Image Denoising Algorithm Based on Method Noise Sparse Representation Dictionary Learning

Lishao Huang
College of Electronics and Information Engineering, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou 425199, China;

Haiying Wen
College of Electronics and Information Engineering, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou 425199, China;

Sisi Gu
College of Electronics and Information Engineering, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou 425199, China;

Image Denoising Algorithm Based on Method Noise Sparse Representation Dictionary Learning

Abstract

Abstract: For the shortcoming of losting partial texture information with image denoising process, the image denoising algorithm based on method noise sparse representation was proposed. The method noise, which was defined as the difference between the noisy and the denoised image, was obtained by guided filter. *Then redundant dictionary was learned by improved dictionary learning method and the method noise. The image texture information in method noise was extracted by the learning dictionary, and image was restored by the extracted image texture information and denoised image by guided filter. The* experimental results demonstrate that the peak signal to noise ratio Value (PSNR) of the proposed algorithm is better than state-of-the-art algorithms, while the proposed algorithm can well preserve the texture information in the denoised image, making them look more natural.

Keywords

Recommended Citation

基于方法噪声稀疏表字典学习的图像去噪算法

黄丽韶，文海英，顾思思

(湖南科技学院电子与信息工程学院，湖南 永州 425199)

摘要： 针对图像去噪过程中会导致部分纹理信息丢失的不足，提出了基于方法噪声稀疏表示的图像去噪算法。该算法基本思想是通过对方法噪声(受噪声污染的图像和去噪后图像的差)的稀疏表示，提取方法噪声中的纹理信息，从而提升图像去噪质量。采用导引滤波去噪得到图像的方法噪声；利用该方法噪声通过改进的字典学习算法训练得到自适应的冗余字典；利用该字典提取方法噪声图像中的纹理信息，由导引滤波去噪后的图像和提取的纹理信息恢复图像，达到去噪效果。实验结果表明，所提出的方法峰值信噪比高于现有的同类算法，且能较好地保持图像的细节和纹理信息，提高了视觉效果。

关键词： 方法噪声；字典学习；冗余字典；稀疏表示

Image Denoising Algorithm
Based on Method Noise Sparse Representation Dictionary Learning

Huang Lishao, Wen Haiying, Gu Sisi

(College of Electronics and Information Engineering, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou 425199, China)

Abstract: For the shortcoming of losting partial texture information with image denoising process, the image denoising algorithm based on method noise sparse representation was proposed. The method noise, which was defined as the difference between the noisy and the denoised image, was obtained by guided filter. *Then redundant dictionary was learned by improved dictionary learning method and the method noise. The image texture information in method noise was extracted by the learning dictionary, and image was restored by the extracted image texture information and denoised image by guided filter. The* experimental results demonstrate that the peak signal to noise ratio Value (PSNR) of the proposed algorithm is better than state-of-the-art algorithms, while the proposed algorithm can well preserve the texture information in the denoised image, making them look more natural.

Keywords: method noise; dictionary learning; redundant dictionary; sparse representation

引言

在数字图像获取和传输的过程中不可避免地会受到噪声干扰而造成图像的质量下降，而在很多

应用领域中，往往需要清晰的、高质量的图像。因此，图像去噪具有十分重要的意义，是图像处理领域的一个重要研究课题。经典的降噪方法有邻域滤波法、中值法以及频域滤波法，这些方法在去除噪声的同时，往往会导致图像细节和纹理信息的丢失。

近年来，基于字典学习的去噪方法[1-4]和基于非局部自相似性的去噪方法[5-8]受到了国内外学者

　　　　黄丽韶，等：基于方法噪声稀疏表字典学习的图像去噪算法　　　　

的广泛关注。基于字典学习的去噪算法发展得益于稀疏表示理论取得的进展[9-11]，其基本思想是利用图像局部稀疏性去噪，如 K-SVD 算法[1-2]及其改进的算法[3-4]。K-SVD 去噪算法将噪声图像分割成相互重叠的小图像块，然后通过 K-SVD 字典学习算法训练得到自适应的冗余字典，最后利用冗余字典对图像块进行稀疏表示，从而达到去噪的目的。基于非局部自相似的去噪方法基本思想是利用图像中不相邻部分具有非局部自相似性去噪，如 NLM 算法[5-6]和 BM3D 算法[7-8]。NLM 算法利用欧式距离来表征像素邻域之间的相似性，并使用该距离来计算像素重构时的权值，从而对像素值进行估计。BM3D 算法则对图像进行块匹配，将具有相似结构的二维图像块组合在一起形成三维数据，然后对其进行联合滤波，并对重叠块加权平均重构图像。此外，文献[12-13]对同时利用稀疏性和非局部自相似性的图像去噪算法展开了研究。上述算法在图像去噪方面均取得了很大的成功，然而这些算法在去噪的同时仍然会丢失部分图像纹理信息[14]，使得方法噪声中包含了图像的部分纹理信息，导致视觉效果下降。因此，有必要研究既能有效去除噪声，又能很好地保持图像细节和纹理信息的去噪算法。

本文针现有去噪算法丢失部分纹理信息的不足，考虑采用基于字典学习的稀疏表示方法从图像方法噪声中提取纹理信息，提出了基于方法噪声稀疏表示的图像去噪算法(image denoising algori- thm based on Method Noise Sparse Representation，MNSR)。该算法首先利用导引滤波去噪得到图像的方法噪声，然后利用方法噪声通过改进的 K-SVD 字典学习算法学习得到自适应的冗余字典，最后利用该字典提取方法噪声中的纹理信息，并由导引滤波去噪后的图像和提取的纹理信息恢复图像，从而达到去噪的目的。由于利用了方法噪声的信息，使得本文算法峰值信噪比高于现有同类算法，且能较好地保持图像的细节和纹理特征，提高了视觉效果。

1 稀疏表示和字典学习

1.1 导引滤波[15]

令导引图像为 I，输入图像为 P，则导引滤波后的输出图像 q 满足

$$q_i = a_k I_i + b_k \quad \forall i \in \omega_k ;$$

$$a_k = \frac{\frac{1}{|\omega|}\sum_{i\in\omega_k} I_i p_i - u_k \bar{p}_i}{\sigma_k^2 + \varepsilon} ;$$

$$b_k = \bar{p}_i - a_k u_k 。$$

其中：ω_k 表示中心在像素 k 的二维窗口；p_i 和 q_i 分别表示输入图像 p 和输出图像 q 的第 i 个像素值；I_i 表示导引图像 I 的第 i 个像素值；u_k 和 σ_k^2 表示导引图像在窗口 ω_k 中的均值和方差；$\bar{p}_i$ 表示输入图像在窗口 ω_k 中的均值，即

$$\bar{p}_i = \frac{1}{|\omega|}\sum_{i\in\omega_k} I_i p_i$$

1.2 字典学习

给定一组样本 $\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_K) \in R^{n\times K}$，字典学习是为了找到冗余字典 $\boldsymbol{D} \in R^{n\times m}$ 使得每个样本能够被稀疏表示为稀疏表示矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}=(\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\Gamma}_K) \in R^{m\times K}$，该问题表示为

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{\Gamma}} & \|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Gamma}\|_F^2 \\ \text{s.t.} & \|\boldsymbol{\Gamma}_k\|_0 \leqslant T_0 \quad \forall k \end{cases} \tag{1}$$

字典学习问题常用的求解方法有 MOD 算法和 K-SVD 算法[2]。

2 基于方法噪声稀疏表示的图像去噪算法

为了避免图像的视觉效果下降(如图 1 所示 K-SVD 算法的方法噪声)，在去除噪声的同时保持图像的细节和纹理信息，本文提出了基于方法噪声稀疏表示的图像去噪算法。该算法大致分为 3 个过程：首先采用导引滤波去噪得到图像的方法噪声；然后利用方法噪声通过改进的 K-SVD 字典学习算法训练得到自适应的冗余字典；最后通过该字典提

http://www.china-simulation.com

取方法噪声图像中的纹理信息，由导引滤波去噪后的图像和提取的纹理信息恢复图像。

(a) barbara 图像　　　　　　(b) 方法噪声
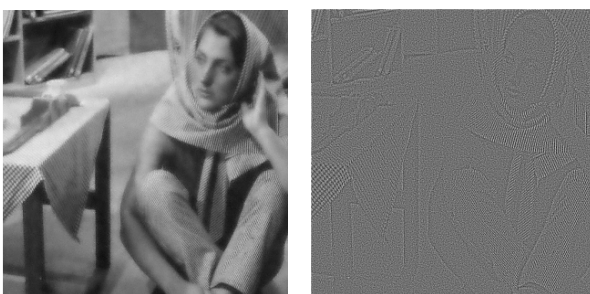
图 1　barbara 图像和 K-SVD 算法的方法噪声

2.1 获取图像的方法噪声

考虑图像噪声是加性噪声，以列向量的形式表示其观测模型为

$$Y = X + v \tag{2}$$

其中：v 中的元素均值为 0，方差为 σ^2 独立的高斯白噪声；Y 为受噪声污染的图像；X 为原图像。采用导引滤波器去噪得到去噪图像 $\hat{X}$ 和其对应的方法噪声 Δ，表示为

$$Y = \hat{X} + \Delta \tag{3}$$

此时，导引滤波的方法噪声 Δ 中包含了较为明显的纹理信息 H（如图 2 所示），可见导引滤波去噪过程中会导致图像部分纹理信息丢失。

(a) 导引滤波去噪结果　　　　　(b) 方法噪声

图 2　导引滤波去噪结果和方法噪声

2.2 学习得到冗余字典

本小节将利用图像方法噪声 Δ，训练得到冗余字典 $D \in R^{n \times m}$。将方法噪声 Δ 分成多个大小为 $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ 相互重叠的 K 图像块，第 k 个图像块以列

向量的形式表示记为 $\Delta_k \in R^n$。随机抽取 L 个图像块用于冗余字典 D 的学习，记为 $P = \{p_1, p_2 \cdots, p_L\}$，则字典学习问题表示为

$$\begin{cases} \min_{D,Q} & \|P - DQ\|_F^2 \\ \text{s.t.} & \|q_l\|_0 \leqslant T_0 \quad \forall l \end{cases} \tag{4}$$

其中 $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_L\} \in R^{m \times L}$ 为稀疏表示系数矩阵。最优化问题(4)的求解可以分成两个迭代步骤：

(a) 稀疏编码

固定字典 D，更新稀疏表示系数矩阵 Q。则最优化问题(4)可以表示为一系列的稀疏编码问题

$$\forall l \begin{cases} \min_{q_l} & \|p_l - Dq_l\|_2^2 \\ \text{s.t.} & \|q_l\|_0 \leqslant T_0 \end{cases} \tag{5}$$

上述问题(5)是经典的稀疏编码问题，K-SVD 算法采用了 OMP 算法求解。受文献[16-17]的启发，近似 L_0 范数更能反应信号的稀疏性。因此，本文采用近似 L_0 范数最小化算法求解最优化问题(5)。

选择合适的参数 u，最优化问题(6)等价于

$$\min_{q_l} \{-\mu\|q_l\|_0 + \|Dq_l - p_l\|_2^2\} \tag{6}$$

利用高斯函数近似 L_0 范数可得

$$n - \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \exp(-\beta_i^2 / 2\delta^2) = \|x_k\|_0 \tag{7}$$

其中 β_i 为向量 q_l 中的第 i 个元素。令

$$F_\delta(q_l) = -\sum_{i=1}^{n} \exp(-\beta_i^2 / 2\delta^2)$$

可知当 $\delta \to 0$ 时，对于最优化问题(6)等价于

$$\min_{q_l} L_{\delta,u}(q_l) = -uF_\delta(q_l) + \|Dq_l - p_l\|_2^2 \tag{8}$$

其中 u 为与稀疏水平相关的参数。采用最速下降法求解上述问题，其迭代格式为

$$q_l = q_l - t \nabla L_{\delta,u}(q_l) \tag{9}$$

式中：t 表示步长；$\nabla L_{\delta,u}(q_l)$ 为 $L_{\delta,u}(q_l)$ 在 q_l 处的梯度

$$\nabla L_{\delta,u}(q_l) = \frac{u}{\delta^2} \Lambda q_l + 2D^T(Dq_l - p_l) \tag{10}$$

其中对角矩阵 $\Lambda = \text{diag}\{\exp(-\beta_1^2 / 2\delta^2), \exp(-\beta_2^2 / 2\delta^2), \cdots, \exp(-\beta_n^2 / 2\delta^2)\}$。选择步长 t 满足

$$L_{\delta,u}(q_l - t\nabla L_{\delta,u}(q_l)) < L_{\delta,u}(q_l) \tag{11}$$

(b) 字典更新

固定稀疏表示系数矩阵 Q，更新字典 D。字典更新问题可以表示为

$$\min_{D} \ \|P - DQ\|_F^2 \tag{12}$$

令 q_T^j 为矩阵 Q 的第 j 行，$D = (d_1, d_2, \cdots, d_m)$，可得 $Q = (q_T^1, q_T^2, \cdots, q_T^m)^T$，则

$$\|P - DQ\|_F^2 = \left\|P - \sum_{j=1}^{m} d_j q_T^j\right\|_F^2 =$$

$$\left\|\left(P - \sum_{j \neq j_0} d_j q_T^j\right) - d_{j_0} q_T^{j_0}\right\|_F^2 \tag{13}$$

令 $E_{j_0} = P - \sum_{j \neq j_0} d_j q_T^j$，则字典更新问题可以表示为

$$\min_{D} \left\|E_{j_0} - d_{j_0} q_T^{j_0}\right\|_F^2 \tag{14}$$

根据上式(14)，可以使用 SVD 方法逐个更新字典中的原子，每更新字典中的一个原子，同时更新使用该原子的图像块所对应的稀疏系数，详见文献[2]。通过上述两个步骤迭代可以得到字典 D。

2.3 图像去噪

本小节将利用自适应的字典 D 提取方法噪声中的纹理信息 $\hat{H}$，然后由导引滤波去噪后的图像 $\hat{X}$ 和提取的纹理信息 $\hat{H}$ 恢复图像 X^*。

提取纹理信息 $\hat{H}$，首先得到需要方法噪声每个图像块 $\Delta_k \in R^n$ 在字典 D 中的稀疏表示系数，该问题是一个典型的稀疏编码问题

$$\forall k \ \begin{cases} \min_{\alpha_k} \ \|\Delta_k - D\alpha_k\|_2^2 \\ s.t. \ \|\alpha_k\|_0 \leqslant T_0 \end{cases} \tag{15}$$

利用 2.2 节给出的近似 L_0 范数最小化算法求解最优化问题(15)，可得到稀疏表示系数 α_k。则方法噪声中第 k 个图像块提取的纹理信息 $\hat{H}_k = D\alpha_k$。将图像块按位置拼接并对图像块重叠部分平均，可得到方法噪声中提取的纹理信息表示为

$$\hat{H} = \left(\sum_k R_k^T R_k\right)^{-1} \left(\sum_k R_k^T \hat{H}_k\right) \tag{16}$$

其中 R_k 用于提取第 k 个图像块的矩阵，如 $R_k Y$ 表示图像 Y 的第 k 个图像块。由提取的纹理信息 $\hat{H}$ 以及导引滤波去噪后的图像 $\hat{X}$，可得去噪后图像

$$X^* = \hat{X} + \hat{H} \tag{17}$$

3 算法步骤和收敛性分析

本节将给出本文算法的详细步骤，并分析了近似 L_0 范数最小化算法的收敛性。

3.1 算法详细步骤

基于上节分析，本节将详细描述本文算法步骤(见算法 1)。

算法 1：基于方法噪声稀疏表示的图像去噪算法

算法输入：受噪声污染的图像 Y

初始化：D^0 为高斯随机矩阵

步骤 1 对图像 Y 导引滤波去噪，得到方法噪声 Δ 和导引滤波去噪后的图像 X

步骤 2 利用方法噪声学习得到自适应的冗余字典 D

(2-1) 采用迭代格式(9)求解式(8)更新稀疏表示系数矩阵 Q

(2-2) 利用 SVD 方法求解式(14)，更新字典 D，重复步骤(2-1)和(2-2)直至收敛

步骤 3 利用字典 D 和图像 X 恢复图像

(3-1) 采用近似 L_0 范数最小化算法求解式(15)得到稀疏表示系数 α_k

(3-2) 计算 $\hat{H}_k = D\alpha_k$，带入式(16)中得到方法噪声中的纹理信息 $\hat{H}$

(3-3) 由式(17)得到去噪后图像 X^*

输出结果：去噪后的图像 X^*

算法注释：

(1) 导引图像的选择：对噪声图像 Y 通过导引滤波去噪，导引图像选择图像 Y；

(2) 参数 u 的选择：无约束最优问题式(15)可以看成多目标规划通过线性加权和方法得到的结果，因此可以通过传统的 α－方法确定参数 u。

3.2　收敛性分析

本小节将分析迭代格式(9)的收敛性。

定理 1：迭代格式(9)求解最优化问题( )产生的序列能够收敛。

证明：易知　　　　$\nabla L_{\delta,u}(\boldsymbol{q}_l)^{\mathrm{T}} \nabla L_{\delta,u}(\boldsymbol{q}_l) > 0$
令 $\boldsymbol{d}_k = \nabla L_{\delta,u}(\boldsymbol{q}_l)$，则　　　　$-\nabla L_{\delta,\lambda_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}_k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}_k < 0$
由此可知 $\boldsymbol{d}_k$ 为下降方向。从而存在步长 t 满足
$$L_{\delta,u}(\boldsymbol{q}_l - t\,H\,\nabla L_{\delta,u}(\boldsymbol{q}_l)) < L_{\delta,u}(\boldsymbol{q}_l)$$

可知迭代格式(9)产生的序列是下降序列。又因为函数 $L_{\delta,u}(\boldsymbol{q}_l)$ 连续且可微，对于给定的初值，对应的水平集均有界，即该序列是有界序列。因此，迭代格式(9)产生的序列能够收敛。

4　实验与分析

本节将通过实验分析验证了本文算法的性能，并与 K-SVD 算法[1]进行比较。实验 1 比较了不同噪声均方差时去噪算法的 PSNR 值；实验 2 对比了去噪算法的去噪视觉效果；实验 3 给出了重叠像素对算法性能的影响；实验 4 字典原子个数对算法性能的影响。

下面仿真中，方法噪声图像块尺寸为 5×5，相邻的图像块重叠像素为 4，随机抽取 20 000 个图像块用于字典学习。字典 D 原子个数为 150，即 $\boldsymbol{D} \in R^{25 \times 150}$。所有实验在 CPU 为双核 3.0 GHz，内存为 4 GB 的计算机上运行，算法重建性能的衡量采用峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise, PSNR)。

实验 1：去噪算法 PSNR 值的比较

分别用 barbara、boat 和 house 进行测试，表 1 为不同噪声均方差时，3 种算法的 PSNR 值比较。由表 1 可以看出，相同情况下 MNSR 算法的 PSNR 值要高于其他 2 种算法。

表 1　3 种去噪算法的 PSNR 值比较

σ	barbara		boat		house	
	K-SVD	MNSR	K-SVD	MNSR	K-SVD	MNSR
20	30.88	31.79	30.25	31.10	32.86	33.25
25	29.30	30.61	29.15	30.24	32.14	32.89
30	28.57	29.78	28.44	29.38	31.05	31.66
50	25.46	26.53	25.99	26.75	27.97	28.43
100	21.95	23.12	22.81	23.58	24.37	25.98

实验 2：去噪算法视觉效果比较

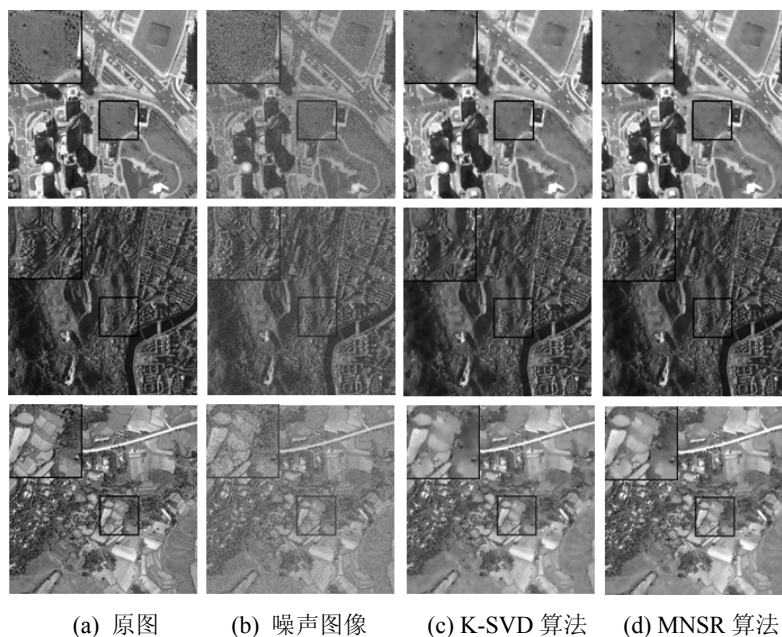本次实验利用三张遥感图像比较了不同算法的去噪视觉效果。取均方差 σ=30，图 3 比较了 3 幅不同的遥感图像的去噪视觉效果。由图 3 可以看出，本文提算法重建的图像更加清晰，视觉上更加接近原始图像。

　(a) 原图　　　(b) 噪声图像　　(c) K-SVD 算法　(d) MNSR 算法

图 3　不同算法去噪视觉效果比较

http://www.china-simulation.com

黄丽韶，等: 基于方法噪声稀疏表字典学习的图像去噪算法

实验 3：重叠像素个数对算法性能的影响

本次实验给出了重叠像素个数对算法性能的影响。取 $\sigma=30$，图 2 比较了不同重叠像素时，2 种算法的 PSNR(取实验 1 中 3 张图像均值)。由图 4 可以看出，随着重叠像素个数增加，算法去噪性能得到了提高。

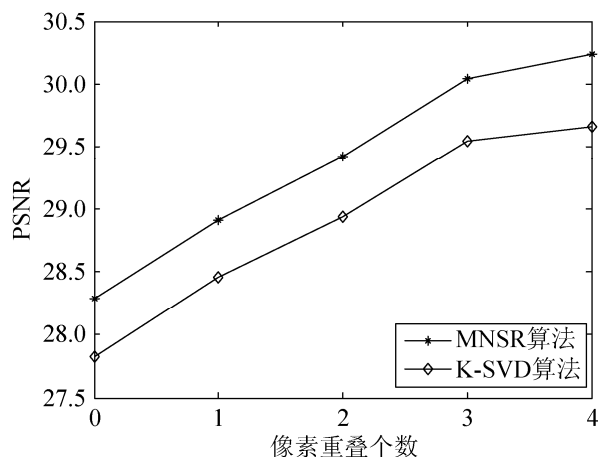图 4　像素重叠个数的影响

实验 4：字典原子个数对算法性能的影响

本次实验给出了字典原子个数对算法性能的影响。取 $\sigma=50$，其他仿真条件不变，原子个数由 100 到 1 000。图 5 给出了字典不同原子个数时得到的 PSNR 值(取实验 1 中 3 张图像均值)。由图 5 可以看出，当字典原子个数≥150 时本文算法的 PSNR 值达到稳定。
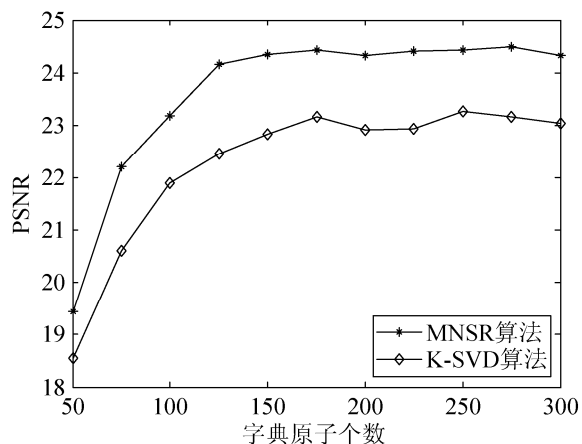

图 5　字典原子个数的影响

5　结论

针对现有去噪算法难以很好地保持图像细节和纹理信息的不足，本文提出基于方法噪声稀疏表示的图像去噪算法。该算法首先利用导引滤波去噪得到图像的方法噪声，然后利用字典学习和稀疏表示方法提取算法噪声中包含的图像纹理信息，从而提升去噪后的图像质量。实验结果表明，本文所提出的方法在峰值信噪比于现有的同类算法，且能较好地保持图像的纹理和细节信息，提高了视觉效果。

参考文献：

[1] M Elad, M Aharon. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries [J]. IEEE Transactions on Image Processing (S1057-7149), 2006, 15(12): 3736-3745.

[2] M Aharon, M Elad, A M Bruckstein. The K-SVD: an algorithm for designing of overcomplete dictionaries for sparse representation [J]. IEEE Transactions on Image Processing (S1057-7149), 2006, 54(11): 4311-4322.

[3] Y Romano, Mi Elad. Improving K-SVD denoise by post-processing its method-noise [C]// IEEE ICIP. USA: IEEE, 2013: 435-439.

[4] A Cherian, S Sra, N Papanikolopoulos. Denoising sparse noise via online dictionary learning [C]// IEEE ICASSP. USA: IEEE, 2011: 2060-2063.

[5] A Buads, B Coll, J M Morel. A non-local algorithm for image denoising [C]// IEEE CVPR. USA: IEEE, 2005: 60-65.

[6] J Mairal, F Bach, J Ponce, et al. Non-local sparse models for image restoration [C]// IEEE ICCV. USA: IEEE, 2009: 2272–2279.

[7] K Dabov, A Foi, K Egiazarian. Image denoising by sparse 3D transform-domain collaborative filtering [J]. IEEE Transactions on Image Processing (S1057-7149), 2007, 16(8): 2080-2095.

[8] H C Burger, C J Schuler, S Harmeling. Image denoising: Can plain neural networks compete with BM3D [C]// IEEE CVPR. USA: 2012: 2392-2399.

[9] M Elad. Sparse and redundant representation modeling-what next [J]. IEEE Signal Processing Letters (S1070-9908), 2012, 19(12): 922-928.

[10] M Elad. Sparse and redundant representations: From theory to applications in signal and image processing [M]. Germany: Springer, 2010.