

9-2-2020

Error Correction Methods in Numerical Simulation for Unilateral Constraint Dynamics

Haitao Gao

College of Mechanical Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China;

Yali Han

College of Mechanical Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China;

Youxiong Xu

College of Mechanical Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China;

Songqing Zhu

College of Mechanical Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China;

See next page for additional authors

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Error Correction Methods in Numerical Simulation for Unilateral Constraint Dynamics

Abstract

Abstract: Aiming at problem of calculation errors and constraint violation in numerical simulation for dynamics of unilateral constraint such as contact and collision, the error projection correction methods were put forward. On the basis of dynamical behavior of unilateral constraint described by linear programming model, mixed linear complementarity dynamics was built. Numerical simulation methods for the mixed linear complementarity dynamics were derived. In order to reduce calculation error and constraint violation caused by this error in the numerical simulation, an error correction method was built for correcting position and velocity error of numerical solution on the base of bilateral constraint model, then solving precision of unilateral constraint dynamics was improved. The correction method was verified by example and the results show that this correction method is able to improve effectively numerical simulation accuracy of unilateral constraint dynamics.

Keywords

unilateral constraint, dynamical model, numerical simulation, correction method

Authors

Haitao Gao, Yali Han, Youxiong Xu, Songqing Zhu, and Zailuo Wu

Recommended Citation

Gao Haitao, Han Yali, Xu Youxiong, Zhu Songqing, Wu Zailuo. Error Correction Methods in Numerical Simulation for Unilateral Constraint Dynamics[J]. Journal of System Simulation, 2015, 27(2): 240-245.

单边约束动力学模型数值仿真中的误差修正方法

高海涛, 韩亚丽, 许有熊, 朱松青, 吴在罗

(南京工程学院机械学院, 南京 211167)

摘要: 针对接触、碰撞等单边约束动力学模型数值仿真中存在的计算误差及约束违约问题, 提出了一种误差投影修正方法进行补偿。在利用线性规划模型刻画单边约束动力学行为的基础上, 建立了描述接触和碰撞问题的混合线性互补动力学模型, 推导出该动力学模型的数值仿真方法。为了减少数值仿真过程中的计算误差以及由此引起的约束违约现象, 以双边约束方程为基础, 建立一种投影修正算法来修正动力学方程数值求解中的位置和速度误差, 进而提高单边约束动力学模型的数值求解精度。通过一个算例验证了修正算法的有效性, 结果表明该修正方法能够有效地提高单边约束动力学模型数值仿真的精度。

关键词: 单边约束; 动力学模型; 数值仿真; 修正方法

中图分类号: TP391.9 文献标识码: A 文章编号: 1004-731X (2015) 02-0240-06

Error Correction Methods in Numerical Simulation for Unilateral Constraint Dynamics

Gao Haitao, Han Yali, Xu Youxiong, Zhu Songqing, Wu Zailuo

(College of Mechanical Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China)

Abstract: Aiming at problem of calculation errors and constraint violation in numerical simulation for dynamics of unilateral constraint such as contact and collision, the error projection correction methods were put forward. On the basis of dynamical behavior of unilateral constraint described by linear programming model, mixed linear complementarity dynamics was built. Numerical simulation methods for the mixed linear complementarity dynamics were derived. In order to reduce calculation error and constraint violation caused by this error in the numerical simulation, an error correction method was built for correcting position and velocity error of numerical solution on the base of bilateral constraint model, then solving precision of unilateral constraint dynamics was improved. The correction method was verified by example and the results show that this correction method is able to improve effectively numerical simulation accuracy of unilateral constraint dynamics.

Keywords: unilateral constraint; dynamical model; numerical simulation; correction method

引言

各种车辆、机械、机器人系统中广泛地存在接触、碰撞等非光滑约束现象, 为了研究这些系统,

相应地, 研究含接触、碰撞等非光滑约束的动力学建模方法及数值求解方法也成为人们研究的一个重要内容。对于含理想约束的多刚体系统来说, 可以利用经典动力学理论来描述刚体系统的动力学行为, 并最终形成一个 ODE 方程进行数值仿真, 然而当系统中含有接触、碰撞等具有非光滑性质的约束时, 这时再利用经典的刚体动力学理论来刻画刚体系统的动力学行为就会存在着一些理论上的困难, 为此, 人们不得不寻求新的解决方法。



作者简介: 高海涛(1979-), 男, 山东临沂人, 博士, 讲师, 研究方向为服务机器人; 韩亚丽(1978-), 女, 河南郑州人, 博士, 副教授, 研究方向为特种机器人。
收稿日期: 2014-07-28 修回日期: 2014-10-26
基金项目: 国家自然科学基金(51205182); 江苏省自然科学基金(BK2012474, BK20130743); 江苏省高校自然科学基金(14KJD460001)

<http://www.china-simulation.com>

• 240 •

一种处理含非光滑约束问题的方法是将多体系统的刚性假设局部柔性化, 利用弹簧阻尼等集中参数模型将多体系统的非光滑接触区域局部连续化, 得到一个不包含非光滑过程的动力学模型, 尽管这种方法可以避免刚体动力学处理具有非光滑约束性质的力学系统所带来的困难, 然而由于建立的动力学模型中经常包含两个差异很大的时间尺度和几何尺度, 会导致 DAE 方程在数值求解中产生刚性问题。另一种常采用的方法是将刚体的非光滑刚性约束用一个并协性方程来刻画, 并将其嵌入到多体系统动力学的 DAE 方程当中, 从而在系统的非光滑区域形成一个数学规划问题来处理^[1-3]。1980 年, Lotstedt 首次将非光滑约束问题归结为一个含并协性条件的数学规划问题来处理, 此后 Glocker^[4], Baraff^[5]等学者对此展开了深入的研究, 而 Pfeiffer 等^[6]将这一理论框架应用到多体系统动力学当中, 根据模型表达方式的不同, 目前主要有两种形式来表达接触模型。第 1 是基于加速度-力的表达方法^[7]。该方法将接触约束条件表示为加速度和力的相互作用关系, 结合系统动力学方程, 形成一个描述接触问题的数学规划模型。第 2 是基于速度-冲量的描述方法^[8]; 该方法基于一些条件假设, 将系统动力学方程及接触条件离散化为速度-冲量形式, 从而形成一个离散化的数学规划模型来描述。

在上述框架内求解多体系统的接触碰撞等单边约束问题时, 当系统中包含的刚体数量较多时, 存在着计算时间过长的问题, 因此有很多研究者将重点放在数值方法的研究上。Pfeiffer 等^[9]归纳比较了解决该类问题的 3 种数值方法: Lemake 算法, 时间步长算法, 拉格朗日增广法, 随后有研究者又提出了同时将拉格朗日增广法与时间步长算法结合后形成的新算法, 先采用固定时间步长法将系统动力学方程离散化为速度-冲量形式, 而后在使用拉格朗日增广法进行求解, 这种方法能够避免加速度-力描述方法的缺点, 且数值求解过程更为简单, 近年来逐渐成为计算机物理环境模拟时常用的方

法^[10-11]。然而, 由于该方法的离散化假设及步长选择问题, 使得其在求解过程中都不可避免地存在着计算误差, 而且长时间的误差积累会给多刚体系统带来约束违约现象, 使得多刚体系统运动偏离。为此, 本文将对单边约束动力学模型数值仿真中的误差问题展开研究, 目的是建立一种误差修正算法来提高单边约束动力学模型的仿真精度。

1 含单边约束的非光滑动力学方程

尽管接触与碰撞都是物体相互作用的一种形式, 但两者有所区别。碰撞是瞬时的接触过程, 其特点是作用强度很大, 尤其是含摩擦的碰撞过程其作用机理要比接触现象复杂的多。为了区分接触与碰撞过程, 本文将接触描述为有限时间内发生的一种连续过程, 而将碰撞看做瞬时的剧烈作用, 并将其离散化, 利用各种恢复系数来模拟碰撞中的能量转化过程。在采用线性规划模型表达的框架下, 两者最终都能够得到一组 LCP (linear complementary Problem) 方程, 下面我们将分别建立接触与碰撞过程的动力学模型。

1.1 接触模型

当多刚体系统中存在着接触物体时, 此时系统运动将受到接触力的影响。假定接触仅发生于两个刚体之间; 并忽略刚体形状及摩擦对接触过程的影响。定义接触刚体在接触点处的法向间隙函数为 $g_N(q, t)$, 则利用经典多刚体动力学理论, 可以得到系统的动力学方程为:

$$\mathbf{M}(q, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(q, \dot{q}, t) + \boldsymbol{\phi}_E(q, t)\lambda_E + \boldsymbol{\phi}_N(q, t)\lambda_N \quad (1)$$

$$\mathbf{g}_E(q, t) = 0 \quad (2)$$

方程中: \mathbf{M} 为广义质量矩阵; $\boldsymbol{\phi}_E = \partial \mathbf{g}_E / \partial \mathbf{q}$ 为约束雅可比矩阵; \mathbf{q} 为广义位移; \mathbf{Q} 为广义外力; λ_E 为拉格朗日乘子; \mathbf{g}_E 为等式约束方程; λ_N 为法向接触力; $\boldsymbol{\phi}_N = \partial \mathbf{g}_N / \partial \mathbf{q}$ 为对应的刚性接触矩阵。根据刚性假设, \mathbf{g}_N 为非负值。当 $\mathbf{g}_N=0$ 时, 两物体相互接触, 接触物体间存在着接触力, 而当 $\mathbf{g}_N>0$ 时, 两物体不接触, 于是该接触过程可以表示成如下线性互补方程:

$$g_N(q, t) \geq 0, \lambda_N \geq 0, g_N(q, t) \cdot \lambda_N = 0 \quad (3)$$

在计算机仿真应用或者构建虚拟物理仿真环境时, 为了便于求解, 通常采用上述方程的离散化形式进行数值模拟。基于固定时间步长 h , 方程(1)-(3)可以被近似离散化为:

$$M \Delta \dot{q} = \phi_E \lambda_E h + \phi_N \lambda_N h + Q h \quad (4)$$

$$\Delta g_E = \phi_E \Delta q + \tilde{\phi}_E h \quad (5)$$

$$g_N^{l+1} \geq 0, \lambda_N^{l+1} h \geq 0, g_N^{l+1} \cdot \lambda_N^{l+1} h = 0 \quad (6)$$

其中: $\lambda_N h$ 和 $\lambda_E h$ 反映了接触力及铰链约束力在一段时间内的积累; $\tilde{\phi}_E = \partial g_E / \partial t$, l 为当前仿真步数。

此外, 为完整描述接触过程, 还需要补充接触刚体间的运动学方程。为此, 将刻画接触的间隙函数进行一阶 Taylor 展开, 得到一组接触刚体相对速度与系统广义速度的关系式:

$$g_N^{l+1} = g_N^l + \phi_N^T \Delta q + \tilde{\phi}_N h \quad (7)$$

其中: $\tilde{\phi}_N = \partial g_N / \partial t$ 。联立方程(4)-(7)可以完整地表达多刚体系统中的接触问题。

1.2 碰撞模型

多刚体系统的刚性假设及碰撞接触定律为碰撞提供了一个非常理想化的模型, 利用这样一个理想化模型可以将碰撞过程简化为一个线性互补方程, 并通过一般性的 LCP 求解算法进行数值模拟。假定多刚体系统中, 碰撞发生在某一时刻 t^* , 类似于接触模型的定义, 设物体碰撞前后的速度分别是 $\dot{g}_N^*(\dot{q}, q, t^*)$ 和 $\dot{g}_N^{*+}(\dot{q}, q, t^{*+})$, 其中+, - 分别表示碰撞时刻速度变量的右极限和左极限。考虑到物理仿真环境要求不是很高, 采用 Newton 碰撞定律来描述刚体的碰撞过程。定义碰撞恢复系数 $\varepsilon \in [0, 1]$, 则碰撞前后的速度可以表示为:

$$\dot{g}_N^{*+} + \varepsilon \dot{g}_N^* = 0 \quad (8)$$

对于无摩擦的多刚体系统来说, 经典刚体碰撞动力学理论能够满足如下的基本定律: 1) 碰撞前后的系统的动量是守恒的; 2) 碰撞后系统的动能不会增加, 根据刚体接触条件, 结合碰撞时刻的运动学方程(8), 可以将碰撞过程描述为一个线性互补方程:

$$S_N \geq 0, \dot{g}_N^{*+} \geq -\varepsilon \dot{g}_N^*, S_N \cdot (\dot{g}_N^{*+} + \varepsilon \dot{g}_N^*) = 0 \quad (9)$$

由于冲击力非常大, 忽略冲击力以外的作用力, 将多刚体系统动力学方程在碰撞区间内进行积分, 可以得到系统广义速度与冲量之间的关系式:

$$\int_{t^*-}^{t^*+} M(q, t) \ddot{q} - \phi_E(q, t) \lambda_E - \phi_N(q, t) \lambda_N dt = 0$$

$$\text{即: } M \Delta \dot{q}^* - \phi_E S_E - \phi_N S_N = 0 \quad (10)$$

其中: $\Delta \dot{q}^* = \dot{q}(t^*+) - \dot{q}(t^*-)$, $S_N = \int_{t^*-}^{t^*+} \lambda_N dt$, 碰撞冲量, $S_E = \int_{t^*-}^{t^*+} \lambda_E dt$ 为约束冲量, 它反映了铰链约束力在碰撞过程中的积累。除此之外, 还可以得到碰撞物体碰撞前后的速度与系统广义速度的关系式:

$$\dot{g}_N^{*+} = \phi_N^T(q, t^*+) \dot{q}^{*+}, \dot{g}_N^* = \phi_N^T(q, t^*-) \dot{q}^*$$

由此, 可获两时刻碰撞物体速度的关系式为:

$$\dot{g}_N^{*+} = \phi_N^T(q, t^*+) \Delta \dot{q}^* + \dot{g}_N^* \quad (11)$$

将上述方程(9)-(11)及约束方程(2)联立, 便可以得到一个描述多刚体系统碰撞压缩过程的数学模型。

2 非光滑动力学的数值求解方法

由多刚体系统接触及碰撞动力学模型可以看出: 无论是接触问题还是碰撞问题, 最终得到的都是一组包含 LCP 方程和 DAE 方程的混合方程组, 它们可以采用相同的数值求解方法进行求解。为了便于误差修正过程的嵌入, 本文给出了一种数值求解算法。该算法的思想是将 DAE 方程转换为 ODE 方程, 并将 LCP 求解器植入到 ODE 方程中, 利用碰撞/接触检测算法判别系统中是否存在碰撞和接触点, 在检测到碰撞/接触后调用 LCP 求解器, 重新初始化接触点处的速度、加速度、接触力, 接着进行 ODE 方程的求解, 从而获取到多体系统的状态。下面以碰撞过程为例来建立非光滑动力学模型的数值求解方法。

为了消去多刚体系统中的等式约束方程, 可将系统动力学方程(10)和离散化的等式约束方程(5)联立:

$$\begin{pmatrix} M & \phi_E \\ \phi_E^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \dot{q}^* \\ S_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_N S_N \\ -\phi_E^T \dot{q}^* - \tilde{\phi}_E \end{pmatrix} \quad (12)$$

当上述方程的系数矩阵非奇异时, 利用分块矩阵计算方法, 其方程解可表示为如下形式:

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{q}^* \\ S_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{M} & \tilde{M} \\ \tilde{M}^T & \bar{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_N S_N \\ -\phi_E^T \dot{q}^* - \tilde{\phi}_E \end{pmatrix} \quad (13)$$

其中: $\hat{M} = M^{-1} + M^{-1} \phi_E G_{EE}^{-1} \phi_E^T M^{-1}$, $\tilde{M} = G_{EE}^{-1} \phi_E^T M^{-1}$, $G_{EE} = \phi_E^T M^{-1} \phi_E$, $\bar{M} = G_{EE}^{-1}$ 。

将式(13)的结果带入方程(11)可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{g}_N^{*+} &= \phi_N^T \hat{M} \phi_N S_N + \phi_N^T \tilde{M} (-\phi_E^T \dot{q}^* - \tilde{\phi}_E) + \dot{g}_N^{*-} \\ S_N &\geq 0, \dot{g}_N^{*+} \geq -\varepsilon \dot{g}_N^{*-} S_N \cdot (\dot{g}_N^{*+} + \varepsilon \dot{g}_N^{*-}) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

方程组(14)为一组标准的 LCP 方程, 可以采用常用的 LCP 求解算法, 如: Lemake 算法或者投影 Gauss-Seideld 迭代算法进行求解, 在获取接触力后, 将结果嵌入到 ODE 方程中, 便可获取到多刚体系统下一时刻的状态。

上述求解过程较为方便, 在模拟真实物理环境的计算机仿真中经常被采用, 但该方法也存在一些缺点, 如在仿真过程中, 由于近似化的处理以及数值仿真中的步长选择问题, 使得获得的物体状态速度和位置不可避免地存在误差, 这些误差被带入到碰撞/接触动力学求解过程, 长时间的误差积累将使得多刚体系统中的碰撞/接触、铰链等约束漂移, 进而出现约束违约现象, 影响到仿真精度。为此必须对该模型求解过程进行补偿, 以减少数值仿真过程中的误差。

3 数值求解中的误差投影修正方法

在离散步长积分的数值求解过程中, 假设在 n 步积分后, 得到多刚体系统的广义位置数值解为 \tilde{q}_n , 由于存在计算误差 Δq_n , 而使 $g_E(\tilde{q}_n, t_n) \neq 0$ 。根据微分几何原理, 可以将位置数值解向等式约束方程 $g_E(q_n, t_n) = 0$ 定义的约束流形上来投影来减少误差^[12], 其中, q_n 位置准确值。该过程可以表示成一个最小值求解问题, 即:

$$\min_{q_n \in R^n} \|q_n - \tilde{q}_n\|_M \text{ 满足: } g_E(q_n, t_n) = 0$$

其中: M 范数: $\|x\|_M = \sqrt{x^T M x}$, M 为一个正定矩阵, 此处取 M 为系统的广义质量矩阵。采用增广拉格朗日乘子法来求解该最小值问题。定义一个拉

格朗日乘子 μ , 在约束 $g_E = 0$ 条件下, 目标函数可以写为:

$$\begin{bmatrix} M & \phi_E(\tilde{q}_n, t_n) \\ \phi_E^T(\tilde{q}_n, t_n) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_n \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_E(\tilde{q}_n, t_n) \end{bmatrix} \quad (15)$$

由于约束雅克比矩阵随着时间变化, 该函数需迭代求解。但由于迭代方法要占用大量时间, 且计算时间不固定, 不适合应用于快速仿真, 因此对于此方程只能进行有限次的迭代。在实际运用中只需进行一两步迭代就能满足稳定要求。在获得修正值 Δq_n 后, 位置修正可以表示为:

$$q_n = \tilde{q}_n + \Delta q_n \quad (16)$$

同样, 对于速度修正, 设在第 n 步积分后, 得到的速度值 $\tilde{\dot{q}}_n$ 及误差 $\Delta \dot{q}_n$, 与位置修正过程类似, 将位置数值解向等式约束方程 $\dot{g}_E(\dot{q}_n, q_n, t_n) = 0$ 定义的约束流形上来投影来减少速度误差, 可以获得一个迭代修正函数:

$$\begin{bmatrix} M & \phi_E(q_n, t_n) \\ \phi_E^T(q_n, t_n) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{q}_n \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{g}_E(q_n, \tilde{\dot{q}}_n, t_n) \end{bmatrix} \quad (17)$$

求解该方程后可以获得速度的修正公式为:

$$\dot{q}_n = \tilde{\dot{q}}_n + \Delta \dot{q}_n \quad (18)$$

为了减少对接触/碰撞约束及双边约束的违约现象, 避免将误差带入碰撞力/接触力计算过程, 上述速度和位置修正应在 LCP 方程求解之前进行。由于速度修正过程中需用到位置精确解, 故修正时应该先进行位置修正, 而后再进行速度修正。

4 数值仿真算例

为了验证本文数值求解及修正算法, 以多刚体系统碰撞为例, 考察如图 1 所示的平面四杆机构。在某一时刻, 平面四杆机构上 a 点与左侧墙壁发生碰撞。取各杆的长度和质量为: $l_1=l_3=0.2$ m; $l_2=0.4$ m; $m_1=m_3=0.1$ Kg; $m_2=0.2$ Kg。定义各杆的质心为坐标原点, 广义坐标为: $q=(x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2, x_3, y_3, \theta_3)^T$; 广义速度为 $\dot{q}=(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{\theta}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{\theta}_2, \dot{x}_3, \dot{y}_3, \dot{\theta}_3)$ 。依据上述多刚体系统碰撞问题动力学建模方法, 建立平面四杆机构的碰撞动力学模型。

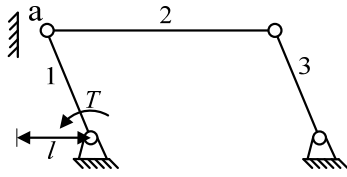


图 1 平面四杆机构

利用本文所述的数值求解方法及修正方法对平面四杆机构与墙面发生的连续碰撞过程进行数值仿真,在 Matlab 中编程实现这一过程,其中 LCP 方程采用投影 Gauss-Seidel 迭代算法进行求解,ODE 方程采用牛顿积分算法进行数值计算。仿真步长 $h=0.01$; 与墙壁的距离 $l=0.06$ m; 法向恢复系数: $\varepsilon_N=0.8$; 在杆 1 上施加 $T=10$ N·m 的转矩。仿真的位置和速度初值为:

$$q^0 = (0, 0.1, 1.57, 0.2, 0.2, 0, 0.4, 0.1, 0)^T;$$

$$\dot{q}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

通过长时间数值仿真后,所得平面四杆机构上 a 点的速度历程如图 2 所示。

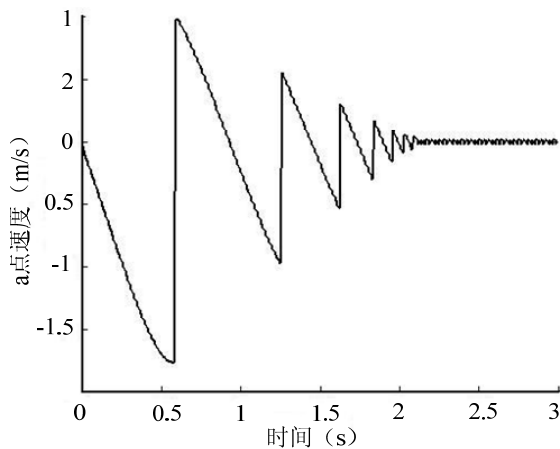


图 2 速度历程

由图 2 可以看出:平面四杆机构上 a 点的速度发生了多次突变,说明四杆机构与墙壁发生了多次碰撞,随着碰撞力越来越小,四杆机构最终静止在墙面上。图 3 和图 4 分别为 a 点修正前后的位置误差和速度误差对比图。由图 3 中可以看出,在每一次碰撞时,位置误差都迅速增加,且误差的增加值与碰撞的激烈程度有关,长时间的误差积累使得多体系统的运动发生偏离。而采用提出的投影修正算

法进行修正后,四杆机构上 a 点的位置误差得到明显改善,漂移的位置误差被修正回来,这保证了数值仿真过程的精度。对于速度误差,由于 a 点碰撞前后的速度方向相反,使得速度误差呈现凸凹变化(如图 4 所示)。但由于速度误差的正负抵消作用,尽管采用修正算法后最大的速度误差得到抑制,但总体效果没有位置修正过程明显。

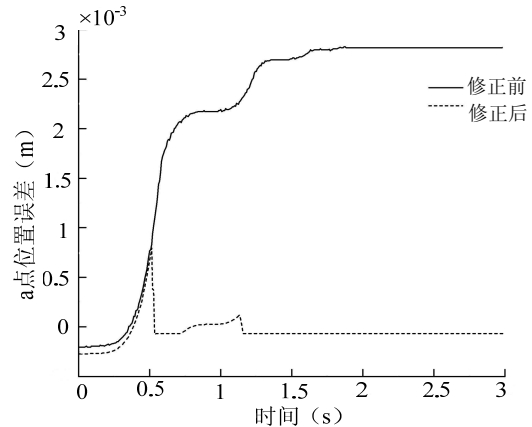


图 3 修正前后的位置误差对比

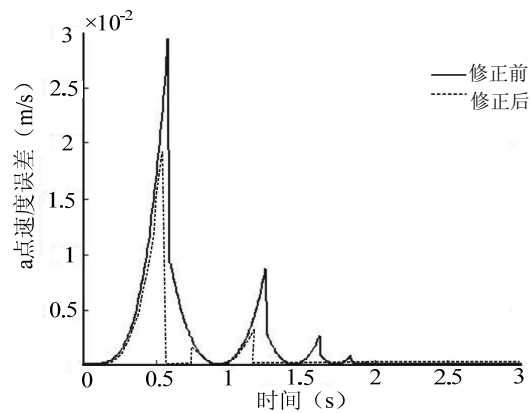


图 4 修正前后的速度误差对比

5 结论

本文利用线性规划模型来描述接触/碰撞等单边约束的动力学行为,建立了单边约束的混合线性互补动力学模型。推导了该动力学模型的数值仿真方法,针对数值仿真过程中的计算误差以及由此引起的约束违约现象,提出一种投影修正算法对数值仿真过程进行补偿,以减少数值仿真过程中的计算误差,取得了较好的效果。

参考文献:

- [1] 刘才山, 陈滨, 彭瀚, 等. 多体系统多点碰撞接触问题的数值求解方法 [J]. 动力学与控制学报, 2003, 1(1): 59-64.
- [2] 王琪, 庄方方, 郭易圆, 等. 非光滑多体系统动力学数值算法的研究进展 [J]. 力学进展, 2013, 43(1): 101-111.
- [3] 姚文莉, 王育平, 边力, 等. 多刚体系统接触碰撞动力学研究进展 [J]. 力学与实践, 2007, 29(6): 9-12.
- [4] Baraff D. Issues in computing contact forces for non-penetrating rigid bodies [J]. *Algorithmica* (S0178-4617), 1993, 10(2): 292-352.
- [5] Glocker C, Pfeiffer F. Complementarity problems in multibody systems with planar friction [J]. *Archive of Applied Mechanics* (S0939-1533), 1993, 63(7): 452-463.
- [6] Pfeiffer F. Unilateral multibody dynamics [J]. *Meccanica* (S0025-6455), 1999, 34(6): 437-451.
- [7] Pang J S, Trinkle J C. Complementarity formulation and existence of solutions of dynamic multi-rigid-body contact problem with coulomb friction [J]. *Mathematical Programming* (S0025-5610), 1996 (73): 199-266.
- [8] Stewart D, Trinkle J C. An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with coulomb friction [C]// *Proceeding of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, San Francisco, USA. USA: IEEE, 2000 (1): 162-169.
- [9] Pfeiffer F, Forg M, Ulbrich H. Numerical aspects of non-smooth multibody dynamics [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (S0045-7825), 2006 (195): 6891-6908.
- [10] Miller A T, Christensen H I. Implementation of multi-rigid-body dynamics with a robotic grasping simulator [C]// *Proceeding of the 2003 IEEE International Conference on Robotics & Automation*. Taipei, Taiwan, China. USA: IEEE, 2003: 14-19.
- [11] 刘德贵, 朱珍民. 实时仿真算法的研究进展 [J]. 系统仿真学报, 2001, 13(1): 60-63. (Liu Degui, Zhu Zhenmin. Research Advance for Real-Time Simulation Algorithms [J]. *Journal of System Simulation* (S1004-731X), 2001, 13(1): 60-63.)
- [12] 高海涛, 张志胜, 曹杰, 等. 基于稀疏矩阵技术的多体动力学仿真快速算法 [J]. 系统仿真学报, 2009, 21(14): 4238-4247. (Gao Haitao, Zhang Zhisheng, Cao Jie, et al. Fast Algorithm of Multibody Dynamic Simulation Based on Sparse Matrix Technique [J]. *Journal of System Simulation* (S1004-731X), 2009, 21(14): 4238-4247.)
- [40] 刘震鑫, 于小红, 孟冲. 基于复杂网络的空间信息支援力量体系结构同步能力研究 [J]. 军械工程学院学报, 2012, 24(1): 56-59.
- [41] 徐玉国, 邱静, 刘冠军. 基于复杂网络的装备维修保障协同效能优化设计 [J]. 兵工学报, 2012, 33(2): 244-251.
- [42] 王欣, 姚佩阳, 周翔翔, 等. 基于任务的网络中心战作战同步能力度量 [J]. 火力与指挥控制, 2013, 38(1): 96-101.
- [43] Gungor Gunduz. Dynamics of the world terror and the war in Iraq [J]. *Physica A* (S0378-4371), 2007, 376(3): 579-595.
- [44] David A Jarvis. A Methodology for Analyzing Complex Military Command and Control (C2) Networks [C]// *Proc. of the 10th International Command and Control Research and Technology Symposium*, 2005. Virginia, USA: CCRP, 2005.
- [45] Albert R, Jeong H, Barabási A L. Error and attack tolerance of complex networks [J]. *Nature* (S0028-0836), 2000, 406(6794): 378-382.
- [46] Wong-Jiru. Graph Theoretical Analysis of Network Centric Operations Using Multi-Layer Models [D]. USA: Air Force Institute of Technology, 2006.
- [47] 朱一凡, 石福丽, 雷永林. 网络中心环境下的军事通信超网络结构模型 [J]. 火力与指挥控制, 2012, 37(4): 9-13.
- [48] 朱江, 刘大伟, 陈俊. 作战体系超网络模型及应用 [J]. 指挥控制与仿真, 2013, 35(2): 13-16.
- [49] Yang Liu, Xiao-feng Hu, Lin Wu. Evolutionary Analysis of Operation System-of-Systems (SoS) Network Based on Simulated Data [C]// *2012 Ninth Web Information Systems and Applications Conference*. Hainan, China. USA: IEEE Computer Society, 2012: 176-179.

(上接第 225 页)