

7-31-2020

Compressed-sensing Based Up-sampling Method for Fluid Simulation

Yijing Qian

School of Software, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

Xubo Yang

School of Software, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Compressed-sensing Based Up-sampling Method for Fluid Simulation

Abstract

Abstract: In computer fluid animation, the grid-based Euler method is a well-matured and effective way of simulating fluids, but a key bottleneck of Euler method is that it is limited to the traditional Nyquist-Shannon sampling theorem in sampling step. So it cannot effectively reduce the massive data and computing of the large-scale flow fields. In order to solve this problem, compressed sensing theory was used to probe a way to break through the limitation of the sampling theorem in fluid simulation. The sparsity and compressibility of fluid data were explored, then applicable sampling function, compressive basis and reconstruction algorithm for fluid data are selected. *A compressed-sensing based up-sampling method and framework for fluid simulation* was constructed based on researches and experiments. Several scenes of smoke animation were presented, the results show that *compressed-sensing based up-sampling method* can recover the details of the flow field to a certain extent, and prove the compressed sensing theory can apply to fluid simulation.

Keywords

fluid simulation, compressed sensing, up-sampling, sparse representation, reconstruction algorithm

Recommended Citation

Qian Yijing, Yang Xubo. Compressed-sensing Based Up-sampling Method for Fluid Simulation[J]. Journal of System Simulation, 2015, 27(7): 1426-1434.

流体模拟的压缩感知上采样方法研究

钱宜婧, 杨旭波

(上海交通大学软件学院, 上海 200240)

摘要: 在计算机流体动画模拟中, 欧拉网格方法是一种比较成熟和常用的模拟方法, 但其关键瓶颈在于数据采集环节, 受限于传统的 Nyquist 采样理论, 难以缩减流场中的海量数据采集和计算。针对这一问题, 基于压缩感知理论, 探究流体动画中突破传统数据采集的局限性的方法。通过研究流体速度场数据的稀疏性和可压缩性特征, 选取了适合于流体模拟的采样基、压缩基和重构算法, 建立流体模拟的压缩感知上采样方法的框架。多种场景下的模拟结果显示, 流体模拟的压缩感知上采样方法可以一定程度上恢复得到流场的细节, 验证了压缩感知理论在流体动画上应用的可行性。

关键词: 流体模拟; 压缩感知; 上采样; 稀疏表示; 重构算法

中图分类号: TP 391.9 文献标识码: A 文章编号: 1004-731X (2015) 07-1426-09

Compressed-sensing Based Up-sampling Method for Fluid Simulation

Qian Yijing, Yang Xubo

(School of Software, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: In computer fluid animation, the grid-based Euler method is a well-matured and effective way of simulating fluids, but a key bottleneck of Euler method is that it is limited to the traditional Nyquist-Shannon sampling theorem in sampling step. So it cannot effectively reduce the massive data and computing of the large-scale flow fields. In order to solve this problem, compressed sensing theory was used to probe a way to break through the limitation of the sampling theorem in fluid simulation. The sparsity and compressibility of fluid data were explored, then applicable sampling function, compressive basis and reconstruction algorithm for fluid data are selected. A compressed-sensing based up-sampling method and framework for fluid simulation was constructed based on researches and experiments. Several scenes of smoke animation were presented, the results show that compressed-sensing based up-sampling method can recover the details of the flow field to a certain extent, and prove the compressed sensing theory can apply to fluid simulation.

Keywords: fluid simulation; compressed sensing; up-sampling; sparse representation; reconstruction algorithm

引言

流体是自然界普遍的物理现象, 如烟、火、水等。流体动画基于物理的方法, 采用计算机模拟和

渲染, 是计算机图形学的一个重要的研究分支, 在影视游戏、虚拟现实、科学计算等领域有广泛的应用价值。目前基本的流体动画模拟方法主要基于计算流体力学中的简化模型, 主要分 2 大类: 欧拉网格法^[1-3]和拉格朗日粒子法^[4-5]。欧拉网格法由于流体的物理模拟效果好, 数值精度高, 便于数值计算与分析, 是较为常用的流体模拟方法。

为了适应流体动画技术和相关应用需求的发



收稿日期: 2014-08-11 修回日期: 2014-08-29;
基金项目: 国家自然科学基金项目(61173105);
作者简介: 钱宜婧(1989-), 女, 浙江, 硕士生, 研究方向为计算机图形学; 杨旭波(1971-), 男, 湖南, 博士, 教授, 研究方向为计算机图形学、虚拟现实。

<http://www.china-simulation.com>

• 1426 •

展, 追求快速又逼真的流体动画模拟, 学术界已经提出了各种欧拉网格法的优化方法, 如自适应网格采样^[6]、变化网格精度^[7-9]、额外添加细节^[10-12]、模型缩减法^[13-14]等。这些方法可以在一定程度上减少流体模拟时间和空间的消耗, 并保持一定的细节。但是这些方法总是有或方法过于复杂, 或一定程度的违背模型的物理性, 或场景普适性差, 或模型精度大幅下降等的缺点。其中有一个关键瓶颈就是这些方法都受限于经典的 Nyquist 采样理论, 无法将采样数量降低到定理限制的数量之下。因此, 我们有必要寻找一种方法能够摆脱这一限制, 减少采样数量和采样代价, 加速模拟, 同时保证模拟的细节效果。

本文的创新在于, 针对流体动画在欧拉方法中的数据采样受限于 Nyquist 采样定理这一瓶颈, 基于压缩感知理论^[15-17], 使用适合于欧拉网格的均匀采样法作为采样基, 通过实验探究了不同压缩基在流体数据上的稀疏性和重构效果, 并在此基础上, 构建流体模拟压缩感知上采样方法和框架。本文的方法突破传统数据采样方法的局限性, 在减少采样和计算消耗的同时, 能够一定程度上保持流体的细节。

1 相关工作

欧拉网格法通过在空间中设置固定的观测点, 离散化求解 Navier-Stokes 方程组得到一定时间序列中这些离散网格(观测点)上的物理量(速度、密度、温度等)的变化过程, 使用这些物理量的变化来模拟出流体动画。这种方法最早在计算物理学中得到深入的研究, Foster 等人^[1]在 1996 年率先将计算流体力学引入计算机图形学领域, Stam^[2]在 1999 年提出了无条件稳定的不可压缩流体模拟方法, 奠定了欧拉法的基础。Fedkiw 等人^[3]在 2001 年提出了烟模拟的框架, 这个框架的提出基本完善了欧拉法的步骤和流程。

因为欧拉网格的模拟时间和模拟效果与网格精度有关, 为了加速模拟同时获得细节, 许多研究

者使用了在粗网格模拟的基础上, 额外添加细节的方法。Kim 等人^[10]引入了 Kolmogorov 小波湍流模型, 在粗网格模拟的基础上合成不同规模的湍流细节。在此基础上, Pfaff 等人^[11]根据湍流能量转移来决定正确的湍流分配, 使用湍流粒子来表示湍流细节, 并将[10]中的湍流公式拓展为各向异性的。Yubo Zhang 等人^[12]使用了一种空间-时间外插的方法, 基于 Richardson 外插理论, 使用粗网格和细网格的计算结果, 获得可以媲美更高精度网格结果的细节。此外, Andrien 等人^[13]在 2006 年首次将模型缩减思想引入流体动画, 这种方法预计算一组满足不可压缩条件的高精度流体模拟结果, 再使用 Principal Component Analysis(PCA)方法降阶得到一组代表流场特征的正交基函数, 在缩减模型中求解方程, 运算效率可以达到实时, 但是大幅降低了模型的准确度, 处理移动的障碍物比较复杂, 且需要依赖于预计算。

另一方面, 传统的 Nyquist 采样定理(又称 Nyquist-Shannon 采样定理)指出: 如果原始信号是带宽受限的信号, 并且采样频率高于信号带宽的两倍, 那么该信号才可以从采样样本中完全重建出来, 否则, 可能导致重建时的混淆现象。近年来数学界提出了一个新的采样理论——压缩感知(Compressive Sensing, Compressed Sensing 或 Compressive Sampling, 简称 CS)^[15-17], 颠覆了 Nyquist 经典理论。它是 2006 年由 Donoho、Candes 和 Tao 等数学家建立起来的一个严格的数学理论。该理论只需很少的样本, 就可以保留数据的全部信息, 大幅减少了对冗余信息的获取与处理, 并能根据指定的质量损失, 可控地选取更稀疏的采样率。该理论一经提出, 立即吸引了国内外众多研究者的关注, 目前已经在应用数学、信号处理等多个领域得到了研究和应用。在计算机图形学相关的领域, 也已经有如图像压缩^[18], 医学图像处理^[19], 图像超分辨率^[20-22], 人脸识别^[23], 光线传输获取^[24-25], 光场重构^[26]等应用。但该理论目前在流体动画模拟上的应用还有待探索。

2 压缩感知理论和方法

压缩感知理论^[16]指出, 只要信号是稀疏的(有很多零)或可压缩的(可通过压缩基变换到一个稀疏空间), 并且采样基与压缩基不相关, 就可以用小于或远远小于 Nyquist 定理所要求的采样频率, 采样获得稀疏的样本, 然后通过优化方法准确地重构出原始信号。

2.1 数学定义

在压缩感知理论中, 定义一个 n 维信号向量 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 。 \mathbf{y} 是稀疏的, 即 \mathbf{y} 中只有有限个 (k 个, $k \ll n$) 非零采样点, 而其他采样点均为 0, 即 $\|\mathbf{y}\|_0$ 很小; 或者 \mathbf{y} 可以通过一定的正交稀疏变换 $\boldsymbol{\psi}$ 转换为变换域下的稀疏信号 \mathbf{x} , 变换的公式记为

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{y} \text{ 或 } \mathbf{y} = \boldsymbol{\psi} \mathbf{x} \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\psi}$ 被称为压缩基, 是一个 $n \times n$ 的正交矩阵。

再定义一个 m 维信号向量 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, 其中 $m \ll n$ 。 \mathbf{b} 是由 \mathbf{y} 通过矩阵 \mathbf{S} 下采样得到的, \mathbf{S} 称为采样基。 $m \times n$ 的感知矩阵 \mathbf{A} 是采样基与压缩基的乘积, 整个压缩感知的过程记为

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\boldsymbol{\psi}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2)$$

我们的目的就是要从采样的信号 \mathbf{b} 中恢复出 \mathbf{x} 或者 \mathbf{y} 。根据压缩感知理论, 当 \mathbf{A} 满足一定的条件时^[17,27], 原始信号是(2)式解集中稀疏度最高的那个解, 问题即求解一个 l_0 优化问题

$$\min \|\mathbf{x}\|_0 \text{ s.t. } \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3)$$

但是求解这样一个 l_0 问题是非常困难的, 这是一个 NP 难问题。因此, 需要寻求合适的范数来近似求解上述问题。由于采用传统意义的 l_2 范数最小的方法求得的解并不稀疏, 而采用 l_1 范数最小化求得的解为稀疏向量, 接近最小化 l_0 范数所得的真实解。所以可以选择 l_1 范数最小来近似求解, 即

$$\min \|\mathbf{x}\|_1 \text{ s.t. } \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (4)$$

2.2 重构算法

重构算法的主要目的是求解方程(3)或者方程(4), 常用的有 2 大类:

一种是针对 l_0 范数最小的贪婪算法, 通过不断的迭代逼近最优解, 直到两者的差别达到一定可以容忍的范围或者达到一定迭代次数时, 得到一个近似解。代表性算法有 OMP^[28](Orthogonal Matching Pursuit, 正交匹配追踪), ROMP^[29](Regularized Orthogonal Matching Pursuit, 正则化正交匹配追踪)等。

另一种是针对 l_1 范数最小提出的线性规划最优化算法, 通过求解方程(4), 将原来难以求解的 NP 问题转化为求解线性规划最优化问题。代表的算法有 BP^[30](Basis Pursuit, 基追踪), LASSO^[31](Least Absolute Shrinkage And Selection Operator, 最小绝对收缩和选择算子)等。

本文使用的重构算法属于第 2 种。

3 流体动画模拟框架

3.1 Navier-Stokes 方程组

Navier-Stokes 方程组(下文简称为 N-S 方程)是一组描述像液体和空气这样的流体物质的方程, 是计算机流体动画模拟的基础。其一般形式为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

其中: ρ 是流体的密度; \mathbf{u} 是流体的速度; \mathbf{g} 表示流体受到的外力; t 为时间; ν 为粘滞系数; 梯度

算子 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, 拉普拉斯算子

$$\nabla^2 \mathbf{f} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial z^2} \quad (7)$$

上述方程组(5)和(6)适用于不可压缩流体, 比如说水、烟等流体。用欧拉网格法求解 N-S 方程, 根据 Stam^[2]的基本框架, 某一帧的计算过程可以分为对流、扩散、投影和加外力 4 个步骤:

(1) 对流。使用现有的速度场模拟出目标流场随速度场经过一定时间的流动结果, 经典的方法有半拉格朗日法, 对于流场中的某一点, 回溯到上一个时间的位置, 通过插值求得该位置的数值, 即为该点经对流后的数值。

(2) 扩散。有粘性的流体会在运动时产生消散。为了进一步简化, 设无粘流体的粘滞系数 ν 为 0, 对应的扩散步骤可以省略。本文针对的就是无粘不可压缩流体的欧拉方法。

(3) 投影。为满足流场无散的条件, 即方程(6), 投影步骤需要求解一个压强场的泊松方程, 求解的方法通常有 jacobi 迭代、PCG (preconditioned conjugate gradient, 预处理共轭梯度法)等。

(4) 加外力。流体通常都会受到重力的影响, 一些流体如烟还要受到浮力的作用。

3.2 压缩感知的上采样模拟方法

欧拉方法模拟效果主要依赖于网格精度、对流方法的精度和投影步骤收敛条件的精度, 其中网格精度具有决定性的作用。然而, 网格精度的提高会带来内存消耗成比例的增加, 同时导致上述 4 个步骤的模拟时间变长, 特别是投影步骤的时间指数级的增长。从数据采样的角度来看, 欧拉方法中在空间固定点设置的网格观测点对应于采样点, 网格精度对应于采样频率。因此, 流体数据场的最高频率细节实际上限制了可用的最低采样频率必须高于信号最高频率的两倍, 当实际采样频率低于这一最低采样频率时, 用现有的模拟方法无法准确获得原始数据场细节。

然而, 压缩感知理论为解决这个限制提供了一种新的理论。根据该理论, 我们推测, 给出低精度流场数据, 使用合适的采样基、压缩基和重构算法应该可以恢复出高精度流场。为了减少 N-S 方程求解过程中最消耗时间和空间的投影步骤的耗费, 本文方法将流体投影在低精度网格上进行, 然后上采样得到高精度网格的速度场。因此, 我们对 Stam 的基本框架^[2]进行了一些修改, 所建立的流体模拟压缩感知上采样框架, 如图 1 所示, 其中的具体流程见过程 1。



图 1 压缩感知上采样方法的框架

过程 1. CS Navier-Stokes Solver

```

SetupInitialCondition(u0); //设置初始条件
IF currentFrame n < maxFrames //逐帧循环
    u* = Semi-Lagrangian(un); //半拉格朗日对流
    u** = u* + Δt g; //加外力
    uc = DownSampling(u**); //下采样速度场
    1/ρ ∇² p = ∇ · uc; //求解低精度泊松方程
    uc = uc - Δt/ρ ∇ p; //在粗网格上投影
    un+1 = CS-Upsampling(uc); //CS 上采样
    ConstrainBoundary(un+1); //边界处理
    Advect Density / Temperature; //对流密度场、温度场
  
```

END

其中, 设置初始条件这一步骤是要对计算区域进行初始化, 设定场景外边界条件和障碍物边界, 并设置密度场、温度场、速度场等的初始值。对流步骤采用的是半拉格朗日法。在投影步骤之前, 对速度场各个方向的分量分别使用采样基进行下采样, 得到低精度的速度场, 作为粗网格投影步骤的输入。粗网格投影步骤通过求解低精度泊松方程, 使低精度速度场满足粗网格上的无散条件。CS 上采样步骤中, 重构算法求得的结果是速度场经过压缩基变换后在稀疏空间中的数值, 需要使用压缩基的逆变换转换为欧拉网格的速度场。CS 上采样步骤得到的高精度速度场, 再经过边界处理后, 用以更新密度场和温度场, 并作为下一帧对流步骤的输入。

以下说明本文的框架中使用的压缩感知方法的 3 个要素。

(1) 采样基。通常压缩感知为了降低采样基和压缩基的相关性, 使用随机采样矩阵作为采样基。但是在我们的框架中, 采样后的低精度流场必须依然是一个可以作为投影步骤输入的流场。如果使用随机采样, 得到的采样点不是规则网格, 难以进行处理, 所以必须使用均匀采样。但是这样会使采样

基和压缩基的相关性较高,理论上不能完全恢复出原始信号。本文使用了均匀采样,实验结果可行。

(2) 压缩基。理论上来说通过压缩基变换后的稀疏性越大,需要的采样点可以越少,因为这意味着大部分的信息被包含在了较少的采样点中。通常压缩感知的压缩基有离散余弦变换、傅里叶变换、小波变换等。本文对傅里叶基和多种小波基进行了实验(见 4.1 节),最终权衡了稀疏性和重构效果,选定了最适合流场数据的小波基作为压缩基。

(3) 重构算法。本文使用的是一种 SPG^[32] (Spectral projected gradient)算法,该算法属于针对 l_1 范数最小提出的线性规划最优化算法,具有重构效果较好、需要的采样数较少的优点。算法的主旨在于通过定义一条描述最小二乘拟合与解的 l_1 范数之间关系的 Pareto 曲线,使 Lasso 问题的解接近于 BP(即方程(4))的解。该算法涉及到了压缩感知的第 3 种表达: Lasso^[31]问题:

$$\min \|Ax - b\|_2 \text{ s.t. } \|x\|_1 \leq \tau \quad (8)$$

以及其对偶问题:

$$\max b^T y - \tau \lambda \text{ s.t. } \|y\|_2 \leq 1, \|A^T y\|_\infty \leq \lambda \quad (9)$$

该算法可以通过控制 BP 问题(即方程(4))和 Lasso 问题(即方程(8))的收敛条件的精度,来控制算法恢复结果的精度。

4 实验和结果

4.1 流体数据的稀疏性实验

理论上稀疏度(稀疏性)是指采样值为 0 的点占所有采样点的比例,考虑到误差的影响,本文中数值值的绝对值小于某个很小阈值的采样点占所有采样点的比例来作为流场的稀疏度。3.2 节中提到过,为了确定多种压缩基对流体数据的适用性,我们选择任意一帧(图 2)速度场数据进行实验,使用相同的均匀采样基和 SPG 重构算法,对比经压缩基变换后的稀疏度、重构所需要的循环数(与重构时间成正比)和重构效果(使用峰值信噪比 PSNR 进行衡量)。



(a) 密度场 (b) 纵向速度场 (c) 横向速度场

图 2 某帧速度场的稀疏性实验图

实验中,进行测试的压缩基包括 FFT(快速傅里叶)变换基和几种具有代表性的小波变换基(括号中是 matlab 中该小波函数的简称): Biorthogonal 族(bior), Daubechies 族(db2 和 haar), Symlets 族(sym)。小波变换的最大层数为 $\log_2 N$, N 是流场单维度的网格尺度,如 128×128 的流场时 $N=128$ 。表 1 列举了图 2 对应的帧的纵向速度场(大小为 128×128)的实验结果数据,其中原流场的稀疏度百分比为 0.342 834。

表 1 压缩基实验对比结果

压缩基 种类	变换后的 稀疏度(百分比)	重构所需 循环数	重构后的 PSNR
bior1.1	0.826 294	17	71.471 499
bior1.3	0.812 134	55	83.308 489
bior1.5	0.805 420	74	85.813 620
sym4	0.893 311	88	76.503 947
sym8	0.896 362	111	77.138 369
db2	0.875 854	75	73.778 472
haar	0.826 294	17	71.471 499
FFT	0.796 814	371	75.438 481

实验结果中,因为 bior1.1 和 haar(也就是 db1)分解出的低通滤波和高通滤波是相等的,所以两者的实验数据也相等。从实验数据来看, sym 族小波基虽然稀疏度最高,但重构所需循环数较多,重构后的 PSNR 值也不是最高的; bior1.1 和 haar 小波基虽然循环数少,但重构后的 PSNR 值较低,重构效果较差; FFT 基稀疏度低,所需循环数过多,且重构后的 PSNR 值也不高;而 bior1.3 和 bior1.5 稀疏度虽然不高,但重构后的 PSNR 高,循环数也在可以接受的范围之内。权衡变换后的稀疏度、重构所需循环数和重构效果 3 者,小波基中 bior1.3 和 bior1.5 是最适合于流场数据的压缩基。

4.2 流体模拟上采样方法结果

图 3~5 分别是 3 个场景, 一个是无固体障碍物的烟喷涌上升场景, 一个是中间有一个大球的场景, 最后是有 6 个小球的场景。在这些场景中, 当帧数小于某个规定的数值时, 每帧开始会在场景下方添加一些烟(密度)。外力考虑烟的重力和浮力。场景中的外界边界均设为固体边界, 烟无法运动到模拟区域以外的边界。模拟过程与 3.2 节中所述的流程一样, 利用计算出的速度场, 更新密度场和温度场, 根据密度场进行可视化。

图 3 无障碍物的场景采用 256×256 的高精度网格大小, 投影时下采样倍数为 2, 即投影步骤的低精度网格大小为 128×128 , 因此采样比率为 25%。图 4 和图 5 有障碍物的场景采用 128×128 的高精度网格, 下采样倍数为 2, 即投影步骤的低精度网格大小为 64×64 。

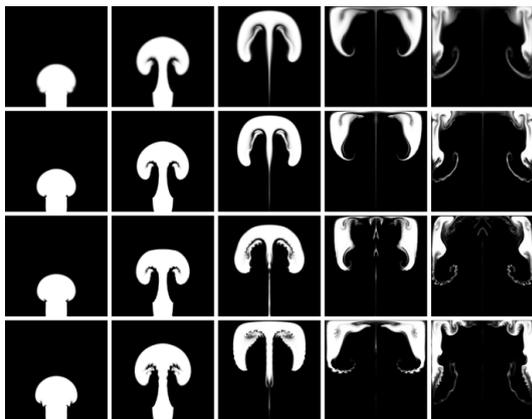


图 3 无障碍物的场景对比图

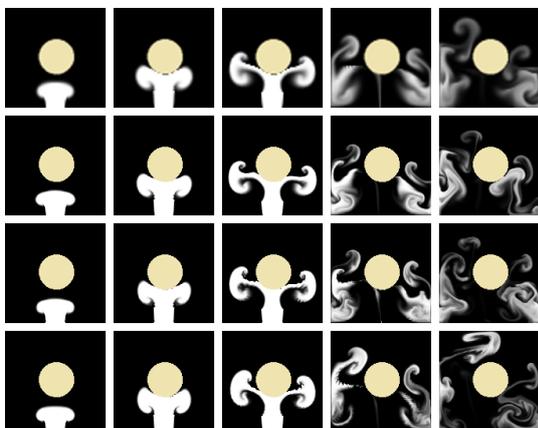


图 4 一个障碍物的场景对比图

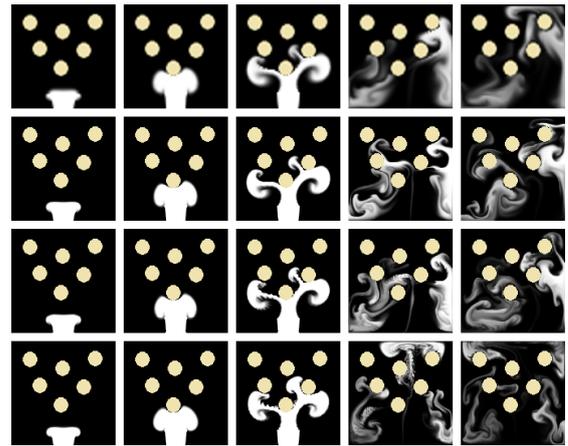


图 5 多个障碍物的场景对比图

图 3~5 中, 第 1 行均为低精度模拟结果, 第 2 行均为双 3 次上采样框架模拟结果, 第 3 行均为压缩感知上采样框架模拟结果, 第 4 行均为高精度模拟结果。其中低精度模拟结果指的是整个模拟过程都在与图 1 的模拟框架中的“粗网格投影”步骤相同精度的网格上模拟的结果, 双 3 次上采样框架模拟结果指的是将框架中的“CS 上采样”步骤替换为“双 3 次插值上采样”后的模拟结果。

从结果的对比上来看, 细节方面双 3 次插值可以恢复一些低精度模拟没有的细节, 而压缩感知方法可以恢复出比双 3 次插值更多的细节; 形态方面, 压缩感知上采样和双 3 次上采样模拟结果的形态都与低精度模拟结果的形态相近, 而与高精度模拟结果的形态存在一定差异, 这是因为本文的框架中, 速度场是由粗网格投影后经过上采样得到的。

5 问题讨论

5.1 效率问题

因为 N-S 方程求解的时间和空间耗费主要是投影步骤, 所以如果在 2 倍下采样的低精度网格上进行投影, 理论上投影步骤可以提升约 4 倍的计算效率, 而整体计算效率也可以有较大的提升。

但使用压缩感知进行上采样, 重构得到高精度速度场时也需要通过迭代求解一个最优化问题, 其计算的效率与稀疏度、重构算法的种类和重构的收敛条件有一定相关。而针对 l_0 范数最小的贪婪算法

在规模较大、采样点较少的情况下，要收敛到与 SPG 算法相同精度时需要的迭代次数和计算时间更多。表 2 是压缩感知上采样(SPG matlab 版本)、压缩感知上采样(SPG C++版本)、双 3 次上采样和高精度模拟效率的对比。

表 2 模拟效率对比结果

模拟精度	SPG (Matlab)	SPG (C++)	双 3 次 (C++)	高精度 (C++)
128×128	250 ms	1 600 ms	70 ms	120 ms
256×256	1 400 ms	6 000 ms	290 ms	550 ms

本文的实验环境为 Win7 64 位操作系统，Intel Core™ i7-3770 CPU @ 3.40GHz 3.40GHz 处理器，16 G 内存，流体模拟框架实现的软件环境为 VS2010，稀疏性实验的软件环境为 Matlab R2011a。其中 SPG 重构算法有 C++和 Matlab 2 个版本的实现，C++版本中使用了矩阵库 Armadillo4.320。由于重构算法中需要大量的矩阵乘法运算，而 Armadillo 的矩阵乘法速率没有 Matlab 的快，导致 C++版本的 SPG 算法效率比 Matlab 版本要慢。而通过对 SPG 算法 C++版本中各步骤的运算时间的记录和比较，发现矩阵乘法所花费的时间占到整个算法的时间的 80%以上。

从表 2 的数据来看，要使压缩感知的方法能够加快流体模拟的整体效率，就必须加快重构的速度：或者通过调节收敛精度减少迭代次数，或者对算法并行计算的可能性进行研究，或者进一步的改进和优化重构算法的效率，其中改进矩阵乘法的运算效率尤为重要。

5.2 恢复质量的评价问题

在图像恢复质量的评价中，主要有主观评价和客观评价 2 类，其中均方误差(MSE)和等价的峰值信噪比(PSNR)都是客观评价方法中最常用的算法之一，两者都表达了恢复图像相对于原始理想图像的相似程度。本文中对于速度场的恢复效果的评价，也使用了 PSNR，因为对于速度场的每一个分量，都将原高精度的速度场数值看做原始图像，将

恢复出的速度场数值看做恢复图像，可以用来衡量两者的相似程度。不过如果需要考虑恢复结果相对下采样结果的改善程度，还可以使用信噪比改善因子(ISNR)来衡量。

在与双 3 次结果对比时，从 PSNR 值上看，SPG 算法要比双 3 次上采样略高：仍以 4.1 节表 1 中的实验数据为例，使用双 3 次上采样后的 PSNR 为 76.976 750，使用 bior1.3 和 bior1.5 小波基的 PSNR 值分别为 83.308 489 和 85.813 620。但是在计算机动画中，主观评价还是主要的衡量方法，从观察者的主观感知上来看，压缩感知方法可以恢复出比双 3 次插值更多的细节。

5.3 算法的通用性问题

目前基于压缩感知上采样的流体模拟方法和框架只在 2D 上完成了实现。在处理时会将速度场 2 个方向的分量(均为 2 维的矩阵)转化为向量分别进行下采样和重构，所以每个分量之间互相没有影响。在扩展到 3D 时，也可以对 3 个方向的分量(均为三维矩阵)分别转化为向量来进行处理。

其次，目前该方法只在烟模拟上进行了实现，还未验证其是否适用于自由表面流体。如果想要让该方法适用于自由表面，可能还需要一些相关的额外处理。

关于算法可以支持的网格尺度规模问题，目前尝试过最大的网格规模为 512×512 。但从理论上讲，该方法适用的网格规模受限于机器的内存：如果网格规模为 $N \times N$ ，下采样倍数为 s ，那么公式 2 中的 \mathbf{x} 是一个 $(N \times N) \times 1$ 大小的向量， \mathbf{y} 是一个 $(N/s \times N/s) \times 1$ 大小的向量，感知矩阵 \mathbf{A} 的大小为 $(N/s \times N/s) \times (N \times N)$ ，所以至少需要有能够容纳这些矩阵和向量的数值的内存。如果要使其适用于更大规模的网格，就需要突破内存的限制，还需进一步研究。

6 结论

本文提出了一种基于压缩感知上采样的流体

模拟方法, 该方法可以摆脱之前流体模拟在数据采样时传统 Nyquist 采样定理的束缚。本文根据流体速度场数据的特性, 使用了均匀采样基、小波变换压缩基和 SPG 重构算法, 建立了流体动画的压缩感知上采样方法和框架。从该上采样框架的模拟结果显示, 本文的方法可以较好地恢复流场的细节, 验证了压缩感知理论在流体模拟中的可行性。

参考文献:

- [1] Foster N, Metaxas D. Realistic animation of liquids [J]. Graphical models and image processing (S1077-3169), 1996, 58(5): 471-483.
- [2] Stam J. Stable fluids [C]// Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (ISBN: 0-201-48560-5). USA: ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 1999: 121-128.
- [3] Fedkiw R, Stam J, Jensen H W. Visual simulation of smoke [C]// Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, (ISBN: 1-58113-374-X). USA: ACM, 2001: 15-22.
- [4] Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics [J]. Annual Review of Astronomy and Astrophysics (S0066-4146), 1992, 30(8): 543-574.
- [5] Müller M, Charypar D, Gross M. Particle-based fluid simulation for interactive applications [C]// Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation (ISBN: 1-58113-659-5). USA: ACM, Eurographics Association, 2003: 154-159.
- [6] Losasso F, Gibou F, Fedkiw R. Simulating water and smoke with an octree data structure [J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), ACM (S0730-0301), 2004, 23(3): 457-462.
- [7] Zhu B, Lu W, Cong M, *et al.* A new grid structure for domain extension [J]. ACM Transactions on Graphics (TOG) (S0730-0301), 2013, 32(4): 96-96.
- [8] Lentine M, Zheng W, Fedkiw R. A novel algorithm for incompressible flow using only a coarse grid projection [J]. ACM Transactions on Graphics (TOG) (S0730-0301), 2010, 29(4): 157-166.
- [9] Wu X, Yang X, Yang Y. A Novel Projection Technique with Detail Capture and Shape Correction for Smoke Simulation [C]// Computer Graphics Forum. USA: Blackwell Publishing Ltd, 2013, 32(2): 389-397.
- [10] Kim T, Thürey N, James D, *et al.* Wavelet turbulence for fluid simulation [J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), ACM (S0730-0301), 2008, 27(3): 15-19.
- [11] Pfaff T, Thuerey N, Cohen J, *et al.* Scalable fluid simulation using anisotropic turbulence particles [J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), ACM (S0730-0301), 2010, 29(6): 174(1)-174(8).
- [12] Zhang Y, Ma K L. Spatio-temporal Extrapolation for Fluid Animation [J]. ACM Transactions on Graphics (S0730-0301), 2013, 32(6): 2504-2507.
- [13] Treuille A, Lewis A, Popović Z. Model reduction for real-time fluids [J]. ACM Transactions on Graphics (TOG) (S0730-0301), 2006, 25(3): 826-834.
- [14] Wicke M, Stanton M, Treuille A. Modular bases for fluid dynamics [C]// ACM Transactions on Graphics (TOG). ACM (S0730-0301), 2009, 28(3): 341-352.
- [15] Candes E J, Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? [J]. Information Theory, IEEE Transactions on (S0018-9448), 2006, 52(12): 5406-5425.
- [16] Donoho D L. Compressed sensing [J]. Information Theory, IEEE Transactions on (S0018-9448), 2006, 52(4): 1289-1306.
- [17] Candès E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling [J]. Signal Processing Magazine, IEEE (S1053-5888), 2008, 25(2): 21-30.
- [18] Takhar D, Laska J N, Wakin M B, *et al.* A new compressive imaging camera architecture using optical-domain compression [C]// Electronic Imaging 2006. International Society for Optics and Photonics. 2006: 43-52.
- [19] M Lustig, D Donoho, J M Pauly. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging [J]. Magnetic Resonance in Medicine (S1522-2594), 2007, 58(6): 1182-1195.
- [20] Sen P, Darabi S. Compressive image super-resolution [C]// Signals, Systems and Computers, 2009 Conference Record of the Forty-Third Asilomar Conference on (ISBN: 978-1-4244-5825-7). USA: IEEE, 2009: 1235-1242.
- [21] Yang J, Wright J, Huang T S, *et al.* Image super-resolution via sparse representation [J]. Image Processing, IEEE Transactions on (S1057-7149), 2010, 19(11): 2861-2873.
- [22] Yang J, Lin Z, Cohen S. Fast Image Super-Resolution Based on In-Place Example Regression [C]// Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2013 IEEE Conference on (ISBN: 978-0-7695-4989-7). USA: IEEE, 2013: 1059-1066.

- [23] Wright J, Yang A Y, Ganesh A, *et al.* Robust face recognition via sparse representation [J]. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on (S0162-8828)*, 2009, 31(2): 210-227.
- [24] Gu J, Nayar S K, Grinspun E, *et al.* Compressive structured light for recovering inhomogeneous participating media [J]. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on (S0162-8828)*, 2013, 35(3): 1-1.
- [25] Sen P, Darabi S. *Compressive dual photography [C]// Computer Graphics Forum. USA: Blackwell Publishing Ltd, 2009, 28(2): 609-618.*
- [26] Marwah K, Wetzstein G, Bando Y, *et al.* Compressive light field photography using overcomplete dictionaries and optimized projections [J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG) (S0730-0301)*, 2013, 32(4): 46.
- [27] Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. *Information Theory, IEEE Transactions on (S0018-9448)*, 2006, 52(2): 489-509.
- [28] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. *Information Theory, IEEE Transactions on (S0018-9448)*, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [29] Needell D, Vershynin R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit [J]. *Selected Topics in Signal Processing, IEEE Journal of (S1932-4553)*, 2010, 4(2): 310-316.
- [30] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. *SIAM journal on scientific computing (S1095-7197, S1064-8275)*, 1998, 20(1): 33-61.
- [31] Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the lasso [J]. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) (S1467-9868)*, 1996, 58(1): 267-288.
- [32] Van Den Berg E, Friedlander M P. Probing the Pareto frontier for basis pursuit solutions [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing (S1095-7197, S1064-8275)*, 2008, 31(2): 890-912.

(上接第 1425 页)

- [4] 易赛莉. 高大空间建筑火灾数值仿真模型的应用研究[J]. *系统仿真学报*, 2009, 21(19): 6020-6024. (Yi Sai-li. Research on Simulation Models Applied in Fire Analysis of Large Space Buildings [J]. *Journal of System Simulation*, 2009, 21(19): 6020-6024.)
- [5] 金达华. 密闭腔室火灾温度的大涡模拟[J]. *消防科学与技术*, 2012, 31(5): 463-466.
- [6] 高璞珍, 刘顺隆, 周允基, 等. 商业街火灾烟气流动的大涡模拟[J]. *热科学与技术*, 2004, 3(2): 116-120.
- [7] 曹宇, 黄光球. 基于格子 boltzmann 的地下矿火灾热流大涡模拟[C]// *Proceedings of 2010 International Conference on Circuit and Signal Processing & 2010 Second IITA International Joint Conference on Artificial Intelligence (Volume 2)*, 524-527.
- [8] 陈驰, 任爱珠, 张新, 等. 基于虚拟现实的建筑火灾模拟系统[J]. *自然灾害学报*, 2007, 16(1): 55-60.
- [9] 冯明初, 杨志青, 仲晨华, 等. 用区域模拟方法评估舰艇火灾危险性[J]. *武汉理工大学学报*, 2006, 30(3): 512-515.
- [10] Peizhong Yang, Xun Tan, Haochi Sun, *et al.* LES field model-based fire accident reconstruction with OED method and its experimental validation [J]. *Fire Safety Journal (S0379-7112)*, 2011, 58: 74-83.
- [11] 刘奕, 郭印诚, 张会强, 等. 大涡模拟及其在湍流燃烧中的应用[J]. *力学进展*, 2001, 31(2): 215-226.
- [12] J Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations [J]. *The basic equations*, 1963, 91: 99-164.
- [13] 戴培邦. 一种改性磷—氮膨胀型阻燃剂阻燃 ABS 的阻燃性能及燃烧行为[J]. *绝缘材料*, 2010, 43(6): 36-38.