 表示载体到传感器之间的距离, b_t 表示载体与传感器之间的夹角。

过程噪声 $\mathbf{w}_t = [w_x, w_y, w_\theta]^T \sim N(0, \mathbf{Q})$, 观测噪声 $\mathbf{v}_t = [v_z, v_\alpha]^T \sim N(0, \mathbf{R})$, 其中, \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 为相应噪声的协方差矩阵。系统的运动模型:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} \cos(\theta_t) & -\sin(\theta_t) & 0 \\ \sin(\theta_t) & \cos(\theta_t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_t \\ \Delta y_t \\ \Delta \theta_t \end{bmatrix} + \mathbf{w}_t \quad (19)$$

观测模型可表示为:

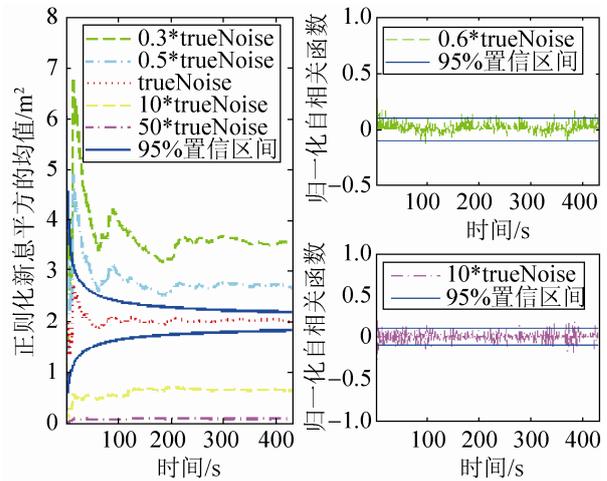
$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} r_t \\ b_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_t - x_s)^2 + (y_t - y_s)^2} \\ \arctan \frac{y_t - y_s}{x_t - x_s} \end{bmatrix} + \mathbf{v}_t \quad (20)$$

其中, (x_s, y_s) 表示传感器的位置坐标。为了使仿真效果图更清晰, 实验中仅采用其中的部分

数据(250~2 400 的束激光粒子云, 每 5 束选取一组数据), 故采样个数 $N = 431$, 根据 2.3 节, 可知新息序列归一化自相关函数的 95% 置信区间为 $[-0.0963, 0.0963]$ 。与 3.1 节相似, 分 3 种情况讨论实验结果。

3.2.1 非线性估计器过程噪声不匹配

在观测噪声和其真实噪声相匹配的情况下, 过程噪声分别被设置为真实噪声的 0.3 倍、0.5 倍、1 倍、10 倍和 50 倍, 来验证过程噪声的不同配置对贝叶斯估计器一致性的影响, 其正则化新息平方的均值对应于图 4(a)。



(a) 一致性校验

(b) 白特性校验

图 4 不同配置的过程噪声采用本文方法对非线性估计器的校验结果

当过程噪声欠估计(被设置为真实噪声的 0.3 倍和 0.5 倍, 分别对应于上方的双划线和点划线)时, 其对应的正则化新息平方的均值都落在 95% 置信区间的上侧, 不满足一致性。当过程噪声过估计(被设置为真实噪声的 10 倍和 50 倍, 分别对应于下方双划线和点划线)时, 其对应的正则化新息平方的均值都落在 95% 置信区间的下侧, 仍然不满足一致性。因此, 本文方法能检测出非线性估计器过程噪声欠估计和过估计时的性能下降。

采用新息序列的归一化自相关函数验证新息序列的白特性, 图 4(b)上角的子图是过程噪声欠

估计(被设定为真实噪声的 0.3 倍), 勉强在 95% 的置信区间内满足白特性, 但当过程噪声继续减小时, 其将不再满足白特性。图 4(b)下角的子图, 表示过程噪声过估计(被设定为真实噪声的 50 倍), 其落在 95% 的置信区间满足白特性。

3.2.2 非线性估计器观测噪声不匹配

为了验证不同配置的观测噪声对估计器性能的影响, 在过程噪声和其真实噪声相匹配的情况下, 观测噪声分别被设置为真实噪声的 0.6 倍、0.8 倍、1 倍、2 倍和 10 倍, 其正则化新息平方的均值对应于图 5(a)。

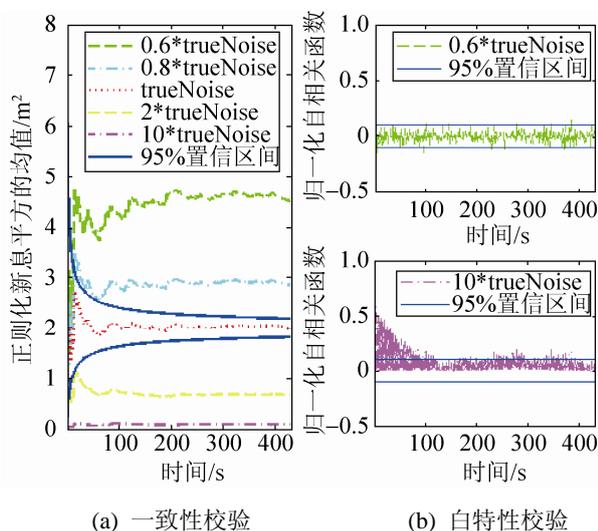


图 5 不同配置的观测噪声采用本文方法对非线性估计器的校验结果

当观测噪声欠估计(被设置为真实噪声的 0.6 倍和 0.8 倍, 分别对应与上方双划线和点划线)时, 其对应的正则化新息平方的均值都落在 95% 置信区间的上侧, 不满足一致性。当观测噪声过估计(被设置为真实噪声的 2 倍和 10 倍, 分别对应与下方的双划线和点划线)时, 其对应的正则化新息平方的均值都落在 95% 置信区间的下侧, 仍不满足一致性。因此, 本文方法能检测出非线性估计器观测噪声欠估计和过估计时的性能下降。

采用新息序列的归一化自相关函数验证新息

序列的白特性, 图 5(b)上角的子图, 是观测噪声欠估计(被设定为真实噪声的 0.6 倍)时, 其自相关函数在 95% 的置信区间内, 满足白特性。图 5(b)下角的子图, 表示观测噪声过估计(被设定为真实噪声的 10 倍)时, 其自相关函数并不完全落在其 95% 的置信区间, 不满足白特性。

3.2.3 非线性估计器噪声匹配

非线性估计器使用真实的噪声水平的结果示于图 6, 正则化新息平方的均值很好地带限于置信区间内, 并最终收敛到 2, 与观测向量 z 的维数相同, 如前所述, 这证明正则化新息平方序列满足 χ^2 分布, 可判定估计器满足一致性, 性能优异。同时, 新息序列的归一化自相关函数在 95% 的置信区间内平稳的收敛于 0, 满足白特性。

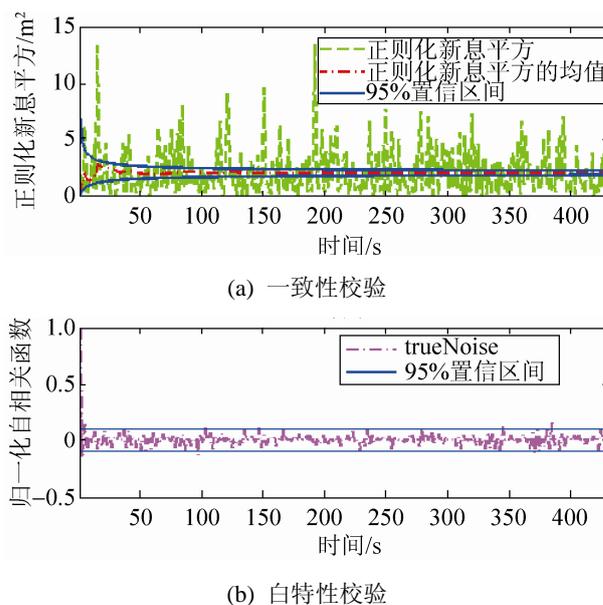


图 6 本文方法对非线性估计器性能正常时的校验结果

实验结果表明, 在线性和非线性估计器设计过程中, 本文所提方法均能检测出, 由于过程噪声和观测噪声的配置不匹配真实噪声带来贝叶斯估计器性能的下降。直接根据正则化新息平方均值函数是否落在其 95% 的置信区间内来判断其是否满足一致性, 甚至可以判断其是噪声的过估计还是欠估计导致的性能不佳, 若对过程噪声或观

测噪声欠估计, 会导致正则化新息平方的均值高于其对应的 95% 置信区间的上边界。若对过程噪声或观测噪声过估计, 会导致正则化新息平方的均值低于其相应 95% 置信区间的下边界。

利用新息序列归一化自相关函数是否满足白特性, 来判断过程噪声和观测噪声相对其真实噪声的偏离程度。若过程噪声相对其真实噪声的偏离程度小于观测噪声相对其真实噪声的偏离程度, 其对应的新息序列不满足白特性。相反, 若过程噪声相对其真实噪声的偏离程度大于观测噪声相对其真实噪声的偏离程度, 其对应的新息序列满足白特性。

4 结论

本文提出一种通过对正则化新息平方实施 χ^2 假设检验, 并对新息进行白特性检测来评估贝叶斯估计器性能优劣的方法。实验结果表明, 该方法能清晰有效地检测出由于线性和非线性贝叶斯估计器设计失误而引入的不恰当参数, 进而检验贝叶斯估计器的一致性和白特性, 判断其性能的优劣, 为贝叶斯估计器的设计提供初步的判断依据。不过, 如何寻找可以指导噪声参数配置的量化指标, 则是需要进一步探讨的难题。

参考文献:

- [1] Bergman N. Recursive Bayesian Estimation [D]. Sweden: Department of Electrical Engineering, Linköping University, Linköping Studies in Science and Technology, 1999: 579-586.
- [2] Zheng Y, Niu R, Varshney P K. Sequential Bayesian estimation with censored data for multi-sensor systems [J]. Signal Processing, IEEE Transactions on (S0165-1684), 2014, 62(10): 26-41.
- [3] Ali-Löytty S, Sirola N, Piché R. Consistency of three Kalman filter extensions in hybrid navigation [C]// Proceedings of The European Navigation Conference on GNSS, Munich, Germany. Finland: Tampereen teknillinen yliopisto (Tampere University of Technology), 2005: 1049-1056.
- [4] Lei M, van Wyk B J, Qi Y. Online estimation of the approximate posterior cramer-rao lower bound for discrete-time nonlinear filtering [J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on (S0885-8985), 2011, 47(1): 37-57.
- [5] Kaess M, Johannsson H, Roberts R, et al. iSAM2: Incremental smoothing and mapping with fluid relinearization and incremental variable reordering [C]// Proceedings of the Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on. USA: IEEE, 2011: 32(8): 1-8.
- [6] Huang G P, Mourikis A I, Roumeliotis S I. Observability-based rules for designing consistent EKF SLAM estimators [J]. The International Journal of Robotics Research (S0278-3649), 2010, 29(5): 20-28.
- [7] Sussman D L, Tang M, Priebe C E. Consistent latent position estimation and vertex classification for random dot product graphs [J]. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on (S0162-8828), 2014, 36(1): 48-57.
- [8] Dudek G, Jenkin M. Computational principles of mobile robotics [M]. UK: Cambridge University Press, 2010.
- [9] Schlosser M S, Kroschel K. Limits in tracking with extended Kalman filters [J]. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on (S0018-9251), 2004, 40(4): 1-9.
- [10] Lu F, Milios E. Robot pose estimation in unknown environments by matching 2d range scans [J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems (S0921-0296), 1997, 18(3): 49-75.