

9-2-2020

## Dynamics Analysis of GyroWheel for its Micro-spacecraft Attitude Control Application

Zhang Han

1. HIT Control and Simulation Center, Harbin 150080, China;;

Zhang Yu

2. Shanghai Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Shanghai 201100, China;

Zhao Hui

1. HIT Control and Simulation Center, Harbin 150080, China;;

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the Artificial Intelligence and Robotics Commons, Computer Engineering Commons, Numerical Analysis and Scientific Computing Commons, Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons, and the Systems Science Commons

---

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

---

## Dynamics Analysis of GyroWheel for its Micro-spacecraft Attitude Control Application

### Abstract

**Abstract:** Gyrowheel has the advantage of small size, light weight by its high level of system integration, and it has been attempted to be applied in micro-satellite attitude control system. *A linear dynamics model of GyroWheel was built, and then pole-zero analysis was carried out to obtain its basic dynamic characteristics which is different with dynamic tuned gyros (DTG). It is indicated that gyrowheel has two feature frequencies in addition to the precession and nutation frequencies outside. The correctness of the analytical model is proved by the ADAMS model and its simulation.* The controlled object characteristic analysis foundation is so provided for gyrowheel to be applied in the attitude control system.

### Keywords

GyroWheel, spacecraft attitude control system, second harmonic torque items, pole-zero analysis

### Recommended Citation

Zhang Han, Zhang Yu, Zhao Hui. Dynamics Analysis of GyroWheel for its Micro-spacecraft Attitude Control Application[J]. Journal of System Simulation, 2015, 27(1): 112-117.

## 陀螺飞轮动力学特征分析

张晗<sup>1</sup>, 张宇<sup>2</sup>, 赵辉<sup>1</sup>

(1. 哈尔滨工业大学控制与仿真中心, 哈尔滨 150080; 2. 上海机电工程研究所第七研究室, 上海 201100)

**摘要:** 陀螺飞轮因其系统实现的高集成度而具有体积小, 质量轻等优点, 已经被尝试应用于微小卫星的姿态控制中。建立了陀螺飞轮的线性动力学模型, 并对此模型进行了零极点分析, 得到了其与动力调谐陀螺不同的动力学特征, 指明陀螺飞轮具有除进动和章动以外的两个特征频率, 并利用挠性体力学分析软件 ADAMS 原理建模的仿真分析验证了解析模型的正确性, 为陀螺飞轮在姿控系统中的应用提供了被控对象特征分析的基础。

**关键词:** 陀螺飞轮; 航天器姿控系统; 二次谐波力矩; 零极点分析

中图分类号: V448.22

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2015) 01-0112-06

## Dynamics Analysis of GyroWheel for its Micro-spacecraft Attitude Control Application

Zhang Han<sup>1</sup>, Zhang Yu<sup>2</sup>, Zhao Hui<sup>1</sup>

(1. HIT Control and Simulation Center, Harbin 150080, China;

2. Shanghai Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Shanghai 201100, China)

**Abstract:** Gyrowheel has the advantage of small size, light weight by its high level of system integration, and it has been attempted to be applied in micro-satellite attitude control system. A linear dynamics model of GyroWheel was built, and then pole-zero analysis was carried out to obtain its basic dynamic characteristics which is different with dynamic tuned gyros (DTG). It is indicated that gyrowheel has two feature frequencies in addition to the precession and nutation frequencies outside. The correctness of the analytical model is proved by the ADAMS model and its simulation. The controlled object characteristic analysis foundation is so provided for gyrowheel to be applied in the attitude control system.

**Keywords:** GyroWheel; spacecraft attitude control system; second harmonic torque items; pole-zero analysis

## 引言

陀螺飞轮的机械结构类似于传统动调陀螺, 是一种新型的航天器姿态测量与控制执行装置, 其依据动调陀螺的原理, 在测量航天器两轴姿态角速度的同时, 还依据偏置动量轮与双框架控制力矩陀螺的原理, 提供三轴姿态控制力矩。

动调陀螺为了实现姿态角速度测量, 其转子

始终工作在调谐转速下, 呈现“自由转子”状态, 通过力矩器施加控制力矩, 使转子旋转轴总是指向零位, 测量力矩器施加的控制力矩大小, 根据陀螺进动方程, 就可以得到航天器角速度测量值。而陀螺飞轮为了兼顾实现偏置动量轮和双框架控制力矩陀螺的运行方式, 其转子转动惯量相对动调陀螺被放大近千倍, 同时转子可控倾角范围也扩大了几十倍。其转子在一定范围内进行的调速与动量指向改变的运行, 所以它必须长期工作在非调谐转速状态下, 这种工作状态的不同会使陀螺飞轮出现有显著差别于动调陀螺的特征。



作者简介: 张晗(1988-), 男, 内蒙古, 硕士生, 研究方向为航天器姿态控制方法、航天器姿控实现技术。  
收稿日期: 2013-07-09 修回日期: 2014-10-28  
基金项目: 国家自然科学基金(61427809)

在传统动调陀螺模型中有 2 个特征频率: 章动与进动。但陀螺飞轮概念的提出者 Stately 却在对所开发的陀螺飞轮系统进行开环控制实验中, 辨识出其具有 4 个特征频率, 其中 2 个频率与传统模型的章动和进动相近, 第 3 个出现在二倍转子转速频率上, 第 4 个类似于由于二倍频和章动频率不一致而引起的差频。这种区别的出现主要是因为传统动调陀螺的线性化模型里忽略了二次谐波力矩项的影响。但这些被忽略成分的影响, 在陀螺飞轮独特的工作状态下将会被放大, 进而改变陀螺飞轮的动力学特征。因此, 本文建立了一个针对于陀螺飞轮的新模型, 来更精确地描述其特有的工作状态与特征, 为陀螺飞轮控制律设计提供依据。

## 1 传统动调陀螺的动力学模型

鉴于陀螺飞轮与动调陀螺相似的机械结构, 研究与分析动调陀螺的运动特性和动力学方程是建立和分析陀螺飞轮的基础。下图 1 为动调陀螺的简化机械结构模型图, 依据此模型, 参见文献[1, 3]建立动力学方程如下

$$\begin{aligned} & (I_{rt} + I_{gt})\ddot{\theta}_x + (I_{rs} - 2I_{rt})\dot{\theta}_y w_s + \\ & [(I_{rs} - I_{rt} + I_{gt} - 2J)w_s^2 + Kx]\theta_x + c_g \dot{\theta}_x + \\ & w_s(I_{rs} + I_{gs})[C_{wst} w_{by} - S_{wst} w_{bx}] + \\ & (I_{rt} + I_{gt})(C_{wst} \dot{w}_{bx} + S_{wst} \dot{w}_{by}) = T_{gx} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & I_{rt}\ddot{\theta}_y + (2I_{rt} - I_{rs})\dot{\theta}_x w_s + [(I_{rs} - I_{rt})w_s^2 + Ky]\theta_y + \\ & c_g \dot{\theta}_y + w_s I_{rs} [-C_{wst} w_{bx} - S_{wst} w_{by}] + \\ & I_{rt}(C_{wst} \dot{w}_{by} - S_{wst} \dot{w}_{bx}) = T_{gy} \end{aligned} \quad (2)$$

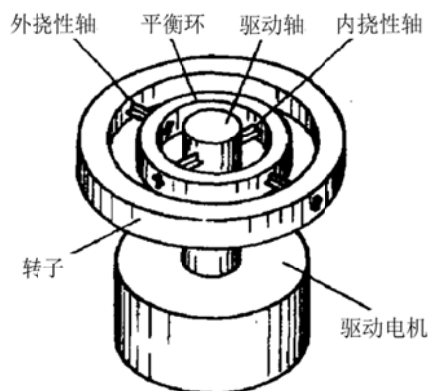


图 1 动调陀螺机械模型

其中:  $I_{rt}, I_{rs}$  为转子横向, 轴向转动惯量;  $I_{gt}, I_{gs}$  为平衡环横向, 轴向转动惯量;  $\theta_x, \theta_y$  为转子绕内, 外动调轴转角;  $w_s$  为电机转速;  $c_g$  为阻尼系数;  $K_x, K_y$  为内、外动调轴弹簧刚度;  $T_{gx}, T_{gy}$  为内、外动调轴方向控制力矩;  $T_{cx}, T_{cy}$  为壳体坐标系下  $x, y$  轴方向控制力矩;  $S_{wst}$  为  $wst$  的正弦值;  $C_{wst}$  为  $wst$  的余弦值;  $w_{bx}, w_{by}$  为壳体绕其  $x, y$  轴方向的角速度;  $\phi_x, \phi_y$  为转子相对壳体坐标系的  $x, y$  轴绕过的转角。

式(1)和式(2)是以转子绕内外动调轴的转角  $\theta_x, \theta_y$  及其导数表示的, 对于特性分析与系统实现测量不便。所以需要将它转化为用绕壳体坐标系  $x$  轴与  $y$  轴的转角  $\phi_x, \phi_y$  来表示。根据坐标投影关系得到  $\theta_x, \theta_y$  与  $\phi_x, \phi_y$  的关系

$$\begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{w_s t} & -S_{w_s t} \\ S_{w_s t} & C_{w_s t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \quad (3)$$

上式带入式(1)和式(2)得到

$$\begin{aligned} & (I_{rt} + 0.5I_{gt})\ddot{\phi}_x + c_g \dot{\phi}_x + [K - Jw_s^2]\phi_x + \\ & (I_{rt} + I_{gt})w_s \dot{\phi}_y + c_g w_s \phi_y + (I_{rt} + 0.5I_{gt})\dot{w}_{bx} + \\ & (I_{rs} + 0.5I_{gs})w_s w_{by} = T_{cx} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & (I_{rt} + 0.5I_{gt})\ddot{\phi}_y + c_g \dot{\phi}_y + [K - Jw_s^2]\phi_y - \\ & (I_{rt} + I_{gt})w_s \dot{\phi}_x - c_g w_s \phi_x + (I_{rt} + 0.5I_{gt})\dot{w}_{by} - \\ & (I_{rs} + 0.5I_{gs})w_s w_{bx} = T_{cy} \end{aligned} \quad (5)$$

式(4)和式(5)忽略了对陀螺运动影响很小的二次谐波力矩项, 并且假定内外动调轴的弹簧刚度相同为  $K$ , 符号  $J = 0.5(2I_{gt} - I_{gs})$ 。式(4)和式(5)等号左边第 1 项为惯性力矩、第 2 项为阻尼力矩、第 3 项为弹性力矩、第 4 项为陀螺力矩、第 5 项为正交弹性力矩、第 6, 7 项为壳体相对惯性空间转动引起的等效力矩; 等号右边为控制力矩和干扰力矩。

此方程被证明对于动调陀螺的控制器设计是十分有效的, 从式(4), (5)得到的系统特征方程为

$$\begin{aligned} d(S) = & [(I_{rt} + 0.5I_{gt})S^2 + c_g S + \\ & (K - Jw_s)]^2 + [(I_{rs} + 0.5I_{gs})w_s S + c_g w_s]^2 \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)有 2 对共轭复根, 反映了进动和章动 2 个特征频率, 而 Stately 却在开环控制实验中检测

出 4 个特征频率。这说明被忽略的二次谐波力矩项影响了系统的特征频率，所以式(4)，(5)不适用于陀螺飞轮的动力学特性描述，为此必须建立了一个新的动力学模型，来描述陀螺飞轮的工作特性。

## 2 陀螺飞轮模型的建立

首先本文在动调陀螺的运动方程中定义几个新的符号来突出模型的模态特征，使以后的分析更为方便。

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{I_{gt}}{2I_{rt} + I_{gt}}, w_n = \frac{2I_{rs}}{2I_{rt} + I_{gt}} w_s, \\ \gamma_2 &= \frac{I_{gs}}{2I_{rt} + I_{gt}}, c_g' = \frac{c_g}{2I_{rt} + I_{gt}} \\ I_{rt}' &= I_{rt} + 0.5I_{gt}, \alpha = \frac{Kx + Ky - 2Jw_s^2}{2I_{rt} + I_{gt}}, \\ \beta &= \frac{Kx - Ky - 2Jw_s^2}{2I_{rt} + I_{gt}}\end{aligned}$$

其中：符号  $\alpha = 0$  是动调陀螺的调谐条件； $w_n$  表示动调陀螺的章动频率； $c_g'$  表示等效阻尼。这样，在不忽略二次谐波力矩项的前提下，动调陀螺的运动学方程为

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} 1 + \gamma_1 C_{2wst} & \gamma_1 S_{2wst} \\ \gamma_1 S_{2wst} & 1 - \gamma_1 C_{2wst} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_x \\ \ddot{\phi}_y \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 2c_g' - 2\gamma_1 w_s S_{2wst} & wn + 2\gamma_1 w_s + 2\gamma_1 w_s C_{2wst} \\ -(wn + 2\gamma_1 w_s) + 2\gamma_1 w_s C_{2wst} & 2c_g' + 2\gamma_1 w_s S_{2wst} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \dot{\phi}_x \\ \dot{\phi}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha + \beta C_{2wst} & 2c_g' w_s + \beta S_{2wst} \\ -2c_g' w_s + \beta S_{2wst} & \alpha - \beta C_{2wst} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 1 + \gamma_1 C_{2wst} & \gamma_1 S_{2wst} \\ \gamma_1 S_{2wst} & 1 - \gamma_1 C_{2wst} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_{bx} \\ \dot{w}_{by} \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} -\gamma_2 w_s S_{2wst} & -\gamma_2 w_s C_{2wst} + (wn + \gamma_2 w_s) \\ \gamma_2 w_s C_{2wst} & -(wn + \gamma_2 w_s) \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} w_{bx} \\ w_{by} \end{bmatrix} = \frac{1}{I_{rs}'} \begin{bmatrix} T_{cx} \\ T_{cy} \end{bmatrix} \quad (7)\end{aligned}$$

从上述公式可以看出，微分方程惯性力矩系数，阻尼力矩系数，刚度系数都是时变的，这说明二次谐波力矩项对整个系统的动态响应是有影响的。如果将其表达成  $\dot{x} = \mathbf{A}x$  形式，则矩阵  $\mathbf{A}$  是一

个时变矩阵。但是针对陀螺飞轮系统，我们同样希望得到一个如动调陀螺一样的线性定常系统模型，即希望  $\mathbf{A}$  是一个常系数矩阵。虽然式(1)，(2)满足此要求，但是输出量  $\theta_x, \theta_y$  难以测量。所以本文需一个类似于式(1)的，而且满足下述(1)和(2)要求的新系统模型。

(1) 模型方程系数为常系数

(2) 输出量为壳体参考坐标系的绕  $x$  轴与  $y$  轴的转角  $\phi_x, \phi_y$

解决问题的主要思想是引入两个控制量与被控量相同的系统运动方程，然后通过叠加的方法消除方程中被控量的时变系数来满足要求。首先将式(1)分别加上与减去复数符号  $i$  与式(2)乘积合成为复系数微分方程。并且定义如下复变量：

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_x + i\theta_y, T_g = T_{gx} + iT_{gy}, \\ w_b &= w_{bx} + iw_{by}\end{aligned} \quad (8)$$

然后根据这 2 个复系数方程消去与二次谐波力矩项有关的变量，并转换到壳体坐标系下得到如下陀螺飞轮的传递函数

$$\begin{aligned}\phi(s) &= G_{d1}(s)T_c(s) + G_{d2}(s)\bar{T}_c(s - 2jw_s) + \\ & G_{e1}(s)w_b(s) + G_{e2}(s)\bar{w}_b(s - 2jw_s)\end{aligned} \quad (9)$$

其中陀螺飞轮传递函数  $G_{d1}(s), G_{d2}(s)$  和  $d(s)$  表达式为：

$$\begin{aligned}G_{d1}(s) &= \frac{1}{I_{rs}' d'(s - jw_s)} (S^2 + [2c_g' + \\ & j(w_n - 2(2 - \gamma_1)w_s)]S + \alpha - 2jw_s c_g' + \\ & 2w_s w_n + 4(\gamma_1 - 1)w_s^2)\end{aligned} \quad (10)$$

$$G_{d2}(s) = \frac{-\gamma_1 S^2 + 2jw_s \gamma_1 S - \beta}{I_{rs}' d'(s - jw_s)} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}d(s) &= [\gamma_1 S^2 - 2jw_s \gamma_1 S + \beta]^2 + \\ & [S^2 + (2c_g' - j(w_n + 2\gamma_1 w_s))S + \alpha - 2jw_s c_g'] \cdot \\ & [S^2 + [2c_g' + j(w_n - 2(2 - \gamma_1)w_s)]S + \\ & \alpha - 2jw_s c_g' + 2w_s w_n + 4(\gamma_1 - 1)w_s^2]\end{aligned} \quad (12)$$

壳体角速度传递函数  $G_{e1}(s)$  的表达式在下面由零极点形式给出。 $\bar{T}_c(s - 2jw_s)$  表示在二倍转频率下的振动力矩， $\bar{w}_b(s - 2jw_s)$  表示壳体角度中

的振动成分。通过对完整模型与传统模型比较可以看出:

(1) 传统模型中输出  $\phi$  由带时变系数的运动方程决定, 但在新模型中, 这种依赖被消除了。  $\phi$  的运动方程被表达为一个与控制力矩有关的函数。

(2) 传统模型的有 2 个特征频率, 从完整模型的特征多项式  $d(s)$  可以看出, 特征极点是 4 个不相同的极点, 表明陀螺飞轮会出现 4 个特征频率, 这证明了二次谐波力矩项对系统的模态是有影响的。

这里需要注意的是式(9)是一个复系数单输入单输出的传递函数方程。依据引入复数符号  $i$  的方法, 式(9)的实部就是陀螺飞轮  $x$  轴的动力学方程, 虚部就是  $y$  轴的动力学方程。从而使整个系统变成了一个二输入二输出的实系数传递函数方程, 而二输入二输出传递函数的特征多项式极点是 4 对共轭极点, 表征 4 个特征频率。所以在设计控制器时, 只要求出式(9)的共轭方程的特征多项式极点, 就可补齐整个系统的特征极点。本文其后的分析只使用复系数单输入单输出的传递函数方程。

### 3 陀螺飞轮模型的零极点分析

首先忽略式(9)的二次谐波振动输入项  $\bar{T}_c(s-2jw_s)$  和  $\bar{w}_b(s-2jw_s)$  有关的传递函数, 得到如下简化传递函数

$$\phi(s) = G_{d1}(s)T_c(s) + G_{e1}(s)w_b(s) \quad (13)$$

被忽略的传递函数并不意味着他们对系统的影响可以忽略, 只是首先简化对系统的控制分析。

此方程的特征多项式为:

$$\begin{aligned} d'(s) = & [S^2 + (2cg' - j(w_n + 2\gamma_1 w_s))S + \alpha - \\ & 2jw_s c_g'] \{ S^2 + [2c_g' + j(w_n - 2(2 - \gamma_1)w_s)]S + \\ & \alpha - 2jw_s c_g' + 2w_s w_n + 4(\gamma_1 - 1)w_s^2 \} + \\ & [\gamma_1 S^2 - 2jw_s \gamma_1 S + \beta]^2 \end{aligned} \quad (14)$$

同样忽略对系统影响很小的阻尼系数  $c_g'$ , 并且根据  $\gamma_1 = \frac{I_{gt}}{2I_{rt} + I_{gt}}$ , 由于平衡环的转动惯量远

小于转子转动惯量,  $\gamma_1$  趋近于 0, 解得 4 个极点为

$$\begin{aligned} p_1 = & j[2w_s + \frac{\alpha}{w_n} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2w_s w_n (w_n - 2w_s)} + \\ & \frac{2\gamma_1 \alpha w_s}{w_n (w_n - 2w_s)}] \\ p_2 = & -j[\frac{\alpha}{w_n} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2w_s w_n (w_n - 2w_s)} + \frac{2\gamma_1 \alpha w_s}{w_n (w_n - 2w_s)}] \\ p_3 = & j[w_n + \frac{\alpha - \gamma_1 \beta}{w_n - w_s} + 2\gamma_1 w_s - \frac{\alpha w_s}{w_n (w_n - w_s)} - \\ & \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2w_s w_n (w_n - 2w_s)} + \frac{\gamma_1^2 w_n (w_n - 2w_s)}{2(w_n - w_s)^2} - \\ & \frac{2\gamma_1 \alpha w_s^2}{w_n (w_n - 2w_s)(w_n - w_s)}] \\ p_4 = & j[2w_s - w_n - \frac{\alpha - \gamma_1 \beta}{w_n - w_s} - 2\gamma_1 w_s + \\ & \frac{\alpha w_s}{w_n (w_n - w_s)} + \frac{2\gamma_1 \alpha w_s}{w_n (w_n - 2w_s)(w_n - w_s)} - \\ & \frac{\gamma_1^2 w_n (w_n - 2w_s)}{2(w_n - w_s)^2} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2w_s w_n (w_n - 2w_s)}] \end{aligned}$$

传递函数方程  $G_{d1}(s)$  的 0 点为

$$\begin{aligned} z_1 = & j(2w_s + \frac{\gamma_1^2 w_s^2}{w_n} + \frac{\alpha}{w_n}), \\ z_2 = & j(2w_s - w_n - 2\gamma_1 w_s - \frac{\gamma_1^2 w_s^2}{w_n} - \frac{\alpha}{w_n}) \end{aligned}$$

对上述 4 个极点和 2 个零点进行观察, 可以得出以下结论:

(1) 陀螺飞轮模型出现了 Stately 开环实验中辨识出的 4 个特征频率。第 1 个特征频率接近 2 倍转速频率, 第 2 个接近进动频率, 第 3 个接近章动频率, 第 4 个接近 2 倍频与章动频率的差频。

(2) 从传统模型的 2 个极点中可以看出, 只要  $\alpha = 0$ , 则进动频率为 0。而从极点  $p_2$  可以看出, 进动频率在  $\alpha = 0$  条件下不为 0, 说明此时的转子并不是一个自由转子。

(3)  $p_1, p_4$  并没有在传统动调陀螺的控制系统设计中出现。对于动调陀螺的而言, 其转子的旋转轴转动惯量和横向轴转动惯量都很小, 旋转轴转动惯量近似是横向轴的二倍, 并且平衡环的转动惯量

与转子相比可以忽略不计。这样，化简动调陀螺章动频率的计算公式  $w_n = \frac{2I_{rs}}{2I_{rt} + I_{gt}} w_s$ ，结果为： $w_n = 2w_s$ 。这表明动调陀螺的章动频率和二倍转速频率相差无几，从而极点  $p_1$  便不会出现在动调陀螺的运动学方程里。同理，极点  $p_4$  的主要成分是  $p_4 = j(2w_s - w_n)$ ，这是一个趋近于 0 的值，与进动频率相近。所以在对实际系统进行数据分析时，很难检测出来。

(4) 通过观察  $z_1, z_2$  可以看出，它们与  $p_1, p_4$  非常接近。这样，根据零极点对消原理可以看出， $p_1, p_4$  对系统的动态响应没有显著的影响。这同样解释了为什么动调陀螺只变现出 2 个特征频率的原因。但在陀螺飞轮中，这 4 个状态都将显示出来。

由于陀螺飞轮转子尺寸的增大，转动惯量增长近千倍。 $2w_s - w_n$  不再趋近于 0，即差频将会显示出来。尽管  $p_1$  和  $p_4$  的模态在陀螺飞轮开环控制中显示出来，但它们的影响在系统闭环控制中，由于零极点对消同样会被削弱。与动调陀螺不同的是，这 2 对零极点的值有着不可忽略的差别，所以他们的影响被忽略的前提是不会对系统稳定性造成影响。通过对模型根轨迹分析可知，如果一对在虚轴上的零极点偶极子中得极点模值大于零点模值，则根轨迹一定在左半平面，即不会对系统稳定造成影响。所以  $G_{d1}(s)$  的可以化简为如下形式：

$$G_{d1}(s) = \frac{1}{I_{rs}(S - jw_{n2})(S + jw_p)} \quad (15)$$

其中： $w_p = -jp_2$  表示系统的进动频率； $w_{n2} = -jp_3$ ；表示章动频率。传递函数  $G_{e1}(s)$  的表达式为：

$$G_{e1}(s) = \frac{(S - z_1)(S - z_2)(S - z_3)}{(S - p_1)(S - p_2)(S - p_3)(S - p_4)} \quad (16)$$

其中极点表达式和  $z_1, z_2$  与  $G_{d1}(s)$  的表达式相同， $z_3 = j(w_n + \gamma_2 w_s)$ 。

与  $G_{d1}(s)$  类似， $z_1, z_2$  和  $p_1, p_4$  由于分别接近而被对消；零点  $z_3$  由于接近章动频率与极点  $p_3$  抵消。

方程  $G_{e1}(s)$  被化简为： $G_{e1}(s) = \frac{1}{S - p_2}$ 。

$p_2$  为进动频率，此方程与动调陀螺对应方程形式类似，不同点是：极点的表达式不同，动调陀螺总是工作在调谐转速下，所以其壳体角速度传递函数是积分环节，而陀螺飞轮是惯性环节。

### 4 陀螺飞轮模型的验证

为了确认陀螺飞轮模型的正确性，本文采用 ADAMS 软件建立以动调陀螺机械结构为基础的陀螺飞轮机理模型。图 2 与表 1 为 ADAMS 机理模型和参数列表。

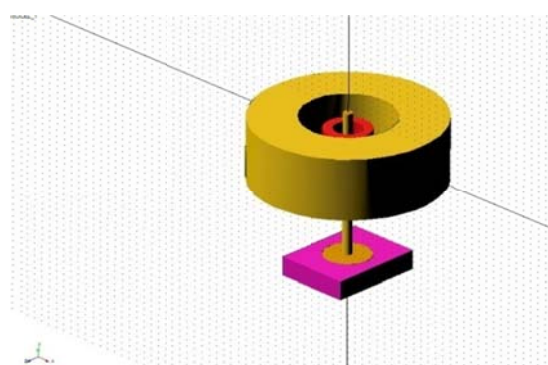


图 2 陀螺飞轮机理模型图

表 1 陀螺飞轮机械参数表

机械参数	符号	设计值
转子旋转轴转动惯量	$I_{rs}$	0.058 Kg·m <sup>2</sup>
转子横向转动惯量	$I_{rt}$	0.037 Kg·m <sup>2</sup>
平衡环旋转轴转动惯量	$I_{gs}$	0.002 13 Kg·m <sup>2</sup>
平衡环横向转动惯量	$I_{gt}$	0.002 11 Kg·m <sup>2</sup>
动调轴刚度	$K$	10.335 Nm/rad
实际转速	$w_s$	280 rad/s

将表 1 的参数带入由式(13)得出的 4 个极点表达式，分别得出 4 个极点的值为：进动频率：0.02 Hz，差频：19.65 Hz，章动频率：69.47 Hz，二倍转速频率：89.14 Hz。向 ADAMS 模型的 x 轴施加正弦力矩信号，以 0.1 Hz 为分辨率，对 x 轴的输出的转角信号响应进行扫频分析得到图 3~6 的 4 条频率响应特性曲线。从公式计算数据和挠性模型仿真分析数据的一致性对比来看，此模型可以更准确地反映陀螺飞轮的动力学特性。



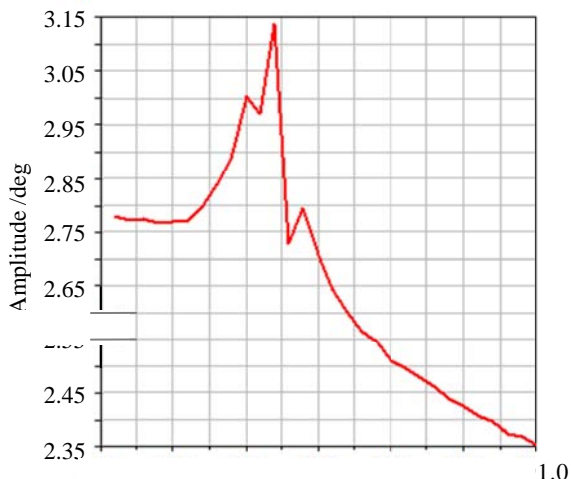


图 3 二倍转速特征频率:89.2Hz

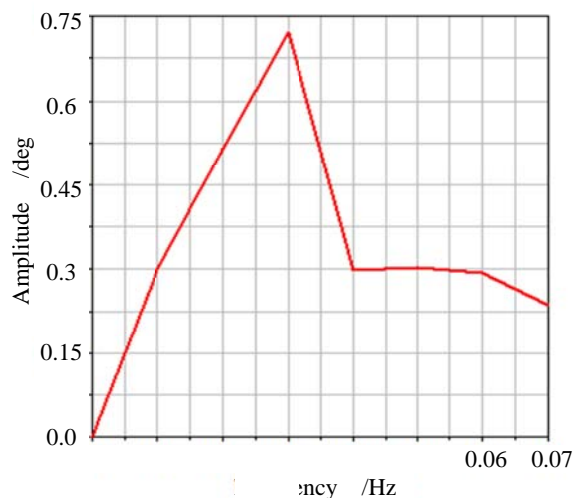


图 6 进动特征频率:0.03Hz

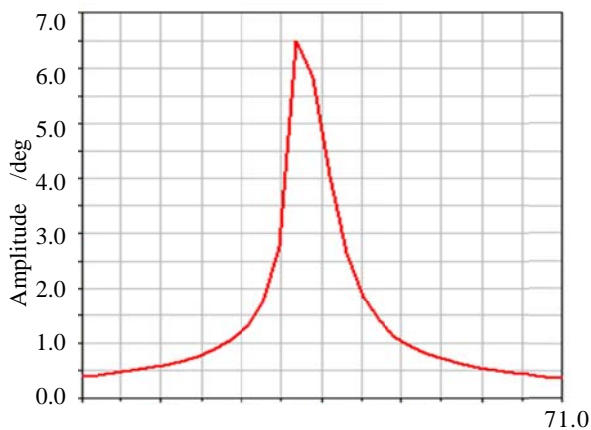


图 4 章动特征频率:69.3 Hz

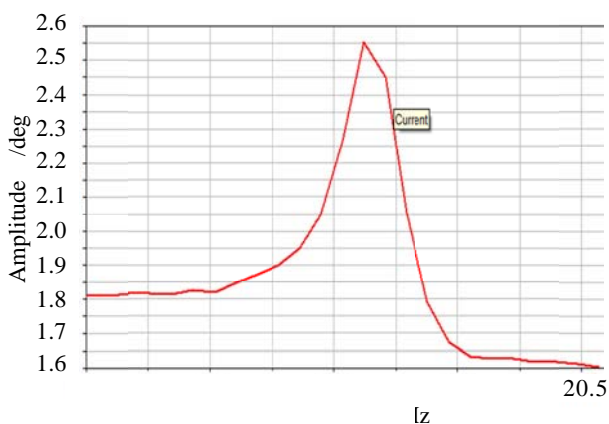


图 5 差频特征:19.6 Hz

### 5 结论

本文建立了陀螺飞轮的动力学模型,此模型由于考虑了二次谐波力矩项的影响而更加接近陀螺飞轮的实际工作情况,指明了陀螺飞轮具有除进动和章动以外的两个特征频率。由动力学方程本文还简单分析了其控制特性并进行了仿真验证,这为应用此模型对系统控制律的设计,模型的误差分析提供了理论依据。

### 参考文献:

- [1] Ower John Cameron. Analysis and control system design of an innovative tuned-rotor instrument [D]. Canada: Carleton University, 2000: 90-130.
- [2] Paul Trevor Harrison. Development and Testing of a GyroWheel Based Control System for the SCISAT-1 Scientific Satellite [D]. Canada: Carleton University, 1998: 1-20.
- [3] 林士谔. 动调陀螺仪 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1983.
- [4] 袁荣钢. 陀螺飞轮转子运动分析 [C]// 全国第十二届空间及运动体控制技术学术年会论文, 2006, 桂林, 中国. 北京: 中国自动化学会空间及运动体控制专业委员会, 2006: 528-531.