

9-1-2020

## Algorithm for Solving Symmetric Cone Complementarity Problems

Leifu Gao

*Institute of Optimization and Decision, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China;*

Dongmei Yu

*Institute of Optimization and Decision, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China;*

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

## Algorithm for Solving Symmetric Cone Complementarity Problems

### Abstract

*Abstract: A monotonic trust region algorithm for symmetric cone complementarity problems was proposed based on a smoothing function. The problem was transformed into unconstrained optimization problem and the trust region subproblem was constructed. The problem was solved by using trust region algorithm combined with nonmonotonic strategies, and the global convergence of the algorithm was proved.* Numerical experimental results demonstrate that the algorithm is effective for symmetric cone complementarity problems.

### Keywords

symmetric cone complementarity problems, trust region algorithms, nonmonotonic strategies, Newton method, smooth function

### Recommended Citation

Gao Leifu, Yu Dongmei. Algorithm for Solving Symmetric Cone Complementarity Problems[J]. Journal of System Simulation, 2015, 27(5): 1050-1056.

## 一种求解对称锥互补问题的算法

高雷阜, 于冬梅

(辽宁工程技术大学优化与决策研究所, 辽宁 阜新 123000)

**摘要:** 提出了一种求解对称锥互补问题的信赖域算法。基于光滑函数, 将对称锥互补问题转化为无约束优化问题, 构造了信赖域子问题, 利用结合非单调策略的信赖域算法进行求解, 并证明了该算法具有全局收敛性。仿真实验结果表明, 算法对求解对称锥互补问题是有效的。

**关键词:** 对称锥互补问题; 信赖域算法; 非单调策略; 牛顿算法; 光滑函数

中图分类号: O2224

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2015) 05-1050-07

## Algorithm for Solving Symmetric Cone Complementarity Problems

Gao Leifu, Yu Dongmei

(Institute of Optimization and Decision, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

**Abstract:** A monotonic trust region algorithm for symmetric cone complementarity problems was proposed based on a smoothing function. The problem was transformed into unconstrained optimization problem and the trust region subproblem was constructed. The problem was solved by using trust region algorithm combined with nonmonotonic strategies, and the global convergence of the algorithm was proved. Numerical experimental results demonstrate that the algorithm is effective for symmetric cone complementarity problems.

**Keywords:** symmetric cone complementarity problems; trust region algorithms; nonmonotonic strategies; Newton method; smooth function

## 引言

对称锥互补问题 (Symmetric cone complementarity problems, SCCP) 是在满足对称锥约束的条件下, 两组决策变量之间满足一种互补关系<sup>[1-2]</sup>。1994 年, J. Faraut 和 A. Koranyi 出版的若当代数技术的专著开启了人们对对称锥互补问题的全面认识。同年, Nesterov 和 Nemirovski 提出了求解对称锥互补问题的内点法<sup>[3]</sup>; 1997 年, Faybusovich 基于欧氏若当代数理论, 提出了解线性对称锥优化问题的内点算法, 并证明了其多项式

复杂性<sup>[4-5]</sup>。Schmiedt 和 Alizadeh 分别在 2001 和 2003 年用牛顿法求解松弛后的线性对称锥优化问题的 KKT 系统, 证明了各种不同的原始对偶内点法的收敛速度均具有多项式复杂性<sup>[6-7]</sup>。随着优化理论和算法的不断完善, 许多原来难解决甚至不能解决的问题都可以转化为求解对称锥优化问题的模型。求解标准互补问题的半光滑牛顿法、内点法、效用函数法、光滑牛顿法等算法已经被推广到对称锥互补问题上<sup>[8-12]</sup>。信赖域算法是求解非线性优化问题的一类重要的数值方法之一, 其研究始于 Powell 的工作, 他首创性的证明了该方法的全局收敛性; 袁亚湘<sup>[13]</sup>在信赖域算法的设计和收敛性分析方面取得了一系列的重要成果。信赖域算法因其很强的稳定性、适应性和收敛性在求解无约束优化问题中备受青睐<sup>[14]</sup>。



收稿日期: 2014-04-15 修回日期: 2014-09-24;  
基金项目: 教育部高校博士学科科研基金联合资助项目(20132121110009);  
作者简介: 高雷阜(1963-), 男, 辽宁阜新人, 教授, 研究方向为最优化理论与应用、混沌动力系统预测;  
于冬梅(1986-), 女, 辽宁鞍山人, 博士生, 研究方向为最优化理论与应用。

<http://www.china-simulation.com>

• 1050 •

## 1 Euclid Jordan 代数和对称锥

欧式若当代数指:  $(V, \circ, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  是一个定义在实数域上的, 有限维内积空间,  $(x, y) \mapsto x \circ y: V \times V \rightarrow V$  是一个满足下述条件的双线性映射:

- (1)  $x \circ y = y \circ x, x, y \in V$ ;
- (2)  $x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y), \forall x, y \in V, x^2 = x \circ x$ ;
- (3)  $\langle x \circ y, z \rangle = \langle y, x \circ z \rangle, \forall x, y, z \in V$ .

称  $x \circ y$  为元素  $x$  和  $y$  的若当积, 假设  $V$  存在一个元素  $e$  满足  $\forall x \in V$ , 有  $x \circ e = e \circ x = x$ , 则将该元素称为单位元。如果  $e \circ e = e$ , 元素  $e \in V$  称为幂等元; 如果  $e \circ e' = 0$  称幂等元  $e$  和  $e'$  是正交的; 若非零幂等元  $e$  无法分解成两个非零幂等元之和, 称  $e$  为基本幂等元。定义  $V$  的秩  $r := \max\{\text{deg}(x): x \in V\}$ , 其中  $\text{deg}(x)$  为使得  $\{e, x, \dots, x^m\}$  为线性相关的最小正整数  $m$ , 如果  $e_1, e_2, \dots, e_r$  相互正交且  $e_1 + e_2 + \dots + e_r = e$ , 则幂等元集合  $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$  称为幂等元正交完备系; 若正交完备系中的所有幂等元都是基本幂等元, 则称此基本幂等元正交完备系为欧式若当代数  $V$  的一个若当基底平方集合  $\kappa := \{x^2: x \in V\}$ , 称为对称锥, 即  $\kappa$  是一个自对偶的非空闭凸集, 对任意两元素  $x, y \in \kappa$ , 存在一个可逆的线性变换  $\Gamma: V \rightarrow V$ , 使得  $\Gamma(J) \rightarrow (J)$  和  $\Gamma(x) \rightarrow y$  成立。

定义 1.1 若当积是双线性的, 对  $\forall x \in V$ , 存在线性映射  $L_x: V \rightarrow V$ , 使得: 对  $\forall y \in V$  有  $L_x(y) = x \circ y$ , 称该线性映射为 Lyapunov 变换,  $L_x$  的逆记为  $L_x^{-1}$ 。

定义 1.2 设变换  $F: V \rightarrow V$ , 任取  $x, y \in V$ , 有  $\langle x - y, F(x) - F(y) \rangle \geq 0$ , 则称  $F$  在  $V$  上单调。

定义 1.3 对于非光滑函数  $g: R^n \rightarrow R^m$ , 含有参数  $\mu$  的函数  $g_\mu: R^n \rightarrow R^m$ , 它有下列性质:

- (1) 对于任意的  $\mu > 0$ ,  $g_\mu$  是可微的。
- (2) 对于任意的  $x \in R^n$ ,  $\lim_{\mu \rightarrow 0} g_\mu(x) = g(x)$ , 则称函数  $g_\mu$  是  $g$  的光滑函数。

## 2 光滑函数及其性质

考虑对称锥互补问题, 寻求  $x \in V$ , 使得

$$x \in \kappa, F(x) \in \kappa, \langle x, F(x) \rangle = 0 \quad (1)$$

其中:  $V$  是  $n$  维欧式空间;  $\kappa$  是  $V$  上的对称锥;  $F: V \rightarrow V$  的一个连续可微的变换。

本文使用如下函数:  $\forall (\mu, x, y) \in R_{++} \times V \times V$   
 $\phi(\mu, x, y) := (\cos \mu + \sin \mu)(x + y) -$

$$\sqrt{(\cos \mu - \sin \mu)^2 (x - y)^2 + \mu^2 e} \quad (2)$$

引理 2.1 设  $\phi: R_{++} \times V \times V \rightarrow V$ , 由(1)式, 则

- (1)  $x \in \kappa, y \in \kappa, x \circ y = 0 \Leftrightarrow x \in \kappa, y \in \kappa, \langle x, y \rangle = 0$ 。
- (2)  $\phi(0, x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in \kappa, y \in \kappa, x \circ y = 0$ 。

定理 2.1 设  $\phi: R_{++} \times V \times V \rightarrow V$ , 定义如(2)式, 则

(1)  $\phi$  处处全局 Lipschitz 连续, 强半光滑, 并且  $\phi$  在任意  $z = (\mu, x, y) \in R_{++} \times V \times V$  上处处连续可微, 且其雅可比矩阵为:

$$\nabla \phi(\mu, x, y) = \begin{pmatrix} \phi'_\mu \\ \phi'_x \\ \phi'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos \mu - \sin \mu)(x + y) + \\ L_w^{-1}[\cos 2\mu(x - y)^2 - 2\mu e] \\ (\cos \mu - \sin \mu)I - \\ (\cos \mu - \sin \mu)^2 L_w^{-1} L_{(x-y)} \\ (\cos \mu - \sin \mu)I + \\ (\cos \mu - \sin \mu)^2 L_w^{-1} L_{(x-y)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中

$$w := w(\mu, x, y) = \sqrt{(\cos \mu - \sin \mu)^2 (x - y)^2 + \mu^2 e} \quad (4)$$

(2) 对于任意  $(x, y) \in V \times V$ , 有  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \phi(\mu, x, y) = \psi(0, x, y)$  成立, 因此,  $\psi(0, x, y)$  是  $\phi(\mu, x, y)$  的光滑逼近函数<sup>[15-18]</sup>。

证明

(1) 根据文献[19]中定理 3.2 的推论可知  $\phi$  处处全局 Lipschitz 连续, 强半光滑, 且在任意  $z = (\mu, x, y) \in R_{++} \times V \times V$  处连续可微, 下证(3)式成立, 对于任意  $z = (\mu, x, y) \in R_{++} \times V \times V$ , 通过(4)有

$w \in \text{int } K$ ，因此  $L_w$  可逆，由  $w$  的定义可以得到

$$w^2 = (\cos \mu - \sin \mu)^2 (x - y)^2 + \mu^2 e \quad (5)$$

对(5)两边同时求导，通过求微分的链式法则得出

$$\nabla w(\mu, x, y) = \begin{pmatrix} -L_w^{-1}[\cos 2\mu(x-y)^2 - 2\mu e] \\ (\cos \mu - \sin \mu)^2 L_w^{-1} L_{(x-y)} \\ -(\cos \mu - \sin \mu) L_w^{-1} L_{(x-y)} \end{pmatrix} \quad (6)$$

因此得到  $\phi$  的雅克比矩阵。

(2) 设  $x+y = \sum_{i=1}^r a_i u_i$  和  $(x-y)^2 = \sum_{i=1}^r \beta_i v_i$ ，因此

得到  $\psi(0, x, y) = \sum_{i=1}^r a_i u_i - \sum_{i=1}^r \sqrt{\beta_i} v_i$ ，所以

$$\begin{aligned} \phi(\mu, x, y) &= \sum_{i=1}^r ((\cos \mu + \sin \mu) \alpha_i) u_i - \\ &\sum_{i=1}^r \sqrt{(\beta_i (\cos \mu - \sin \mu)^2 + 2\mu^2)} v_i = \\ &\sum_{i=1}^r a_i(\mu) u_i - \sum_{i=1}^r \sqrt{\beta_i(\mu)} v_i \end{aligned}$$

由  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \alpha_i(\mu) = \alpha_i$  和  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \beta_i(\mu) = \beta_i$  得到  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \phi(\mu, x, y) = \psi(0, x, y)$  成立。因此， $\psi(0, x, y)$  是  $\phi(\mu, x, y)$  的光滑逼近函数。

### 3 信赖域子问题的构造

基于光滑函数(2)式，将对称锥互补问题的非光滑等价方程组光滑为如下光滑方程组。记

$$z = (\mu, x, y) \in R_{++} \times V \times V$$

$$H(z) = \begin{pmatrix} \mu \\ F(x) - y \\ \phi(z) \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

由互补函数的定义知，对称锥互补问题(1)的解与方程  $\|H(z)\| = 0$  的解是一致的。

定义一个函数

$$\Psi(z) = \frac{1}{2} \|H(z)\|^2 \quad (8)$$

求解  $H(z) = 0$  转化成对无约束最小优化问题  $\min \Psi(z)$  的求解。

根据信赖域的基本思想构造信赖域子问题

$$\begin{aligned} \varphi_k(d) &= H(z_k) + \nabla H(z_k)^T d + \\ &1/2 d^T \nabla H(z_k) \nabla H(z_k)^T d \\ \text{s.t. } \|d\| &\leq \Delta_k \end{aligned} \quad (9)$$

求信赖域子问题(9)的最优解  $d_k$ ，计算目标函数的实际下降量  $\text{Are } d_k = \|H_k\| - \|H(z_k + d_k)\|$  与预估下降量  $\text{Pre } d_k = \|\phi_k(0)\| - \|\phi_k(d_k)\|$  的比值  $r_k$ 。

$$r_k = \frac{\text{Are } d_k}{\text{Pre } d_k} = \frac{\|H_k\| - \|H(z_k + d_k)\|}{\|\phi_k(0)\| - \|\phi_k(d_k)\|}$$

若  $r_k \geq \eta_1$ ，其中  $\eta_1 \in (0, 1)$ ，则接受  $d_k$ ， $z_{k+1} = z_k + d_k$ ，信赖域半径增加或保持不变，否则减小半径，求新的  $d_k$  和  $r_k$ ，重复上述过程，求得无约束优化问题的最优解。定义

$$\|H_{l(k)}\| = \max_{0 \leq j \leq m(k)} \{ \|H(z_{k-j})\| \} \quad (10)$$

式中： $m(k) = \min\{m(k-1) + 1, M\}$ ， $M$  是非负整数， $m(0) = 0$ 。

对式(10)进一步修正，在  $\|H_{l(k)}\|$  的前面乘以参数  $a_k$ 。若  $\|H_{l(k)}\| \geq \theta$ ，则  $a_k \geq 1$ ；如果  $\|H_{l(k)}\| < \theta$ ，则  $a_k < 1$ ， $\theta \in (0, N^+)$ ，在迭代的过程中  $a_k$  总是趋向于 1 的，即  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1$ 。对信赖域半径的调整基于  $\text{Are } d_{l(k)}^k = a_k \|H_{l(k)}\| - \|H(z_k + d_k)\|$  与  $\text{Pre } d_k$  的比值。若要求接受条件为

$$\rho_{l(k)}^k = \text{Are } d_{l(k)}^k / \text{Pre } d_k \geq \eta_1$$

就接受  $z_{k+1} = z_k + d_k$ 。

算法 3.1 (非单调信赖域算法)

以下给出非单调信赖域算法的具体实现过程：

Step 1 初始点  $z^0 = (\mu^0, x^0, y^0) \in R_{++} \times V \times V$ ，选取常数  $\delta \in (0, 1)$ ， $\sigma \in (0, 1)$ ， $\gamma \in (0, 1)$ ，精度  $\varepsilon = 10^{-6}$ ，取  $\bar{\Delta} > 0$  为信赖域半径的上界，令  $\Delta_0 \in (0, \bar{\Delta}]$ ， $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$ ， $0 < r_1 < 1 < r_2$ ， $k = 0$ ， $M$  为非负常数；

Step 2 检验终止条件，计算  $G_k$ ，若  $\|G_k\| \leq \varepsilon$ ，则  $z^* = z_k$ ，算法终止；

Step 3 求解 (9)，求得  $z_k$ ，利用(10)求得  $H_{l(k)}$ ；

Step 4 计算  $\rho_{l(k)}^k = \text{Are } d_{l(k)}^k / \text{Pre } d_k$ ，其中

$$\text{Are } d_{l(k)}^k = a_k \|H_{l(k)}\| - \|H(z_k + d_k)\|,$$

$$Pre d_k = \|\phi_k(0)\| - \|\phi_k(d_k)\|$$

Step 5 校正信赖域半径

$$\Delta_{k+1} = \begin{cases} r_1 \Delta_k, & \text{如果 } \rho_{l(k)}^k \leq \eta_1 \\ \min(r_2 \Delta_k, \bar{\Delta}), & \text{如果 } \rho_{l(k)}^k \geq \eta_2 \\ \Delta_k, & \text{否则} \end{cases}$$

Step6 若  $\rho_{l(k)}^k \geq \eta_1$ , 则  $z_{k+1} = z_k + d_k$ , 否则  $z_{k+1} = z_k$ ,  $k = k + 1$ , 转 Step2.

图 1 给出 Matlab 操作界面和算法实现流程图。

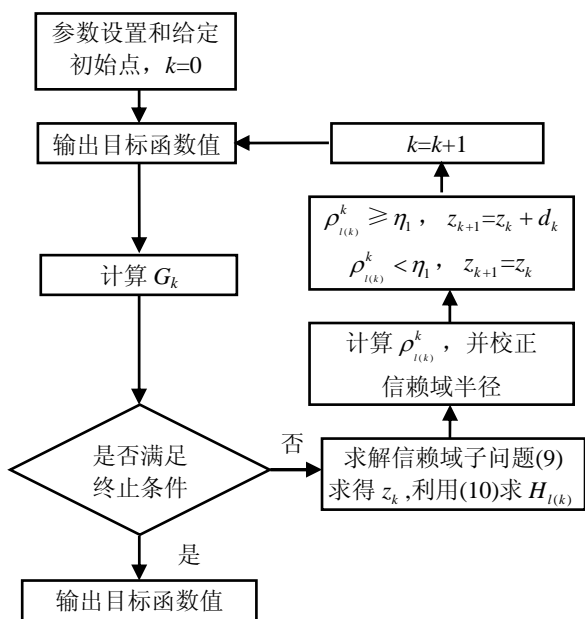


图 1 算法流程图

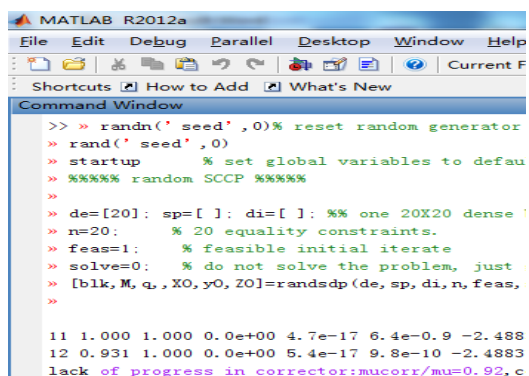


图 2 Matlab 操作界面

### 4 收敛性分析

引理 4.1<sup>[20]</sup> 假设函数  $F$  是连续的可微函数且单调, 函数式

$$H(z) := \begin{pmatrix} \mu \\ F(x) - y \\ \phi(z) \end{pmatrix}$$

则函数  $H(z)$  在  $z \in R_{++} \times V \times V$  处是强单调的, 即

$$\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} \|H(z)\| = +\infty$$

其中  $z = (\mu, x, y) \in R_{++} \times V \times V$ , 文献[20]中给出了详细的证明。

下面给出算法 3.1 收敛性证明。

设  $\{z_k\}$  是算法 3.1 产生的迭代点列, 假设  $z^*$  是  $\{z_k\}$  的聚点, 给出如下的定义和假设。

定义 4.1 当  $k \notin K$  时, 则有  $\|H_{\mu_k}(z_k)\| \leq \|H_{\mu_k}(z_{k-1})\|$ , 即算法 3.1 产生的序列包含在某一水平集中<sup>[21]</sup>。

定理 4.1 设函数  $H$  单调连续可微, 且  $z^* = (\mu^*, x^*, y^*)$  是算法 3.1 所生成的迭代点列  $\{z^k\}$  的一个聚点, 则  $z^* = (\mu^*, x^*, y^*)$  是  $H(z^*) = 0$  的一个解。

证明 由算法 3.1 知,  $\|H(z^{k+1})\| \leq \|H(z^k)\|$ , 因此  $\|H(z^k)\|$  是单调递减的, 由于  $\|H_{\mu_k}(z^k)\| \geq 0$ , 则由连续性知  $\|H(z^k)\| \rightarrow \|H(z^*)\| \geq 0$ 。

用反证法证明  $H(z^*) = 0$ , 假设  $\|H(z^*)\| > 0$ , 且  $z^* = (\mu^*, x^*, y^*)$  是算法 3.1 所生成的迭代点列  $\{z^k\}$  的聚点<sup>[22]</sup>, 由定理 2.1, 存在  $z^*$  的一个闭邻域  $N(z^*)$  和一个正数  $\bar{\alpha} \in (0, 1]$ , 使得  $z \in N(z^*)$  和  $\alpha \in [0, \bar{\alpha}]$ , 有  $\|H(z + \alpha \Delta z^k)\| \leq [1 - \sigma(1 - \gamma \mu_0 - \eta_k)\alpha] \|H(z)\|$  成立。

所以, 对于任意非负整数  $l$  满足  $\delta^l \in (0, \bar{\alpha}]$

$$\|H(z^k + \delta^l \Delta z^k)\| \leq [1 - \sigma(1 - \gamma \mu_0 - \eta_k)\delta^l] \|H(z^k)\|$$

对充分大的  $k$ , 有  $\delta^l \leq \lambda_k$ , 从而对充分大的  $k$  有

$$\|H(z^{k+1})\| \leq [1 - \sigma(1 - \gamma \mu_0 - \eta_k)\lambda_k] \|H(z^k)\| \leq [1 - \sigma(1 - \gamma \mu_0 - \eta_k)\delta^l] \|H(z^k)\| \quad (11)$$

对(12)两边取极限与  $\|H(z^*)\| > 0$  矛盾, 因此, 定理 4.1 得证。

引理 4.2 Cauchy 位移带来的预估下降量为(详见文献[21]和[23])

$$\|\phi_k(0)\| - \|\phi_k(z_k^c)\| \geq \frac{1}{2} \|G_k\| \min\{\Delta_k, \|G_k\|\}$$

引理 4.3 假设存在  $\{1, 2, \dots\}$  的无穷列  $N_0$ , 使得对于任意的  $k \in N_0$  有

$$a_k \|H_{l(k)}\| - \|H(z_{k+1})\| \geq \frac{1}{2} \|G_k\| \min\{\Delta_k, \|G_k\|\} \quad (12)$$

$$\rho_{l(k)}^k = \frac{a_k \|H_{l(k)}\| - \|H(z_{k+1})\|}{Pred_k} \geq \frac{a_k \|H_k\| - \|H(z_{k+1})\|}{Pred_k}$$

引理 4.4 有界数列必含有收敛子列。

定理 4.2 设在算法 3.1 中,  $H(z)$  连续可微, (12) 式满足, 则  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|G_k\| = 0$ 。利用反证法进行证明。

证明 假设结论不成立, 则存在  $\varepsilon_0 > 0$  和正整数  $k_0$ , 使得对任意的  $k \geq k_0$ , 有  $\|G_k\| \geq \varepsilon_0$ 。则通过引理 4.3 可以得到, 对任意的  $k \geq k_0$ ,  $k \in N_0$  有

$$Pred_k \geq \frac{1}{2} \varepsilon_0 \min\left\{\Delta_k, \frac{\varepsilon_0}{\beta}\right\} \quad (13)$$

$$a_k \|H_{l(k)}\| - \|H_{k+1}\| \geq \frac{1}{2} \eta_1 \varepsilon_0 \min\left\{\Delta_k, \frac{\varepsilon_0}{\beta}\right\} \quad (14)$$

因为  $\{H_k\}$  有下界, 则  $\{\|H_{l(k)}\|\}$  也有界。通过引理 4.3 可以得到  $\{\|H_{l(k)}\|\}$  中含有收敛子列  $\{\|H_{l(k_i)}\|\}$ , 其中  $i=1, 2, 3, \dots$ , 得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|H_{k_i+1}\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \|H_{l(k_i)}\|$$

因为  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1$ ,  $k_i \geq k$ , 所以  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{k_i} = 1$ , 于是

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|H_{k_i+1}\| = \lim_{i \rightarrow \infty} a_{k_i} \|H_{l(k_i)}\|$$

因此

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (a_{k_i} \|H_{l(k_i)}\| - \|H_{k_i+1}\|) = 0 \quad (15)$$

由式(14)~(16)可得到

$$a_{k_i} \|H_{l(k_i)}\| - \|H_{k_i+1}\| \geq \frac{1}{2} \eta_1 \varepsilon_0 \min\left\{\Delta_k, \frac{\varepsilon_0}{\beta}\right\} \quad (16)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \eta_1 \varepsilon_0 \min\left\{\Delta_k, \frac{\varepsilon_0}{\beta}\right\} = 0$$

因为  $\eta_1, \varepsilon_0, \beta$  均是常数, 因此,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_k = 0$ 。

因为  $H(z)$  连续可微, 展开得

$$\|H(z_k + d_k)\| = \|H_k + G_k d_k + \int_0^1 d_k^T (G(z_k + \tau d_k) - G_k) d\tau\|$$

当  $\Delta_k > 0$  充分小的时候, 有

$$\|\varphi_k(d_k)\| - \|H(z_k + d_k)\| \leq \frac{\beta}{2} \|d_k\|^2 + o(\|d_k\|) \quad (17)$$

因为  $\|\varphi_k(0)\| = \|H_k\|$ , 有

$$\left| \frac{\|H_k\| - \|H_{k+1}\|}{Pred_k} - 1 \right| = \left| \frac{\|H(z_k + d_k)\| - \|H_k\| - (\|\varphi_k(0)\| - \|\varphi_k(d_k)\|)}{\|\varphi_k(0)\| - \|\varphi_k(d_k)\|} \right| = (18)$$

$$\left| \frac{\|H(z_k + d_k)\| - \|\varphi_k(d_k)\|}{\|\varphi_k(0)\| - \|\varphi_k(d_k)\|} \right|$$

由式(13), (18)和(19)可以得到

$$\left| \frac{\|H_k\| - \|H_{k+1}\|}{Pred_k} - 1 \right| \leq \frac{\beta \Delta_k^2 + o(\|\Delta_k\|)}{\varepsilon_0 \min\{\Delta_k, \varepsilon_0/\beta\}} \quad (19)$$

由引理 4.3 知

$$\rho_{l(k)}^k = \frac{a_k \|H_{l(k)}\| - \|H_{k+1}\|}{Pred_k} \geq \frac{\|H_k\| - \|H_{k+1}\|}{Pred_k} \quad (20)$$

当  $k \rightarrow \infty$ , 有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|H_k\| - \|H_{k+1}\|}{Pred_k} = 1$ , 由式(19), (20)

得到对于充分大的  $k$ , 有  $\rho_{l(k)}^k \geq \eta_2$ 。因此, 对充分大的  $k \in N_0$ , 有  $\Delta_{k+1} \geq \Delta_k$ , 则对充分大的  $k_i \in N_0$ , 有  $\Delta_{k_i+1} \geq \Delta_{k_i}$ , 与  $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_{k_i} = 0$  矛盾。因此, 原假设不成立。即  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|G_k\| = 0$ 。所以算法 3.1 具有全局收敛性。

## 5 数值实验

为了验证算法的可行性及有效性, 在 Matlab2012 中执行该算法<sup>[24]</sup>, 在 Intel(R), Pentium(R), Core(TM) i7-3520M CPU, 2.9 GHz, 4.00 GB 内存, Windows 7 操作系统上进行数值实验。在实施算法时, 为了与牛顿算法进行比较, 初始点  $z^0 = (\mu^0, x^0, y^0)$  的选取与文献[25]相同, 其中参数  $\eta_1 = 0.2, \eta_2 = 0.5, r_1 = 1, r_2 = 2, \Delta_0 = 1/2 \|G_0\|, \bar{\Delta} = 1/4 \|G_0\|$ , 精度  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $n$  表示矩阵的维数, Iter 表示算法的迭代次数, CPU\_time 是完成计算所需要的时间, Fun\_eval 为函数调用次数。

首先给出一个简单实例, 设定初始矩阵  $X=2I, M=2I, Q=2I, F=MX+Q$ 。借助 Matlab 软件计算它的最优解为 0.112 432 64, 为了具体验证本

文提出的算法, 改变误差  $\varepsilon$  的范围, 得到如下实验结果, 见表 1。

表 1 结果对比

允许 误差	精确解	误差	CPU-time /s	迭代 次数
$\varepsilon = 10^{-4}$	0.112 432 83	$4.13284 \times 10^{-4}$	0.000 212	0.3
$\varepsilon = 10^{-5}$	0.112 433 17	$4.33571 \times 10^{-5}$	0.000 226	0.4
$\varepsilon = 10^{-6}$	0.112 431 55	$5.14045 \times 10^{-6}$	0.000 220	0.4

测试二阶锥互补函数, 找到  $x \in \kappa$ ,

$$F(x) = Mx + q \in \kappa, \langle x, F(x) \rangle = 0$$

其中:  $\kappa$  是二阶锥的笛卡尔乘积,  $M \in R^n \times R^n$  为对称稀疏矩阵, 由库函数 `sprandsym(n,den,rc)` 随机生成, `den` 为矩阵的稀疏度, 条件数 `rc` 是由库函数 `unifrnd` 随机生成的一个  $[0, 1]$  中的数, 它保证了矩阵  $M$  的正定性,  $q \in R^n$  的每个元素从区间  $[-1, 1]$  中 Matlab 的库函数 `rand` 随机生成。数值实验的结果如表 2 和表 3 所示。

表 2 数值实验结果比较

$n$	牛顿算法			算法 3.1		
	Iter	CPU_ Time	Fun_ eval	Iter	CPU_ Time	Fun_ eval
10	3.3	0.002 6	10	3.1	0.002 6	12
20	3.6	0.003 0	13	3.4	0.002 8	13
40	4.1	0.003 4	15	3.8	0.003 1	18
60	4.3	0.003 6	18	4.0	0.003 2	17
80	4.6	0.004 0	22	4.3	0.003 5	24
100	5.5	0.047 3	25	5.3	0.041 1	26

表 3 数值实验结果比较

$n$	牛顿算法			算法 3.1		
	Iter	CPU_ Time	Fun_ eval	Iter	CPU_ Time	Fun_ eval
100	5.5	0.047	31	5.3	0.041 1	26
200	5.9	0.245 3	35	5.6	0.243 5	37
400	6.4	1.542 6	40	5.9	1.510 8	45
600	6.9	4.279 2	46	6.3	4.112 1	48
800	7.1	8.753 9	50	6.8	6.253 7	56
1000	7.7	15.674 2	78	7.0	12.128 6	86

由表中的实验结果可以看出, 在同样的参数情况下, 本文算法的计算速度比牛顿法快得多, 且迭代次数也少于牛顿法, 算法运行时间短。随着维数

的增大, 该算法的执行时间和迭代次数明显少于牛顿算法。因此, 对于大规模的对称锥互补问题, 本文算法具有一定的优越性。

## 6 结论

以欧几里得若当代数为基本工具, 研究了对称锥互补问题的求解算法及其价值函数的性质, 提出求解对称锥互补问题的非单调信赖域算法。算法通过引入一个光滑函数将对称锥互补问题转化为无约束优化问题, 然后构造信赖域子问题, 修正信赖域半径, 使得信赖域半径的校正条件适当放宽, 并证明了算法的全局收敛性。实验结果表明, 本文的算法在执行时间和迭代次数方面明显少于牛顿算法。牛顿法的数值效果与光滑函数的选取有密切关系, 对称锥互补问题中采用的光滑函数很有限。因此, 将互补问题中的光滑函数推广至对称锥互补问题或提出新的具有良好性质的光滑函数值得进一步研究, 将光滑化算法与其他算法结合求解对称锥互补问题也将是今后研究的重点。

## 参考文献:

- [1] 修乃华, 韩继业. 对称锥互补问题[J]. 数学进展, 2007, 36(1): 1-12.
- [2] Faraut J, Koranyi A. Analysis on Symmetric cones [M]. USA: Oxford University Press, 1994.
- [3] Nesterov Y, Nemirovski A. Interior point polynomial methods in convex programming: theory and applications [M]. Philadelphia, USA: P Society for Industrial unapplied Mathematics (SIAM), 1994.
- [4] Faybusovich L. Euclidean Jordan algebras and interior-point algorithms [J]. Positivity (S1385-1292), 1997, 1(3): 331-357.
- [5] Faybusovich L. Linear systems in Jordan algebras and primal-dual interior-point algorithms [J]. J Comput Appl Math (S0377-0427), 1997, 86(3): 149-175.
- [6] Schmieta S H, Alizadeh F. Associative and Jordan algebras, and polynomial time interior-point algorithms for symmetric cones [J]. Mathematics of Operations Research (S1432-2994), 2001, 26(03): 543-564.
- [7] Schmieta S H, Alizadeh F. Extension of primal-dual interior point algorithms to symmetric cones [J]. Mathematics Programming Series A (S0025-5610),



- 2003, 96(03): 409-438.
- [8] C B Chua, P Yi. A continuation method for nonlinear complementarity problems over symmetric cones [J]. *SIAM Journal on Optimization* (S0363-0129), 2010, 20(5): 2560-2583.
- [9] L Fang, G P He, Y H Hu. A new smoothing Newton-type method for second-order cone programming problems [J]. *Applied Mathematics and Computation* (S0096-3003), 2009, 215(3): 1020-1029.
- [10] Z H Huang, T Ni. Smoothing algorithms for complementarity problems over symmetric cones [J]. *Comput Optim Appl* (S0926-6003), 2010, 45(3): 557-579.
- [11] L C Kong, J Sun, N H Xiu. A regularized smoothing Newton method for symmetric cone complementarity problems [J]. *SIAM Journal on Optimization* (S0363-0129), 2008, 19(3): 1028-1047.
- [12] 刘长河, 刘红卫, 尚有林. 对称锥规划的邻域跟踪算法[J]. *中国科学: 数学*, 2013, 43(7): 691-702.
- [13] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 324-330.
- [14] 柯小伍, 韩继业. 一类新的信赖域算法的全局收敛性[J]. *应用数学学报*, 1995, 18(4): 608-615.
- [15] Francisco Facchinei Christian Kanzow. A nonsmooth inexact Newton method for the solution of large-scale nonlinear Complementarity problems [J]. *Mathematical Programming* (S0025-5610), 1997, 76(3): 493-512.
- [16] T Ni, W Z Gu. Smoothing Newton algorithm for symmetric cone complementarity problems based on a one-parametric class of smoothing functions [J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*. DOI 10.1007/s12190-009-0341-7, 2009.
- [17] S P Rui, C X Xu. A smoothing inexact Newton method for nonlinear complementarity problems [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics* (S0377-0427), 2010, 233(6): 2332-2338.
- [18] 张运胜, 高雷阜. 对称锥互补问题的一个惩罚 NR 函数的水平有界性[J]. *应用泛函分析学报*, 2013, 15(4): 337-341.
- [19] D Sun, J Sun. Strong semismoothness of Fischer-Burmeister SDC and SOC Methods complementarity functions [J]. *Mathematical Programming* (S0025-5610), 2005, 103(3): 575-581.
- [20] Huang Z H, Ni T. Smoothing algorithms for complementarity problems over symmetric cones [J]. *Computational Optimization and Applications* (S0926-6003), 2010, 45(3): 557-579.
- [21] 李改弟. 一个自动确定信赖域半径的信赖域方法[J]. *工程数学学报*, 2006, 23(5): 843-848.
- [22] Cottle R W, Pang J S, Stone R E. *The linear complementarity problem* [M]. Boston, USA: Academic Press, 1992.
- [23] 王剑平, 吕毅斌, 张晓鹏. 无约束优化的一类新的非单调信赖域算法[J]. *科学技术与工程*, 2012, 12(14): 291-294.
- [24] Sturua J F. Using Sedumi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones [J]. *Optimization Methods and Software* (S1055-6788), 1999, 11(1): 625-653.
- [25] X H Liu, Z H Huang. A smoothing Newton algorithms based on one-parametric class of smoothing functions for linear programming over symmetric cones [J]. *Mathematical Methods of Operations Research* (S1432-2994), 2009, 70(3): 385-404.