Journal of System Simulation

Volume 28 | Issue 1 Article 4

7-2-2020

Effectiveness Equivalent and Multi-effectiveness Equivalent of Weapon System

Zhongren Ni
1. Army 63961, Beijing 100012, China;;2. Science and Technology on Complex Land Systems Simulation Laboratory, Beijing 100012, China;;

Zhiqiang Zhao
2. Science and Technology on Complex Land Systems Simulation Laboratory, Beijing 100012, China;;3. College of Mechaeronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410031, China;

Yueping Wang
1. Army 63961, Beijing 100012, China;;2. Science and Technology on Complex Land Systems Simulation Laboratory, Beijing 100012, China;;

Abstract

Abstract: Equivalent analysis based on weapon effectiveness, which was conducted during 1960s-1970s by American scholars, provided scientific method for equivalent analysis of weapon system. But this principle can only be used under *the* given conditions, which was pointed out by American scholars. That how to judge solution existence of effectiveness equivalent model under given conditions and remove limit is always a difficult question of perplexing weapon system analysis. *By the use of special matrix theory and set decomposition principle, weapon coordination model of weapon system of systems combat was established, down-triangle matrix standard model of efficacy matrix was obtained, the existence problems of effectiveness equivalent model solution was solved from this starting point, multi-effectiveness equivalent principle was raised, effectiveness equivalent model was expanded, all of which provide a new method for equivalent analysis of weapon system.*

Keywords

equivalent analysis of weapon system, equivalent analysis of weapon system, equivalent equivalent, multi- equivalent equivalent

第 28 卷第 1 期　　系统仿真学报©　　Vol. 28 No. 1
2016 年 1 月　　Journal of System Simulation　　Jan., 2016

武器系统的效能等效与多重效能等效

倪忠仁 [1,2]，赵志强 [2,3]，王月平 [1,2]
（1.63961 部队，北京　100012；2.复杂地面系统仿真重点实验室，北京　100012；3.国防科技大学机电工程与自动化学院，湖南　长沙　410031）

摘要：上世纪六七十年代美学者开展的基于武器效能的等效分析，为武器系统的等效分析提供了科学方法。但正如美学者当初所指出的，该原理只能在一定条件下使用。如何判定在给定条件下效能等效模型的可解性，排除局限，一直是困扰武器系统分析领域的难题。*运用特殊矩阵理论和集合分解原理，建立了武器装备体系对抗的武器协作模型，得到了效能矩阵的下三角块矩阵标准型，以此为出发点，破解了效能等效模型解的存在性问题，提出了多重效能等效原理，拓展了效能等效模型，摆脱了其适用范围的局限，为武器系统的等效分析提供了一种新方法。*

关键词：武器系统效能分析；武器系统等效分析；效能等效；多重效能等效
中图分类号：TP391.9　　文献标识码：A　　文章编号：1004-731X (2016) 01-0027-10

Effectiveness Equivalent and Multi-effectiveness Equivalent of Weapon System

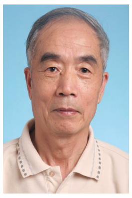
Ni Zhongren[1,2], *Zhao Zhiqiang*[2,3], *Wang Yueping*[1,2]
(1. Army 63961, Beijing 100012, China; 2. Science and Technology on Complex Land Systems Simulation Laboratory, Beijing 100012, China; 3. College of Mechaeronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410031, China)

Abstract: Equivalent analysis based on weapon effectiveness, which was conducted during 1960s-1970s by American scholars, provided scientific method for equivalent analysis of weapon system. But this principle can only be used under *the* given conditions, which was pointed out by American scholars. That how to judge solution existence of effectiveness equivalent model under given conditions and remove limit is always a difficult question of perplexing weapon system analysis. *By the use of special matrix theory and set decomposition principle, weapon coordination model of weapon system of systems combat was established, down-triangle matrix standard model of efficacy matrix was obtained, the existence problems of effectiveness equivalent model solution was solved from this starting point, multi-effectiveness equivalent principle was raised, effectiveness equivalent model was expanded, all of which provide a new method for equivalent analysis of weapon system.*

Keywords: equivalent analysis of weapon system; equivalent analysis of weapon system; equivalent equivalent; multi- equivalent equivalent

引言

武器系统的等效分析，是对武器装备体系对抗仿真结果开展综合分析的关键与基础。早在上世纪六七十年代，美学者 W. H. Holter，D. R. Howes 和 R. M. Thrall 等开展了基于武器毁伤率的等效分析[1-2]，应用求矩阵特征值和特征向量的技术解决了不同武器的等效问题，并运用于多兵种交战的兰切斯特(Lanchester)战斗方程，为在作战与训练中开展兵力规划提供参考依据，取得了一系列重要成果与结论。我军开展这方面的研究始于上世纪八十年



收稿日期：2014-08-04　　修回日期：2014-10-08;
作者简介：倪忠仁(1939-), 男，江苏靖江，硕士，高工，研究方向为系统分析；赵志强(1972-), 男，山东广饶，博士生，高工，研究方向为系统建模与仿真。

第 28 卷第 1 期 系统仿真学报 Vol. 28 No. 1
2016 年 1 月 Journal of System Simulation Jan., 2016

代。当时，我们开发了一些规模较大的作战仿真系统。为了对仿真输出结果进行分析处理，我们采用类似的技术确定不同武器的权重，实现了数据融合和效能综合，为体系评估和结构优化提供了有效支持。此后，军内有关单位相继开展这方面研究，取得了积极成效[3]。

但是，无论是美学者当初提出的基于毁伤率的效能等效，还是我们在上世纪开展的基于对抗仿真输出结果的效能等效，都只能在一定条件下展开，当对抗双方的效能矩阵出现退化时，就无法对全部参战武器实现等效。这是传统效能等效原理的致命缺陷，严重制约了它的推广应用。如何判定效能等效模型解的存在性，摆脱模型局限，一直是困扰武器系统分析领域的难题。

我们经过长期、深入探索，终于发现，在武器装备体系对抗中，双方体系内武器之间的相互协助关系是导致效能矩阵退化的内在因素。据此，我们建立了武器协作模型，给出了体系内各种武器新的排序方式，使效能矩阵呈现下三角块的标准型。以此为出发点，彻底破解了效能等效模型解的存在性问题，提出了多重效能等效原理，推广了效能等效原理，为摆脱其局限取得了突破性进展，大大拓展了适用范围，为武器系统的等效分析提供了一种新的有效方法。

1 效能等效解的存在性

在武器装备体系对抗仿真实验中，红军有 m 种武器系统，蓝军有 n 种武器系统。红军某种武器的效能表现为毁伤蓝军各种武器的件数，同样地，蓝军某种武器的效能表现为毁伤红军各种武器的件数。显见，一种武器的效能包含多个毁伤数，无法进行排序和分析比较，为了实现效能综合，就必须对各种武器系统进行等效处理[3]。

设红军第 i 种武器毁伤蓝军第 j 种武器的件数为 a_{ij}，蓝军第 j 种武器毁伤红军第 i 种武器的件数为 b_{ji}。通常采用线性加权求和模型[4]进行效能综合，将多指标转化为单指标。假定蓝军第 j 种武器的权重系数为 c_j，红军第 i 种武器的综合效能采用下列线性模型计算：

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} c_j a_{ij}$$

类似的，假定红军第 i 种武器的权重系数为 d_i，蓝军第 j 种武器的综合效能采用下列线行模型计算：

$$l_j = \sum_{i=1}^{m} d_i b_{ji}$$

这样，就要确定蓝、红军各种武器系统的权重系数 c_j、d_i。一旦得出这些权重，通过效能综合使红、蓝军每种武器系统对应一个效能指数，这就为效能分析比较提供了极大方便与可能。

武器系统等效处理的实质，就是确定武器系统的权重系数，效能等效原理为武器系统的等效分析提供了一种科学方法，其核心是：假定红军各种武器的权重系数与它们的综合效能成正比，即假定：

$$d_1 : d_2 : \cdots d_m = h_1 : h_2 : \cdots h_m$$

同样地，假定蓝军各种武器的权重系数与它们的综合效能成正比，即假定：

$$c_1 : c_2 : \cdots c_n = l_1 : l_2 : \cdots l_n$$

由此导出了一组确定红、蓝军武器系统权重系数的线性方程组，解这组线性方程组就可得出权重系数。

引进矩阵记号：

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} \quad \boldsymbol{B} = (b_{ji})_{n\times m}$$

其中：$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，其元素是红方体系各种武器毁伤蓝方体系每种武器件数，称为红军的效能矩阵；$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 阶矩阵，其元素是蓝军体系各种武器毁伤红军体系每种武器件数，称为蓝军的效能矩阵。将红、蓝军武器的权重系数和综合效能表述成单列矩阵：

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

式中权重向量 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 满足归一化：$c'c=1$，$d'd=1$。

在上述记号下，我们有：

$$H = Ac \quad L = Bd \tag{1}$$

同时，效能等效的基本假定是权重系数向量与综合效能成正比，这可表述为：

$$\alpha d = H \quad \beta c = L \tag{2}$$

式中：α, β 是比例常数。

以上诸式给出了确定权重向量 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 的数学模型。不难导出 $\alpha\beta d = A(\beta c) = AL = ABd$，这表明权重向量 d 是 m 阶非负方阵 $\boldsymbol{AB}$ 对应于特征值 $\alpha\beta$ 的特征向量。同样有 $\alpha\beta c = BAc$，即权重向量 c 是 n 阶非负方阵 BA 对应于特征值 $\alpha\beta$ 的特征向量。另一方面，对比例系数，显然有：

$$\beta = c'Bd \quad \alpha = d'Ac \tag{3}$$

这两个比例系数，分别给出蓝、红方武器装备体系综合效能的一种度量。

以上导出权重向量是效能矩阵乘积的特征向量，这是效能等效模型的精髓。矩阵论尤其是非负矩阵理论[5-6]，是效能等效原理的理论基础。

给定 n 阶非负方阵 $D \geqslant 0$，如存在 n 阶置换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{PDP}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & 0 \\ \boldsymbol{S} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$$

其中矩阵块 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{T}$ 分别为 r 阶和 t 阶方阵，$r + t = n$，矩阵块 $\boldsymbol{S}$ 的阶数为 $t \times r$，则称方阵 $\boldsymbol{D}$ 是可约的，否则称为不可约的。

对 m 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，特征方程 $f(\lambda) = |\lambda I_m - A| = 0$ 的 m 个根的最大模称为矩阵的谱半径，记着 $\rho(A)$。

当初，美学者开展武器等效分析时，假定红、蓝方效能矩阵的乘积为不可约矩阵。按照非负矩阵的理论，不可约矩阵的谱半径是它的最大特征值，对应着唯一的正特征向量[5]。于是，当效能矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ 不可约时，特征值谱半径 $\lambda = \rho(AB) = \rho(BA)$ 对应的唯一正特征向量为 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，即 $ABd = \lambda d$、$BAc = \lambda c$，m 维正向量 $\boldsymbol{d}$ 给出红方 m 种武器系统的权重，n 维正向量 $\boldsymbol{c}$ 给出蓝方 n 种武器的权重。有了权重向量，就可用上述公式计算双方各种武器的综合效能向量 $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{L}$ 和体系的综合效能 α，β。

定义 1-1 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是红、蓝方武器装备体系对抗的效能矩阵，如乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ 有正的特征向量，则称效能矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是正则的，否则称为非正则的或退化的。当效能矩阵正则时，如乘积矩阵的正特征向量唯一，则称 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是强正则的，否则称 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是弱正则的。

当效能矩阵乘积不可约时，效能矩阵强正则，此时，效能等效模型借助非负矩阵理论获得圆满解答。但在实践中常遇到乘积矩阵可约的情形，此时，人们通常采取规避策略，从物理背景出发，进行各种简化与修正，将乘积矩阵可约转化为不可约。但这样处理，常常缺乏理论依据，而且也难以获得满意的结果。

我们的问题是：给定红、蓝方效能矩阵，何时非正则、何时强正则、何时弱正则？如果效能矩阵退化，如何实现武器等效？为破解这些多年未解的难题，我们建立了体系对抗的武器协作模型，将效能矩阵转化为标准型，以此为研究平台，问题就迎刃而解了。

2 体系对抗的武器协作模型

假定红、蓝方武器装备体系对抗，红方有 m 种武器系统，蓝方有 n 种武器系统。红方 m 种武器系统的序号集记为 $\boldsymbol{U}$，蓝方 n 种武器系统的序号集记为 $\boldsymbol{V}$，即：$U = \{1, 2, \cdots\cdots, m\}$，$V = \{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ 红、蓝方的效能矩阵分别为：$A = (a_{ij})_{m \times n}$，$B = (b_{ji})_{n \times m}$。

2.1 打击与交战

打击和交战，是双方武器系统之间最基本的对抗方式。是由武器的战术技术性能和作战使命所决定的。红方第 i 种武器要么打击蓝方第 j 种武器，要么不打击，两者必居其一，是唯一确定的，用打击效果 a_{ij} 来表征。对基于毁伤率的效能等效，其充要条件是：红方效能矩阵的元素 $a_{ij} > 0$；但对基于对抗仿真的效能等效，这是一充分条件，即使红军第 i 种武器能打击蓝军第 j 种武器，但由于作战

第 28 卷第 1 期　　系统仿真学报　　Vol. 28 No. 1
2016 年 1 月　　Journal of System Simulation　　Jan., 2016

推演中火力分配的不确定性与打击效果的随机性，效能矩阵中相应元素也可能为零。在进行效能等效时，为使所求的权重系数稳定可靠，要尽量排除这种随机性，用平均结果代替随机抽样。以下总是假定：对抗中一方某种武器是否打击对方某种武器，与该方效能矩阵中相应元素是否大于零是等价的。

如红方第 i 种武器打击蓝方第 j 种武器，蓝方第 j 种武器打击红方第 i 种武器，则称这两种武器是对打的或交战的。显然，其充要条件是：$a_{ij}b_{ji}>0$。

打击与交战，也可推广于武器组之间的交战关系。红方某武器组打击蓝方某武器组，是指红方该武器组中至少有一种武器打击蓝方该武器组中至少一种武器。同样的，红方某武器组与蓝方某武器组交战，是指红方该武器组打击蓝方该武器组，蓝方该武器组打击红方该武器组。

由上可知，对抗双方的效能矩阵，既是双方效能或能力的有序排列，也是体系对抗双方武器系统的交战关系的表征，是对交战关系进行数学描述的依据。

2.2 协助、协作和自助关系

交战关系，是红方体系中的武器与蓝方体系中武器之间的关系，体现在对抗双方的效能矩阵中；由交战关系引申出来的协作关系，是红、蓝方体系内武器之间的关系，体现在对抗双方效能矩阵的乘积矩阵中。没有交战就没有协作，交战是协作的前提，两者密不可分，但交战与协作是两个不同的概念。通过深入研究终于发现。为破解效能矩阵是否正则的难题，必须探讨武器之间的协作关系。

定义 2-1 设红、蓝方武器装备体系对抗，主战武器序号集分别为 $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{V}$，对红方任 2 种武器 s，$t\in U$，如存在 k 种武器 $v_i\in V\cdot(i=1,2,\cdots,k)$ 和 $k-1$ 种武器 $u_j\in U\cdot(j=1,2,\cdots,k-1)$，使得：红方武器 s 打击蓝方武器 v_1，蓝方武器 v_1 打击红方武器 u_1，红方武器 u_1 打击蓝方武器 v_2，蓝方武器 v_2 打击红方武器 u_2,……，红方武器 u_{k-1} 打击蓝方武器 v_k，蓝方武器 v_k 打击红方武器 t，则称红方武器 s 协助武器 t，记着 $s\to t$，k 称为协助指数，如图图 1 所示。

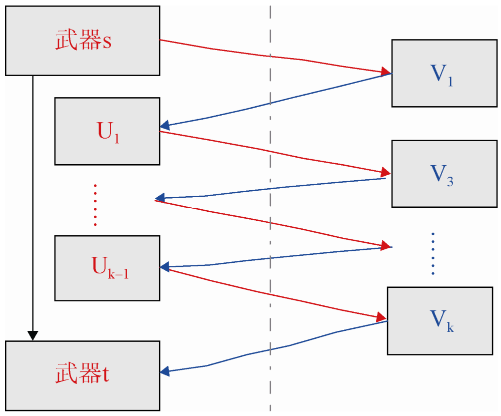


图 1　武器协助关系

武器 s 协助武器 t，中间经过了 k 个环节才得以实现的。不失一般性，总可假定协助指数不超过武器种类数。当协助指数为 1 时，称武器 s 直接协助武器 t，否则称武器 s 间接协助武器 t。红军武器 s 协助红军武器 t，牵涉到红军 $k-1$ 种武器和蓝军 k 种武器，形成了一个打击链，该打击链始于武器 s，止于武器 t。

在定义 2-1 中，如武器 s 与武器 t 为同一种武器，即武器 s 自己协助自己，则称武器 s 是自助的，如协助指数为 1，称为直接自助，否则称为间接自助。

引理 2-1 在定义 2-1 的条件下，如红方武器系统 s、$t\in U$，则 $s\to t$ 的充要条件是：存在自然数 k，使乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的 k 次幂 $(AB)^k$ 中第 s 行第 t 列元素

$$(AB)_{st}^k>0 \tag{4}$$

依据这一引理，确定 2 种武器之间是否具有协助关系，可检查红、蓝军效能矩阵乘积某次幂中相应元素是否>0。

设红军武器 s, t, $r\in U$，且 $s\to t$，协助指数为 k_1；$t\to r$，协助指数 k_2，则按照定义，可得 $s\to r$，且 k_1+k_2 为协助指数。这表明，所定义的武器之间的协助关系具有传递性。

定义 2-2 设红、蓝方体系对抗，红方武器系统 s, $t \in U$，如 $s \to t$，又 $t \to s$，则称武器系统 s 与武器系统 t 是相互协作的，记为 $s \leftrightarrow t$。

由此定义可知，如红军某武器 s 是自助的，则它也是能与自己协作的，称为自协，所以自助与自协是同一概念。如红军武器 s, $t \in U$，$s \leftrightarrow t$，则由协助关系的传递性可知，武器 s, t 都是自助的。

上述关于武器系统之间的协助与协作关系，可推广到武器组之间。

定义 2-3 设武器组 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 是红军武器装备体系 $\boldsymbol{U}$ 的 2 个不相交子集，如武器组 $\boldsymbol{P}$ 中有武器系统协助武器组 $\boldsymbol{Q}$ 中武器系统，则称武器组 $\boldsymbol{P}$ 协助武器组 $\boldsymbol{Q}$；如武器组 P 协助武器组 $\boldsymbol{Q}$，武器组 $\boldsymbol{Q}$ 协助武器组 $\boldsymbol{P}$，则称武器组 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 是相互协作的。

完全类似，也可在蓝军武器装备体系上建立武器系统之间的协助、协作和自助关系。

2.3 武器装备体系对抗的武器协作模型

本段在武器装备体系对抗的背景下，构造武器协作模型。

定义 2-4 设红、蓝方武器装备体系对抗，如某方体系中每种武器都是自助的，则称该方体系是自助体系，否则称为非自助体系；如红、蓝方体系都是自助体系，则称该体系对抗是自助的。

假定红、蓝方体系对抗是自助的，武器序号集分别为 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, 上段定义的武器系统之间的协作关系，具有以下性质：

(1) 自身性：设红方任一武器 $s \in U$，由于体系对抗是自助的，故有 $s \leftrightarrow s$；

(2) 对称性：设红方武器 s, $t \in U$，如 $s \leftrightarrow t$，则 $t \leftrightarrow s$；

(3) 传递性：设红方武器 s, t, $r \in U$，且 $s \leftrightarrow t, t \leftrightarrow r$，则 $s \leftrightarrow r$。

这样，应用高等代数中的有关集合分解定理[6]，红、蓝军体系各形成一种分解。经过严密的推导论证，该分解具有如下性质：

定理 1 设红、蓝方武器装备体系对抗，武器体系集分别为 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$，在武器集上建立武器协作关系，当假定体系对抗自助时，该协作关系具有自身性、对称性和传递性，于是红、蓝方武器装备体系各分解成 k 个不相交的武器组：

$$U = U_1 + U_2 + \cdots\cdots + U_k$$
$$V = V_1 + V_2 + \cdots\cdots + V_k$$

具备以下性质：

(1) 任一方任一武器组中任两武器系统是相互协作的，即每个武器组都是协作组；

(2) 任一方任一武器组能协助序号不超过该武器组序号的武器组，不能协助序号超过该武器组序号的武器组；

(3) 双方相同序号的武器组构成交战武器组；

(4) 任一方任一武器组能打击对方序号不超过该武器组序号的武器组，不能打击对方序号超过该武器组序号的武器组，如图 2 所示。

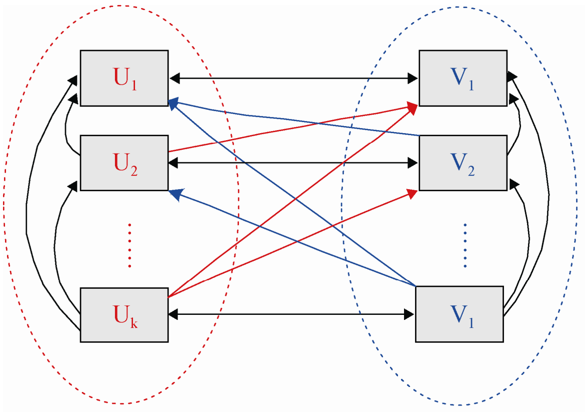


图 2 体系对抗的武器协作模型

红、蓝双方体系按协作关系分解的武器组个数 k，称为武器协作区分指数。

武器装备体系对抗错综复杂，千头万绪。武器装备体系对抗的武器协作模型，对体系对抗的复杂过程给出了结构化、规范化、有序化表述，提炼出体系内协作关系和体系间交战关系的规律，为研究武器系统的效能等效提供了全新的思维方式和科学的论证手段，为破解效能矩阵退化的难题指明了有效途径。

第 28 卷第 1 期 系统仿真学报 Vol. 28 No. 1
2016 年 1 月 Journal of System Simulation Jan., 2016

2.4 效能矩阵的标准型

红、蓝方武器装备体系对抗，体系武器种类数分别为 m, n，武器序号集分别为 $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{V}$，效能矩阵分别为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ji})_{n\times m}$。

在定理 1 的条件下，红、蓝军武器集 $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{V}$ 各分解成 k 个按一定次序排列的不相交武器组，每个武器组内各种武器可任意排列。于是，对红方 m 种武器得到一个新排列：$u_1,u_2,\cdots\cdots,u_m$，该排列开头 m_1 种武器属武器组 U_1，序号按从小到大排列；接下来 m_2 种武器属武器组 U_2，序号按从小到大排列；循此下去，直到最后 m_k 种武器属武器组 U_k，序号按从小到大排列。显然，这 m 个自然数是前 m 个自然数一个排列，记此置换为 σ，即 $\sigma(i)=u_i\cdot(i=1,2,\cdots\cdots,m)$，完全类似的，对蓝方的 n 种武器也得到一个新排列：$v_1,v_2,\cdots\cdots,v_n$，这是前 n 个自然数的一个排列，记此置换为 δ，$\delta(i)=v_i\cdot(i=1,2,\cdots\cdots,n)$。

用关系 σ 对 m 阶单位阵的各行进行置换构造 m 阶置换矩阵 $\boldsymbol{P}$，用关系 δ 对 n 阶单位阵的各行进行置换构造 n 阶置换矩阵 $\boldsymbol{Q}$[6]。由此，对效能矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 作置换，记

$$\overline{A}=PAQ'=(\overline{a}_{ij})_{m\times n} \qquad \overline{B}=QBP'=(\overline{b}_{ji})_{n\times m}$$

其中：$\overline{a}_{ij}=a_{\sigma(i)\delta(j)}$ $\overline{b}_{ji}=b_{\delta(j)\sigma(i)}$。

另一方面，对双方武器系统的新编号，各区分为 k 个武器组，故置换后的效能矩阵可表述为分块矩阵的形式：

$$\overline{A}=(\overline{A}_{ij})_{k\times k} \qquad \overline{B}=(\overline{B}_{ji})_{k\times k}$$

其中 $\overline{A}_{ij},\overline{B}_{ji}$ 分别是红方第 i 武器组 U_i 与蓝方第 j 武器组 V_j 相对抗的效能矩阵，显然有

$$\overline{A}_{ij}=0\cdot(1\leqslant i<j\leqslant k),\ \overline{B}_{ji}=0\cdot(1\leqslant j<i\leqslant k)。$$

由此，我们得到效能矩阵的标准型，表述如下：

定理 2 红、蓝军武器装备体系对抗，效能矩阵为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，则在上述条件与记号下，存在 m 阶置换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶置换矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使效能矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 置换后呈下三角块标准型：

$$\overline{\boldsymbol{A}}=PAQ'=\begin{pmatrix}\overline{A}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \overline{A}_{k1} & \overline{A}_{k2} & \cdots & \overline{A}_{kk}\end{pmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}}=QBP'=\begin{pmatrix}\overline{B}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ \overline{B}_{21} & \overline{B}_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \overline{B}_{k1} & \overline{B}_{k2} & \cdots & \overline{B}_{kk}\end{pmatrix}$$

且对任一 $i\cdot(i=1,2,\cdots\cdots,k)$，两乘积矩阵 $\overline{A}_{ii}\overline{B}_{ii}$，$\overline{B}_{ii}\overline{A}_{ii}$ 是不可约矩阵。

系 2-1 设红、蓝方武器装备体系对抗，效能矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，则双方体系中任两武器相互协助或协作，即协作区分指数 $k=1$ 的充要条件是：乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ 是不可约矩阵。

3 下三角块效能矩阵的正则性与多重效能等效

红、蓝方武器装备体系对抗，红方有 m 种武器系统，蓝方有 n 种武器系统。按照武器系统之间的协作关系，红、蓝方武器各分成 k 个武器协作组，第 i 武器协作组的武器种类数分别为 m_i、$n_i(i=1,2,\cdots\cdots,k)$，则有

$$m=m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k;$$

$$n=n_1+n_2+\cdots\cdots+n_k。$$

由定理 2，红、蓝方的效能矩阵总可表述为下三角块矩阵标准型：

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & 0 & ... & 0\\ A_{21} & A_{22} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ A_{k1} & A_{k2} & ... & A_{kk}\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}B_{11} & 0 & ... & 0\\ B_{21} & B_{22} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ B_{k1} & B_{k2} & ... & B_{kk}\end{pmatrix},$$

且对角线上各矩阵块的乘积矩阵 $A_{ii}B_{ii}$，$B_{ii}A_{ii}(i=1,2,\cdots,k)$ 是不可约的。以此出发，研究效能矩阵的正则性，并建立多重效能等效原理。

3.1 下三角块效能矩阵的正则性

定理 3 在上述条件下，下列命题成立：

(1) 如效能矩阵 ***A***，***B*** 是正则的，则效能矩阵乘积的正特征向量所对应的特征值为谱半径 $\lambda_1=\rho(A_{11}B_{11})$；

(2) 如效能矩阵 ***A***，***B*** 是强正则的，则谱半径 $\lambda_1=\rho(A_{11}B_{11})$ 是效能矩阵乘积 AB 的单重特征根；

(3) 如效能矩阵 ***A***，***B*** 是弱正则的，则谱半径 $\lambda_1=\rho(A_{11}B_{11})$ 是效能矩阵乘积 ***AB*** 的特征根的重数>1。

证明：红、蓝方效能矩阵 ***A***, ***B*** 的乘积

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ D_{21} & A_{22}B_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{k1} & D_{k2} & \cdots & A_{kk}B_{kk} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} B_{11}A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{21} & B_{22}A_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{k1} & C_{k2} & \cdots & B_{kk}A_{kk} \end{pmatrix}$$

其中矩阵块

$$\begin{aligned} &D_{21}=A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21},\cdot\cdot D_{ij}= \\ &\sum_{s=j}^{i}A_{is}B_{sj},\cdot\cdot(1\leqslant j<i\leqslant k) \\ &C_{21}=B_{21}A_{11}+B_{22}A_{21},\cdot\cdot C_{ij}= \\ &\sum_{s=j}^{i}B_{is}A_{sj},\cdot\cdot(1\leqslant j<i\leqslant k) \end{aligned} \tag{5}$$

如效能矩阵正则，则存在正的 m 维向量 ***d***，使得 $ABd=\lambda d$，λ 是效能矩阵乘积的正特征值。记

$$\boldsymbol{d}'=(d_1' \quad d_2' \quad \cdots \quad d_k')$$

其中第 i 分量组 $d_i>0$，维数是 m_i。由此即得

$$A_{11}B_{11}d_1=\lambda d_1$$

故有 $\lambda=\rho(A_{11}B_{11})$，这就证明了命题(1)。

如效能矩阵 ***A***, ***B*** 是强正则的，对应的唯一正特征向量为 d，则由 $ABd=\lambda d$ 就有

$$A_{11}B_{11}d_1=\lambda d_1$$

$$\sum_{j=1}^{i-1}D_{ij}d_j+A_{ii}B_{ii}d_i=\lambda d_i \qquad (1<i\leqslant k)$$

这是一个递推公式，由于解唯一，由线性方程组的理论[6]可知，对任 $i\cdot(1<i\leqslant k)$，特征值 λ 不能是 $A_{ii}B_{ii}$ 的特征根，故命题(2)成立。

由命题(1)与(2)，即得命题(3)。

引理 3-1 给定下三角块效能矩阵 ***A***, ***B***，如谱半径 $\lambda_1=\rho(A_{11}B_{11})$ 是效能矩阵乘积 ***AB*** 的单重特征根，则对应于特征值 λ_1，效能矩阵乘积 ***AB*** 与 ***BA*** 存在唯一的特征向量 ***d***, ***c***，

$$ABd=\lambda_1 d \qquad BAc=\lambda_1 c$$

$$d'=(d_1',d_2',\cdots,d_k') \qquad c'=(c_1',c_2',\cdots,c_k')$$

分量组 $d_i,c_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 的维数分别为 m_i，n_i，其中第一分量组 d_1、c_1 是不可约乘积矩阵 A_1B_1，B_1A_1 的特征向量

$$A_{11}B_{11}d_1=\lambda_1 d_1, \qquad B_{11}A_{11}c_1=\lambda_1 c_1$$

当第一分量组 d_1, c_1 给定时，其余各分量由下列递推公式唯一确定：

$$\begin{aligned} &d_i=(\lambda_1 I_{m_i}-A_{ii}B_{ii})^{-1}\sum_{j=1}^{i-1}D_{ij}d_j \qquad (1<i\leqslant k) \\ &c_i=(\lambda_1 I_{n_i}-B_{ii}A_{ii})^{-1}\sum_{j=1}^{i-1}C_{ij}c_j \qquad (1<i\leqslant k) \end{aligned} \tag{6}$$

系 3-1 在定理 3 的条件下，如下三角块效能矩阵 ***A***，***B*** 乘积的特征值 $\lambda_1=\rho(A_{11}B_{11})$ 是 ***AB*** 的单重特征根，则效能矩阵 ***A***，***B*** 强正则的充要条件是：当第一分量组 $d_1>0$，$c_1>0$ 时，由(6)式决定的其余各分量组 $d_i>0$，$c_i>0(1<i\leqslant k)$。

由线性方程组的理论[6]可推得如下系理。

系 3-2 在定理 3 条件下，如谱半径 $\rho(AB)=\lambda_1=\rho(A_{11}B_{11})$ 是乘积矩阵 ***AB*** 的单重特征根，则下三角块效能矩阵 ***A***，***B*** 强正则的充要条件是：矩阵块 $A_{21}\neq 0$ 或 $B_{21}\neq 0$。

本系理给出了确保(6)式中各分量组为正向量的一个充分条件。如 $\rho(AB)\geqslant\lambda_1$，则会出现多种情况，不能保证(6)式中各分量组为正向量，不难举出反例。

系 3-3 在定理 3 的条件下，如下三角块效能矩阵弱正则，则效能矩阵乘积存在无数正的特征向量。

第 28 卷第 1 期 系统仿真学报 Vol. 28 No. 1
2016 年 1 月 Journal of System Simulation Jan., 2016

由上讨论可知，当武器协作区分指数 $k>1$ 时，下三角块效能矩阵可能出现强正则、弱正则和非正则三种情形。如谱半径 $\lambda_1=\rho(A_{11}B_{11})$ 是乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的单重特征根，且由(6)式唯一确定的特征向量各分量组当 $d_1>0,c_1>0$ 时有 $d_i>0,c_i>0(1<i\leqslant k)$，则效能矩阵是强正则的，否则是退化的；如谱半径 $\lambda_1=\rho(A_{11}B_{11})$ 是乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的多重特征根，则效能矩阵可能出现弱正则与退化两种情形。由此可见，下三角块效能矩阵只能在一定条件下强正则，当效能矩阵退化和弱正则时，采用多重效能等效。

3.2 下三角块效能矩阵的多重效能等效

定义 3-1 如存在自然数 k_0，红、蓝方前 k_0 个武器协作组相对抗，其效能矩阵 $\overline{A}_{k_0}$，$\overline{B}_{k_0}$

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{k}_0}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}_0 1} & \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}_0 2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{k}_0}\end{pmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{k}_0}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}_0 1} & \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}_0 2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{k}_0}\end{pmatrix}$$

是强正则的，而前 k_0+1 个武器协作组相对抗，效能矩阵不是强正则的，则称红、蓝方前 k_0 个武器协作组构成武器协作联组，k_0 是武器协作联组中所含武器组的个数，称为协作联组指数。

由定理 3 及系 3-1，即可推得

引理 3-2 (联组模型)在定理 3 和定义 3-1 条件下，武器协作联组指数 k_0 是满足下列条件的 $k_1(1\leqslant k_1\leqslant k)$ 的最大值

(1) 如 $k_1>1$，有 $\left|\lambda_1 I_{m_i}-A_{ii}B_{ii}\right|\neq 0\ (1<i\leqslant k_1)$；

(2) 按(6)式确定的特征向量各分量组 $d_i>0$, $c_i>0\quad(1\leqslant i\leqslant k_1)$。

当 $k_0=k$ 时，双方体系自成一个武器协作联组，效能矩阵强正则。当 $k_0<k$ 时，不能实现效能等效。此时，双方体系的 k 个武器协作组中前 k_0 个协作组构成武器协作联组。双方体系由该协作联组和其它协作组构成，共有 $k-k_0+1$ 个武器组。多重效能等效的基本思路是：将武器等效区分为组内等效和组际等效 2 个层次。首先，按效能等效原理确定各武器组内各种武器的权重向量，并计算各武器组的综合效能；然后，将各武器组的综合效能取作每个武器组的权重，实现组际等效；最后，将两层次的效能等效权重综合[4]，得出红、蓝方体系的效能等效权重向量。

以下建立下三角块效能矩阵的多重效能等效模型。

(1) 构建武器协作联组，确定指数 k_0。

首先，求取双方第一武器协作组的效能矩阵 A_{11}，B_{11} 乘积的特征值 $\lambda_1=\rho(A_{11}B_{11})$ 及其对应的特征向量，显然，唯一存在 m_1 维正向量 d_1 和 n_1 维正向量 c_1，使得 $A_{11}B_{11}d_1=\lambda_1 d_1$，$B_{11}A_{11}c_1=\lambda_1 c_1$。向量 d_1，c_1 归一化。然后，按(6)式逐一确定特征向量各分量组 d_i，c_i，验证是否满足引理 3-2 的条件，以确定指数 k_0。显然，协作联组指数 $k_0\geqslant 1$。

(2) 求取武器协作联组的权重向量和综合效能。

如武器协作联组指数 $k_0>1$，按下列诸式逐一求取武器协作联组中各武器组的权重向量

$$d_i=(\lambda_1 I_{m_i}-A_{ii}B_{ii})^{-1}\sum_{j=1}^{i-1}D_{ij}d_j\qquad(1<i\leqslant k_0);$$

$$c_i=(\lambda_1 I_{n_i}-B_{ii}A_{ii})^{-1}\sum_{j=1}^{i-1}C_{ij}c_j\qquad(1<i\leqslant k_0)\text{。}$$

特征向量 d_i，c_i 分别是红、蓝方第 i 武器组的权重向量，且是正向量，由第一武器协作组的权重向量 d_1，c_1 线性表示。从而得到红、蓝方武器协作联组的权重向量：

$$\overline{\boldsymbol{d}}_{k_0}=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ \cdots\\ d_{k_0}\end{pmatrix}\qquad \overline{\boldsymbol{c}}_{k_0}=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \cdots\\ c_{k_0}\end{pmatrix}$$

满足 $\overline{A}_{k_0}\overline{B}_{k_0}\overline{d}_{k_0}=\lambda_1\overline{d}_{k_0}$，$\overline{B}_{k_0}\overline{A}_{k_0}\overline{c}_{k_0}=\lambda_1\overline{c}_{k_0}$。红、蓝方武器协作联组的综合效能为

$$\bar{\alpha}_{k_0} = \bar{d}'_{k_0}\bar{A}_{k_0}\bar{c}_{k_0} \qquad \bar{\beta}_{k_0} = \bar{c}'_{k_0}\bar{B}_{k_0}\bar{d}_{k_0}$$

如武器协作联组指数 $k_0 = k$，则 $\bar{d}_{k_0}, \bar{c}_{k_0}$ 即为红、蓝方体系的权重向量。

(3) 求取每个武器协作组的权重向量和综合效能。

当 $k_0 < k$ 时，求取其它武器协作组的权重向量和综合效能。首先，按效能等效原理确定红、蓝方其它武器组各种武器的等效权重向量。记 $\lambda_i = \rho(A_{ii}B_{ii}) \cdot\cdot (1 < i \leqslant k)$，必存在 m_i 维正向量 d_{zi} 和 n_i 维正向量 c_{zi}，使得

$$A_{ii}B_{ii}d_{zi} = \lambda_i d_{zi} \cdot\cdot B_{ii}A_{ii}c_{zi} = \lambda_i c_{zi} \ (1 < i \leqslant k) \tag{7}$$

特征向量 d_{zi}，c_{zi} 分别是红、蓝方第 i 武器协作组各种武器的权重向量，取定长度为 1。

然后，进行武器组组际等效。确定红、蓝方各武器协作组的权重，这就要计算红、蓝方各武器组的综合效能：

$$\alpha_i = d'_{zi}\left(\sum_{j=1}^{i} A_{ij}c_{zj}\right) \cdot\cdot (k_0 < i \leqslant k)$$

$$\beta_j = c'_{zj}\left(\sum_{i=1}^{j} B_{ji}d_{zi}\right) \cdot\cdot (k_0 < j \leqslant k)$$

$$d_{z1} = d_1 \qquad c_{z1} = c_1$$

(4) 构造红、蓝方对抗体系多重效能等效的权重向量。

将武器协作联组和其它武器协作组各种武器系统的权重向量和该武器组的权重进行综合，给出多重效能等效权重向量：

$$\hat{d} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{k_0}\bar{d}_{k_0} \\ \alpha_{k_0+1}d_{zk_0+1} \\ -- \\ \alpha_k d_{zk} \end{pmatrix}, \quad \hat{c} = \begin{pmatrix} \bar{\beta}_{k_0}\bar{c}_{k_0} \\ \beta_{k_0+1}c_{zk_0+1} \\ -- \\ \beta_k c_{zk} \end{pmatrix}$$

$$d = \hat{d} / \left|\hat{d}\right| \qquad c = \hat{c} / \left|\hat{c}\right|$$

m 维向量 d 和 n 维向量 c 给出了红、蓝方各种武器系统的权重向量。

4 仿真算例

红、蓝方对抗，红方有 7 种武器系统，区分为 2 组，第 1 组 3 种武器，第 2 组 4 种武器；蓝方有 6 种武器，区分为 2 组，每组各 3 种武器。效能矩阵表述为如下分块矩阵：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{ij}(1 \leqslant j \leqslant i \leqslant 2)$ 是红方第 i 武器组打击蓝方第 j 武器组的效能矩阵，$B_{ji}(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2)$ 是蓝方第 j 武器组打击红方第 i 武器组的效能矩阵。实验数据如下：

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2.1 & 1.5 & 0.1 \\ 3.1 & 2.2 & 0.6 \\ 4.4 & 3.3 & 1.4 \end{pmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 2.2 & 1.9 & 0.2 \\ 3.8 & 3.0 & 0.8 \\ 5.0 & 4.1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 5.1 & 6.5 & 0.0 \\ 6.0 & 7.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 10.0 & 8.6 & 0.0 \end{pmatrix}$$

$$B_{22} = \begin{pmatrix} 6.2 & 5.8 & 7.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.3 \\ 11.0 & 9.2 & 12.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 40.0 & 30.0 & 6.0 \\ 44.0 & 36.0 & 8.5 \\ 0.0 & 0.0 & 2.5 \\ 60.0 & 46.6 & 12.0 \end{pmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} 40.5 & 31.6 & 7.1 \\ 0.0 & 0.0 & 3.5 \\ 65.0 & 50.2 & 15.0 \end{pmatrix}$$

求解双方武器系统的权重。

解：显然，效能矩阵乘积 AB，BA 是可约的，但矩阵乘积 $A_{11}B_{11}$，$B_{11}A_{11}$ 与 $A_{22}B_{22}$，$B_{22}A_{22}$ 是不可约的。鉴于本例的这些特点，可越过按武器协

第 28 卷第 1 期 系统仿真学报 Vol. 28 No. 1
2016 年 1 月 Journal of System Simulation Jan., 2016

作关系分解体系和置换效能矩阵。由定理 1 和定理 2，不难验证红、蓝双方武器组为武器协作组，协作区分指数 $k=2$，效能矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 呈下三角块标准型。又 $\rho(A_{11}B_{11})=31.07<\rho(A_{22}B_{22})=91.90$。

按定理 3 及其系理可知，乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 对应于特征值 λ_1 的唯一特征向量不是正的，武器联组指数 $k_0=1$，效能矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 不是强正则的，不能应用效能等效模型，只能采用多重效能等效求解武器权重。

双方第 1 武器组的权重分量组用效能等效模型求解分别为

$$d_1=\begin{pmatrix}0.30\\0.50\\0.81\end{pmatrix}\quad c_1=\begin{pmatrix}0.30\\0.54\\0.79\end{pmatrix}$$

综合效能即第一武器组的权重分别为

$$\alpha_1=d_1'A_{11}c_1=5.51\qquad \beta_1=c_1'B_{11}d_1=6.05$$

双方第 2 武器组的权重分量组用效能等效模型求解分别为

$$d_2=\begin{pmatrix}0.40\\0.42\\0.12\\0.77\end{pmatrix}\quad c_2=\begin{pmatrix}0.51\\0.08\\0.86\end{pmatrix}$$

综合效能即第 2 武器组的权重分别为

$$\alpha_2=d_2'A_{21}c_1+d_2'A_{22}c_2=80.26$$

$$\beta_2=c_2'B_{21}d_1+c_2'B_{22}d_2=77.97$$

将武器组内和组际两层权重综合，构造多重效能等效权重向量

$$d=\frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\begin{pmatrix}\alpha_1 d_1\\\alpha_2 d_2\end{pmatrix}\qquad c=\frac{1}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}\begin{pmatrix}\beta_1 c_1\\\beta_2 c_2\end{pmatrix}$$

习惯上取定最小武器权重为 1，则红方 7 种武器的权重为

$$\bar{d}'=(1.00,\ 1.69,\ 2.74,\ 21.21,\ 24.99,\ 6.42,\ 40.52)$$

蓝方 6 种武器的权重为

$$\bar{c}'=(1.00,\ 1.84,\ 2.66,\ 22.33,\ 3.39,\ 37.39)$$

体系内各种武器权重归一化或取最小权重为 1，两者差别为同一常数倍，但不改变各权重的大小次序和任两权重的比值。运用武器权重系数，可评价每种武器对体系能力的贡献，实现体系效能综合，为体系编配和结构优化提供支撑。

5 结论

依据武器装备体系对抗仿真输出结果得出红、蓝方效能矩阵，据此求解武器系统效能等效权重，现实效能综合。以效能矩阵乘积不可约为前提，效能等效模型借助非负矩阵理论给出了圆满答案；本文建立了新的理论体系，打破了这一前提限制。按体系对抗武器协作模型，双方体系各分解为 k 个不相交的武器协作组，效能矩阵呈下三角块标准型；再按联组模型确定联组指数 k_0，双方体系前 k_0 个武器组构成武器协作联组。当 $k=1$ 或 $k_0=k$ 时，双方体系自成一个武器协作组或协作联组，效能矩阵强正则，按效能等效模型求解武器权重向量和综合效能；当 $k_0<k$ 时，效能矩阵不是强正则的，体系分成 $k-k_0+1$ 个武器组，按多重效能等效原理，分别用效能等效模型求解各武器组的权重向量和综合效能，再将两层权重综合得到各组权重向量，并将其叠加成体系的权重向量。从而彻底破解了这一困扰武器系统分析领域多年的难题。

参考文献：

[1] William H Holter. A method for determining individual and combined weapon effectiveness measures utilizing the results of a high–resolution combat simulation [J]. Proceedings of the US Army Operations Research Symposium (S0036-8075), 1973, 5(8): 182-96.

[2] David R Howes, Robert M Thrall. A theory of ideal linear weights for heterogeneous combat forces [J]. Naval Research Logistics Quarterly (S0036-8075), 1973, 20(7): 645-659.

[3] 牛新光. 武器装备建设的国防系统分析[D]: 北京: 国防工业出版社, 2007: 192-215.

[4] 薛武学，蔡建华, 张晓玲, 等. 武器装备论证方法[D]. 北京: 国防工业出版社, 2009: 31-38.

[5] 黄廷祝，杨传胜. 特殊矩阵分析与应用[M]. 1 版. 北京: 科学出版社, 2007: 1-25.

[6] 北京大学数学系几何代数教研室. 高等代数[M]. 3 版 北京: 高等教育出版社, 2003: 42-45.

