

6-20-2023

Golden Eagle Optimizer Algorithm Combining Levy Flight and Brownian Motion

Jiaxin Deng

College of Big Data and Information Engineering, Guizhou University, Guiyang 550025, China,
jxdeng_gzu@163.com

Damin Zhang

College of Big Data and Information Engineering, Guizhou University, Guiyang 550025, China,
1203813362@qq.com

Qing He

College of Big Data and Information Engineering, Guizhou University, Guiyang 550025, China

Jianping Zhao

College of Big Data and Information Engineering, Guizhou University, Guiyang 550025, China

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research](#), [Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Golden Eagle Optimizer Algorithm Combining Levy Flight and Brownian Motion

Abstract

Aiming at the slow attenuation and low convergence precision of golden eagle optimization algorithm, a new algorithm combining Levy flight and Brownian motion is proposed. *In order to increase the diversity, Fuch chaotic map is introduced to initialize the golden eagle individuals. Levy flight mechanism and Brownian motion mechanism are introduced into the position update formula of golden eagle individual to improve the search accuracy and help to the jump out of local optimum. The reduction factor is introduced into the overall position update formula of the golden eagle individual to improve the convergence speed.* Compared with 9 original algorithms and 5 improved algorithms under 14 benchmark test functions, the experimental results show that the improved golden eagle optimization algorithm has better performance, which are verified by three engineering applications.

Keywords

Levy flight, Brownian motion, reduction factor, golden eagle optimization

Recommended Citation

Jiaxin Deng, Damin Zhang, Qing He, Jianping Zhao. Golden Eagle Optimizer Algorithm Combining Levy Flight and Brownian Motion[J]. Journal of System Simulation, 2023, 35(6): 1290-1307.

结合莱维飞行和布朗运动的金鹰算法

邓佳欣, 张达敏*, 何庆, 赵建萍

(贵州大学 大数据与信息工程学院, 贵州 贵阳 550025)

摘要: 针对金鹰优化算法衰减速度慢和收敛精度低的问题, 提出一种结合莱维飞行和布朗运动的金鹰优化算法。对金鹰种群个体引入Fuch混沌映射, 对其进行初始化, 增加金鹰个体的多样性; 在金鹰个体的位置更新公式上引入莱维飞行机制和布朗运动机制, 提高搜索精度, 帮助金鹰个体跳出局部最优; 在金鹰个体的整体位置更新公式上引入衰减因子, 提高收敛速度。在 14 个基准测试函数下分别和 9 个经典基本算法和 5 个改进算法进行对比, 结果表明: 改进的金鹰优化算法拥有更好的性能, 在 3 个工程应用中得到了更好的验证。

关键词: 莱维飞行; 布朗运动; 衰减因子; 金鹰优化算法

中图分类号: TP391.9

文献标志码: A

文章编号: 1004-731X(2023)06-1290-18

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.23-0232

引用格式: 邓佳欣, 张达敏, 何庆, 等. 结合莱维飞行和布朗运动的金鹰算法[J]. 系统仿真学报, 2023, 35(6): 1290-1307.

Reference format: Deng Jiaxin, Zhang Damin, He Qing, et al. Golden Eagle Optimizer Algorithm Combining Levy Flight and Brownian Motion[J]. Journal of System Simulation, 2023, 35(6): 1290-1307.

Golden Eagle Optimizer Algorithm Combining Levy Flight and Brownian Motion

Deng Jiaxin, Zhang Damin*, He Qing, Zhao Jianping

(College of Big Data and Information Engineering, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract: Aiming at the slow attenuation and low convergence precision of golden eagle optimization algorithm, a new algorithm combining Levy fight and Brownian motion is proposed. In order to increase the diversity, Fuch chaotic map is introduced to initialize the golden eagle individuals. Levy flight mechanism and Brownian motion mechanism are introduced into the position update formula of golden eagle individual to improve the search accuracy and help to the jump out of local optimum. The reduction factor is introduced into the overall position update formula of the golden eagle individual to improve the convergence speed. Compared with 9 original algorithms and 5 improved algorithms under 14 benchmark test functions, the experimental results show that the improved golden eagle optimization algorithm has better performance, which are verified by three engineering applications.

Keywords: Levy flight; Brownian motion; reduction factor; golden eagle optimization

0 引言

群智能算法是一类典型的元启发式算法, 已被人们用于解决各类工程问题。相比传统的数值优化, 群智能算法具有不可替代的优越性。粒子群算

法^[1]是经典的群智能算法, 研究人员对其进行了大量的改进和应用, 如车间调度^[2]、无人机路径规划^[3]、神经网络预测^[4]等方面。研究人员受到自然界生物种群的启发, 也产生了很多新型的群智能算法。如蝴蝶优化算法(butterfly optimization

收稿日期: 2023-03-01

修回日期: 2023-03-17

基金项目: 国家自然科学基金(62062021, 62166006); 贵州省科学技术基金(黔科合基础[2020]1Y254)

第一作者: 邓佳欣(1998-), 女, 硕士生, 研究方向为认知无线电、群智能算法改进。E-mail: jxdeng_gzu@163.com

通讯作者: 张达敏(1967-), 男, 教授, 博士, 研究方向为认知无线电、群智能算法改进。E-mail: 1203813362@qq.com

algorithm, BOA)^[5]、萤火虫算法(firefly algorithm, FA)^[6]、灰狼算法(grey wolf optimization, GWO)^[7]、正弦余弦算法(sine cosine algorithm, SCA)^[8]、樽海鞘群算法(slap swarm algorithm, SSA)^[9]、海鸥算法(seagull optimization algorithm, SOA)^[10]、鲸鱼算法(whale optimization algorithm, WOA)^[11]等。然而, 代表某一类动物群体的智能算法终究不完美, 存在收敛速度慢, 搜索精度低的缺点。为此, 研究人员对群智能算法进行了改进, 如混沌序列初始化、惯性权重法、莱维飞行机制等。文献[12]分别利用 Logistic、Tent 和 Sinusoidal 映射对粒子群进行初始化, 并对 3 种映射分别进行了收敛性分析, 结果表明, 通过混沌映射初始化后的粒子搜索效果优于随机初始化后的粒子, 但是由于不同混沌映射的特性, 不同初始化方式的收敛精度也不同。惯性权重策略是算法改进的常用方法, 主要有线性惯性权重法、非线性惯性权重法、随机惯性权重法、自适应惯性权重法等。文献[13]以 PSO 为基础, 研究了线性惯性权重、随机惯性权重、凹函数惯性权重和凸函数惯性权重方法对算法的影响, 结果表明, 多峰函数和单峰函数适用的惯性权重方法不同, 就整体而言, 凸函数惯性权重有着更优的表现。此外, 更复杂的惯性权重策略也被运用到算法的改进中。文献[14]提出的非线性惯性权重方法, 除了根据算法迭代次数和固定参数实现之外, 还引入了随机因子, 增加了算法的搜索空间, 使算法获得更优解。文献[15]利用非线性惯性权重指引策略设定了可控参数, 并根据不同的可控参数的值进行探索, 得出帮助算法收敛最快的值并应用到改进中, 取得了良好的效果。随机惯性权重法让惯性权重的取值随机落在某个区间, 增加了搜索多样的可能性。文献[16]利用随机惯性权重策略对人群搜索算法进行改进, 并将改进后的算法运用到 PID 参数整定控制中, 取得了良好的效果。此外, 自适应惯性权重方法也得到了研究者们的青睐。自适应惯性权重是根据算法当下的适应度值来确定的。文献[17]在算法中引入的惯性权重是根据当下种群适应度值的最大值和最

小值来确定的, 这样的惯性权重更能贴合算法当下搜索需要, 更好地平衡了算法的勘探与开发能力。莱维飞行是遵从莱维分布的随机游走策略, 具有长距离跳跃和小步跟踪的特点, 其著名的应用是生物学中的“莱维飞行假说(Levy flight foraging hypothesis)”: 当鲨鱼或者海洋中的其他捕食者无法找到食物时, 他们就会由布朗运动转为莱维飞行^[18]。研究表明, 相对均匀随机搜索而言, 莱维飞行的小距离跟踪和长距离跳跃能取得更精确和深入的搜索效果^[19]。文献[20]利用莱维飞行对蚁狮位置更新进行变异扰动, 提高了算法跳出局部最优的可能性, 将莱维飞行策略引入当前最优位置, 帮助算法跳出局部最优。

金鹰优化算法(golden eagle optimizer, GEO)是新型的群智能优化算法^[21]。GEO 建立于金鹰个体捕食过程中的巡航和攻击行为之上, 通过平衡两者关系, 帮助函数寻找最优值, 已经在许多方面得到了应用。文献[22]引入个人实例和镜像反射学习策略对 GEO 进行改进并应用到三维路径规划中。文献[23]将二进制 GEO 改进后应用到特征选择。文献[24]利用 GEO 设计 PI 控制器并应用到风力发电系统, 取得了较好的效果。然而, 金鹰的巡航行为到攻击行为的转换直接影响了最后的结果, 巡航行为主要体现了算法的勘探功能, 攻击行为主要体现了算法的开发功能, 原算法中从巡航行为到攻击行为的转变是随机的, 无法平衡好勘探阶段和开发阶段, 直接导致 GEO 收敛速度缓慢, 搜索精度低下和鲁棒性较低的问题。针对 GEO 的缺点, 提出了一种结合莱维飞行和布朗运动的衰减金鹰优化算法(golden eagle optimizer combining with Levy flight, reduction factor and Brownian motion, LRBGEO)。在众多的混沌映射初始化策略中, Logistic 和 Sinusoidal 混沌映射均匀性和遍历性较差, 而 Tent 映射对初值比较敏感, 因此, 需要均匀性和遍历性更强的 Fuch 混沌映射进行种群初始化。在自然界中, 捕食者捕捉猎物并不完全依靠随机跳跃的莱维飞行, 若猎物较多

聚集,此时捕食者可以选择以布朗运动的方式进行猎物捕捉。本文同时引入莱维飞行和布朗运动对金鹰的位置更新进行扰动,莱维飞行作用于上一时刻的金鹰位置,增加了搜索空间的多样性,布朗运动帮助平衡金鹰的移动步长,提高金鹰的搜索速度。此外,为了提高算法的搜索速度,引入随着算法迭代次数更新的衰减因子,帮助算法快速收敛。

1 GEO及其改进

1.1 GEO

GEO受金鹰在攻击猎物过程中的巡航和攻击行为启发。在金鹰个体距离猎物较远时,金鹰个体以猎物为中心围绕其做巡航运动。当金鹰个体做巡航运动接近猎物到了可以攻击的范围内时,金鹰发起攻击,向猎物扑去。金鹰的位置更新主要分为3个部分。

(1) 攻击行为

当金鹰距离猎物较近时,便发起攻击:

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{X}_f^* - \mathbf{X}_i \quad (1)$$

式中: $\mathbf{A}_i$ 为金鹰 i 的攻击向量; $\mathbf{X}_i$ 为金鹰 i 当前的位置; $\mathbf{X}_f^*$ 为当前金鹰到达的最佳地点。

(2) 巡航行为

当金鹰距离猎物较远时,以猎物为中心进行盘旋运动,此时巡航向量的方向为金鹰做圆周运动的切线方向,大小根据攻击向量决定,则巡航向量为

$$\mathbf{C}_i = \{c_1 = r, c_2 = r, \dots, c_{k-1} = r, c_k = (d - \sum_{j,j \neq k} a_j) / a_k, c_{k+1} = r, \dots, c_n = r\} \quad (2)$$

式中: a_i 为攻击向量的元素; d 为金鹰位置所在的超平面方程常数; n 为元素个数; r 为随机数。

(3) 位置更新

金鹰的位置更新公式由攻击向量和巡航向量组成,在金鹰对猎物进行巡航到合适位置时便对猎物发起攻击,产生移动步长:

$$\Delta x = r_1 P_a \frac{\mathbf{A}_i}{\|\mathbf{A}_i\|} + r_2 P_c \frac{\mathbf{C}_i}{\|\mathbf{C}_i\|} \quad (3)$$

$$\|\mathbf{A}_i\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}, \|\mathbf{C}_i\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n c_j^2} \quad (4)$$

$$P_a = P_a^0 + \frac{t}{T} |P_a^T - P_a^0| \quad (5)$$

$$P_c = P_c^0 - \frac{t}{T} |P_c^T - P_c^0| \quad (6)$$

式中: r_1 和 r_2 为随机数; P_a 和 P_c 为攻击系数和巡航系数,分别由初值变化到终值; $\|\mathbf{A}\|$ 和 $\|\mathbf{C}\|$ 为攻击向量和巡航向量的欧几里得范数,代表了这2个向量的模长; t 为当前迭代次数; T 为总迭代次数。故金鹰 i 的第 $t+1$ 次位置更新为

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i^t + \Delta \mathbf{x} \quad (7)$$

1.2 改进的GEO

1.2.1 Fuch混沌映射

金鹰个体在初期的位置是随机分配的,具有很大的随机性,使得个体缺乏多样性,不利于种群寻优。在算法初始化阶段引入Fuch混沌映射,让金鹰个体有一个均匀化的初始位置,利于种群寻优:

$$x_{i+1} = \cos(1/x_i^2) \quad (8)$$

利用Fuch混沌映射产生序列之后,将该序列映射到金鹰个体的位置空间,作为金鹰种群的初始位置:

$$X_0 = LB + \text{Fuch}(UB - LB) \quad (9)$$

式中: X_0 为金鹰种群的初始位置; UB 和 LB 分别是搜索上下限。

1.2.2 莱维飞行

莱维飞行小步跟踪的特点能够帮助算法进行局部邻域搜索,提高寻优精度,长距离跳跃的特点能对种群位置进行扰动,帮助算法进行探索,帮助跳出局部最优。莱维分布的步长:

$$\text{Levy}(\alpha) = 0.05 \times \frac{x}{|y|^{1/\alpha}} \quad (10)$$

式中: $\alpha=1.5$; x 和 y 服从正态分布。

$$x \sim N(0, \sigma_x), \quad y \sim N(0, \sigma_y)$$

$$\sigma_x = \left[\frac{\Gamma(1+\alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \times \alpha \times 2^{\frac{\alpha-1}{2}}}\right]^{1/\alpha}, \sigma_y = 1 \quad (11)$$

1.2.3 布朗运动

布朗运动是每步都较短的随机运动, 是遵从高斯分布的随机过程, 因此, 在金鹰的飞行过程中引入布朗运动。研究表明, 将莱维飞行和布朗运动相结合的捕食策略优于二者单独作用^[25]。布朗运动适合远距离随机搜索, 与莱维飞行运动相结合, 能更好地平衡金鹰的勘探与开发能力。

1.2.4 衰减因子

为了让算法迅速收敛, 在金鹰的位置更新公式中引入衰减因子。从金鹰的位置更新公式可知, 金鹰在下一时刻的位置主要由上一时刻的位置和移动步长 Δx 决定, 当 Δx 较小时, 金鹰在下一时刻的位置与上一时刻接近, 容易使算法陷入停滞状态, 降低算法的收敛性能, 而引入的衰减因子帮助金鹰算法随着迭代次数的增加而逐渐降低依赖上一次迭代位置的程度, 从初期的很大程度依赖帮助算法全局搜索到后期的很小程度依赖帮助算法局部搜索, 提高算法的收敛速度:

$$R(t) = e^{-30 \frac{t}{T}} \quad (12)$$

式中: t 为当前迭代次数; T 为总迭代次数。

衰减因子的衰减程度与迭代次数有关, 在算法前期衰减较大, 利于算法快速收敛, 在算法后期衰减慢, 帮助算法更好地进行全局寻优。

1.2.5 LRBGEO

在金鹰的位置更新公式中引入衰减因子、莱维飞行和布朗运动后, 金鹰的位置更新公式为

$$x_i^{t+1} = R(t) \cdot [L \otimes x_i^t + d \cdot B \cdot \Delta x] \quad (13)$$

式中: d 为布朗运动的权重因子; $R(t)$ 为衰减因

子, 提高金鹰的收敛速度, 增强金鹰的全局勘探能力; L 为让金鹰在搜索范围内进行莱维飞行, 进行位置扰动, 增强金鹰的局部开发能力, 降低算法陷入局部最优的可能; B 为在金鹰的寻优过程中引入布朗运动, 和莱维飞行相配合, 平衡算法的全局勘探与局部开发能力, 提高寻优精度。

1.2.6 LRBGEO 的算法步骤和流程图

LRBGEO 的伪代码如下。

设置参数: 巡航系数 P_c , 攻击系数 P_a , 衰减系数 R , 莱维飞行系数 L 和布朗运动系数 B , 种群大小 N , 维度 d , 当前迭代次数 t , 总迭代次数 T

初始化: Fuch 混沌映射矩阵, 根据 Fuch 矩阵得到 N 只金鹰的位置 x_0

随机选择 1 个位置作为金鹰的记忆最优位置 X_t^*

计算初始适应度值

While $t < T$

For $i = 1:N$

计算攻击向量 A : $A_i = X_t^* - X_i$

If $A = 0$

重新选择进行记忆中的最佳地点

Else

计算巡航向量 C :

计算移动步长 Δx

计算 P_c

计算 P_a

更新 L, B, R

更新金鹰的位置

更新适应度值

更新金鹰记忆中的位置 X_t^*

End If

End For

End While

流程如图 1 所示。

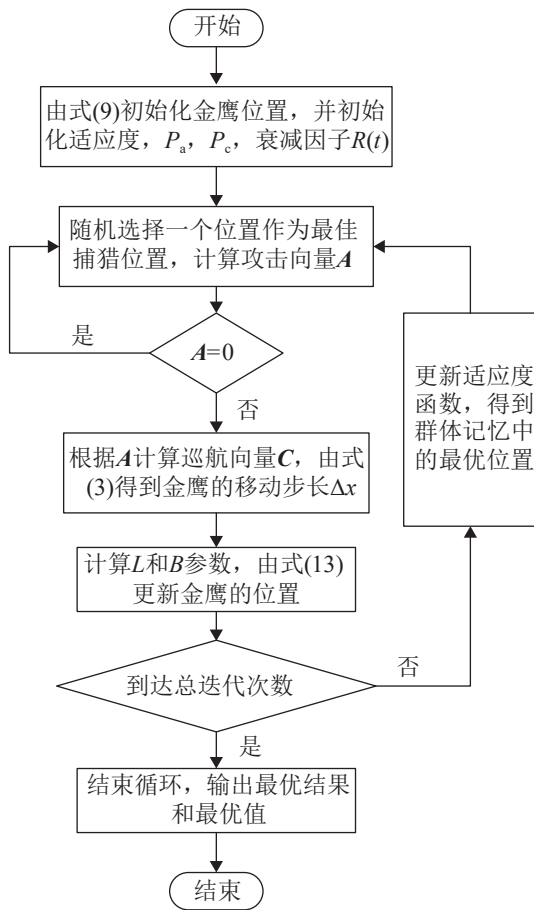


图 1 LRBGEO 的程序流程图
Fig. 1 Flow chart of LRBGEO

2 仿真实验

2.1 实验设置及安排

为了分析和测试 LRBGEO 的性能, 做以下实验安排: ①将 LRBGEO 与其他群智能原算法作对比, 直观验证 LRBGEO 的寻优效果, 所对比的算法有经典基本算法如 PSO^[1]、FA^[6]; 新型群智能算法, 如 BOA^[5]、GWO^[7]、SCA^[8]、SSA^[9]、SOA^[10]、WOA^[11], 进一步验证 LRBGEO 的时效性和稳定性; 选取 GEO^[21]作对比, 检验本文策略对原算法性能的提升效果。②将 LRBGEO 与上述对比算法中的部分改进算法作对比, 进一步检验本文策略对算法的具体影响。所对比的算法有经典基本算法的改进类, 如基于动态权重改进的 EIW_PSO^[17]; 新型群智能算法, 如基于莱维飞行策略

的 ISOA^[14]、基于衰减策略的 RDSSA^[26]和基于混沌映射初始化策略的 CASSA^[27]; 基于其他金鹰算法的改进, 如 GEO_DLS^[22], 横向对比了 LRBGEO 的效果。设置各个对比算法的参数, 如表 1 所示。③对寻优结果进行统计分析。④平均收敛曲线分析。本文选取 14 个基准测试函数作为测试, 其基本信息如表 2 所示。实验的种群数量均为 50, 总迭代次数为 1 000, 每个算法独立运行 50 次。

表 1 各算法的参数设置
Table 1 Parameter setting of each algorithm

算法	参数设置
BOA	$p=0.8, c=0.01, a=0.1$
FA	$\gamma=1, \beta_0=2, \alpha=2$
GWO	$a_{\max}=2, a_{\min}=0$
PSO	$\omega_{\max}=0.9, \omega_{\min}=0.2, c_1=c_2=2$
SCA	$a=2$
SSA	—
SOA	$f_c=2$
WOA	$a_{\max}=2, a_{\min}=0$
ISOA	$f_c=2$
RDSSA	—
EIW_PSO	—
CASSA	$\omega_{\max}=0.9, \omega_{\min}=0.2, P_{cr}=0.3, x_{craziness}=0.000\ 1$
GEO	$P_a=[0.5, 2], P_c=[1, 0.5]$
GEO_DLS	$u=0.2, P_a=[0.5, 2], P_c=[1, 0.5], \varepsilon=0.3, Q=0.8$
LRBGEO	$P_a=[0.5, 2], P_c=[1, 0.5], d=1$

表 2 基准测试函数
Table 2 Benchmark function

函数	名称	f^*	定义域	维度	特征
F1	Sphere	0	$[-100, 100]$	30	单峰
F2	Schwefel 2.22	0	$[-10, 10]$	30	单峰
F3	Schwefel 1.2	0	$[-100, 100]$	30	单峰
F4	Schwefel 2.21	0	$[-100, 100]$	30	单峰
F5	Beale	0	$[-4.5, 4.5]$	2	单峰
F6	Matyas	0	$[-10, 10]$	2	单峰
F7	Three-hump camel	0	$[-5, 5]$	2	单峰
F8	Rastrigin	0	$[-5.12, 5.12]$	30	多峰
F9	Ackley1	0	$[-32, 32]$	30	多峰
F10	Griewank	0	$[-600, 600]$	30	多峰
F11	Himmelblau	0	$[-5, 5]$	2	多峰
F12	Periodic	0.9	$[-50, 50]$	30	多峰
F13	Salomon	0	$[-100, 100]$	30	多峰
F14	Yang 4	-1	$[-10, 10]$	30	多峰

2.2 与经典基本算法对比

经过 50 次独立实验后从每种算法中获得结果的最优值、平均值、标准差、平均运行时间和算法求解成功率得到表 3。其中, 算法求解成功率 SR 为成功次数除以本实验的求解次数, 判断一次

求解是否成功的求解方式为

$$\begin{cases} |F_A - F_T|/F_T < 10^{-5}, & F_T \neq 0 \\ |F_A - F_T| < 10^{-5}, & F_T = 0 \end{cases} \quad (14)$$

式中: F_A 为每次实际求解最佳值; F_T 为测试函数理论最佳值。

表 3 LRBGEO 与经典基本算法测试结果对比
Table 3 Comparison of LRBGEO and classical basic algorithms test results

函数	算法	最优值	平均值	标准差	SR/%	函数	算法	最优值	平均值	标准差	SR/%
F1	BOA	1.44E-14	1.69E-14	9.40E-16	100	F8	BOA	0	3.39E+00	2.40E+01	94
	FA	1.10E-16	1.49E-16	1.83E-17	100		FA	9.95E-01	5.63E+00	2.52E+00	0
	GWO	2.00E-73	3.97E-70	6.76E-70	100		GWO	0	8.32E-02	4.66E-01	96
	PSO	3.59E-15	4.11E-11	1.68E-10	100		PSO	2.62E+01	3.99E+01	9.80E+00	0
	SCA	3.37E-08	8.80E-04	2.38E-03	26		SCA	2.68E-06	1.55E+01	2.54E+01	4
	SSA	5.86E-09	9.40E-09	1.90E-09	100		SSA	2.29E+01	4.74E+01	1.59E+01	0
	SOA	6.45E-22	1.72E-16	4.94E-16	100		SOA	0	5.23E-14	1.91E-13	100
	WOA	1.05E-189	9.88E-173	0	100		WOA	0	0	0	100
	GEO	7.70E-13	6.91E-12	7.57E-12	100		GEO	9.95E-01	1.24E+01	4.37E+00	0
	LRBGEO	0	0	0	100		LRBGEO	0	0	0	100
F2	BOA	1.86E-12	9.17E-12	2.87E-12	100	F9	BOA	6.99E-12	1.12E-11	1.59E-12	100
	FA	3.70E-10	6.40E-10	9.05E-11	100		FA	7.10E-10	1.08E-09	1.32E-10	100
	GWO	1.86E-42	4.83E-41	5.26E-41	100		GWO	7.99E-15	1.28E-14	2.76E-15	100
	PSO	5.70E-08	1.39E-05	2.44E-05	68		PSO	2.11E-07	1.88E-06	2.74E-06	98
	SCA	7.75E-09	6.19E-06	1.15E-05	80		SCA	1.35E-04	1.27E+01	9.67E+00	0
	SSA	1.75E-04	6.16E-01	8.07E-01	0		SSA	1.71E-05	1.53E+00	9.92E-01	0
	SOA	1.08E-16	2.29E-14	5.05E-14	100		SOA	1.34E-11	1.55E-09	4.12E-09	100
	WOA	7.31E-119	3.96E-109	1.93E-108	100		WOA	8.88E-16	4.01E-15	2.23E-15	100
	GEO	4.58E-02	5.92E-01	3.91E-01	0		GEO	3.25E-07	5.09E-01	6.77E-01	56
	LRBGEO	0	0	0	100		LRBGEO	8.88E-16	8.88E-16	0	100
F3	BOA	1.47E-14	1.70E-14	1.03E-15	100	F10	BOA	0	9.93E-16	1.16E-15	100
	FA	5.25E-18	9.03E-18	2.07E-18	100		FA	7.40E-03	4.64E-02	2.68E-02	0
	GWO	8.31E-24	2.52E-19	1.53E-18	100		GWO	0	1.37E-03	4.41E-03	90
	PSO	2.01E+00	7.16E+00	3.23E+00	0		PSO	5.22E-15	7.88E-03	8.82E-03	40
	SCA	1.33E+02	2.65E+03	2.95E+03	0		SCA	2.86E-06	1.60E-01	2.18E-01	2
	SSA	5.28E+00	5.77E+01	4.93E+01	0		SSA	1.57E-08	8.17E-03	8.52E-03	38
	SOA	1.97E-02	1.55E+01	5.95E+01	0		SOA	0	1.60E-03	1.13E-02	98
	WOA	1.14E+03	1.12E+04	6.32E+03	0		WOA	0	2.36E-03	9.51E-03	94
	GEO	2.36E+04	5.44E+04	1.41E+04	0		GEO	1.29E-07	6.40E-03	7.70E-03	50
	LRBGEO	2.92E-21	1.57E-20	8.24E-21	100		LRBGEO	0	0	0	100
F4	BOA	1.05E-11	1.15E-11	5.77E-13	100	F11	BOA	2.46E-04	2.98E-03	2.37E-03	0
	FA	7.11E-10	1.43E-09	2.10E-10	100		FA	9.28E-26	2.77E-23	2.82E-23	100
	GWO	7.43E-19	1.73E-17	2.17E-17	100		GWO	4.79E-09	4.03E-05	2.72E-04	96
	PSO	1.86E-01	3.91E-01	1.16E-01	0		PSO	0	3.31E-31	3.93E-31	100
	SCA	2.54E+00	1.49E+01	8.86E+00	0		SCA	3.53E-05	5.09E-03	5.01E-03	0
	SSA	3.50E-01	4.23E+00	3.24E+00	0		SSA	1.13E-16	1.89E-14	2.31E-14	100
	SOA	2.12E-04	1.09E-02	1.73E-02	0		SOA	1.45E-07	1.46E-05	2.69E-05	60
	WOA	8.11E-06	3.32E+01	3.13E+01	2		WOA	7.88E-13	3.55E-07	8.35E-07	100
	GEO	5.36E+01	6.41E+01	3.82E+00	0		GEO	1.60E-02	3.05E+00	2.55E+00	0
	LRBGEO	7.74E-12	1.40E-11	3.54E-12	100		LRBGEO	0	0	0	100

续表											
函数	算法	最优值	平均值	标准差	SR/%	函数	算法	最优值	平均值	标准差	SR/%
F5	BOA	6.52E-06	7.11E-02	1.35E-01	2	F12	BOA	7.29E+00	8.38E+00	4.70E-01	0
	FA	4.54E-26	2.39E-24	2.39E-24	100		FA	1.41E+00	1.78E+00	2.18E-01	0
	GWO	1.57E-10	4.57E-02	1.83E-01	94		GWO	1.38E+00	5.64E+00	1.94E+00	0
	PSO	0	0	0	100		PSO	1.00E+00	1.00E+00	1.16E-08	0
	SCA	2.20E-06	8.58E-05	8.50E-05	12		SCA	3.23E+00	4.09E+00	3.53E-01	0
	SSA	9.74E-18	9.18E-16	1.19E-15	100		SSA	2.01E+00	2.46E+00	3.13E-01	0
	SOA	8.37E-10	2.42E-07	3.35E-07	100		SOA	1.12E+00	2.26E+00	5.11E-01	0
	WOA	1.95E-17	4.81E-12	1.19E-11	100		WOA	9.00E-01	9.72E-01	6.47E-02	40
	GEO	3.58E-02	3.77E-01	2.28E-01	0		GEO	1.60E+00	2.65E+00	3.44E-01	0
	LRBGEO	0	9.42E-30	6.66E-29	100		LRBGEO	9.00E-01	9.00E-01	2.24E-16	100
F6	BOA	3.90E-21	1.13E-15	4.81E-16	100	F13	BOA	3.00E-01	3.03E-01	6.85E-03	0
	FA	5.18E-27	5.84E-25	4.23E-25	100		FA	9.99E-02	1.86E-01	3.51E-02	0
	GWO	0	2.12E-280	0	100		GWO	9.99E-02	1.58E-01	4.99E-02	0
	PSO	8.24E-100	1.40E-92	7.38E-92	100		PSO	2.00E-01	3.52E-01	5.80E-02	0
	SCA	1.12E-145	5.61E-123	2.79E-122	100		SCA	9.99E-02	2.65E-01	1.56E-01	0
	SSA	2.29E-18	4.04E-16	6.16E-16	100		SSA	5.00E-01	7.76E-01	1.35E-01	0
	SOA	0	0	0	100		SOA	9.99E-02	2.22E-01	6.78E-02	0
	WOA	0	0	0	100		WOA	3.22E-91	1.22E-01	7.08E-02	12
	GEO	2.89E-100	6.79E-93	2.81E-92	100		GEO	3.00E-01	3.96E-01	6.69E-02	0
	LRBGEO	0	0	0	100		LRBGEO	0	0	0	100
F7	BOA	1.13E-22	5.43E-18	5.67E-18	100	F14	BOA	2.26E-12	4.56E-12	1.05E-12	0
	FA	9.10E-26	1.94E-24	1.67E-24	100		FA	3.07E-31	4.63E-31	6.46E-32	0
	GWO	0	0	0	100		GWO	9.03E-17	1.55E-16	4.54E-17	0
	PSO	2.03E-134	6.40E-126	3.10E-125	100		PSO	4.25E-26	3.98E-24	5.22E-24	0
	SCA	5.44E-163	2.66E-147	1.16E-146	100		SCA	3.64E-11	1.67E-10	1.25E-10	0
	SSA	1.10E-17	5.98E-16	8.42E-16	100		SSA	1.55E-23	3.96E-23	2.49E-23	0
	SOA	0	0	0	100		SOA	7.11E-13	6.02E-12	9.70E-12	0
	WOA	4.33E-235	1.85E-180	0	100		WOA	-1.0E+00	-1.80E-01	3.88E-01	18
	GEO	2.42E-131	2.70E-126	9.39E-126	100		GEO	3.73E-23	7.33E-21	1.64E-20	0
	LRBGEO	0	0	0	100		LRBGEO	-1.0E+00	-1.0E+00	0	100

表 3 中的最优值和平均值体现出算法的寻优能力，标准差和 SR 体现出算法的稳定性。F1~F7 这 7 个单峰函数的测试结果检验了算法的收敛速度，其中 LRBGEO 的寻优成功率均为 100%，除了 GWO、PSO 和 LRBGEO 的标准差是最小的，此外可以看出，LRBGEO 的最优值在 F1、F2、F6、F7 函数上达到了理论最优值，且除了 GWO 在 F4、F6、F7，PSO 在 F5，SOA 在 F6、F7，WOA 在 F6 上的表现，LRBGEO 的寻优成功率，平均值，标准差均是最好的。F8~F14 这 7 个多峰函数的测试结果检验了算法的开发性能，即跳出局部最优的能力，除了 WOA 在

F8 函数上的表现与 LRBGEO 相当以外，LRBGEO 的寻优成功率，平均值和标准差都是最好的。此外，虽然 BOA 在 F8 和 F10 上的最优值也达到了 0，但是其平均值和标准差较大，没有达到最优，类似情况还有 SOA 和 GWO 在 F8 和 F10，PSO 在 F11，WOA 在 F9、F12 和 F14 上的表现，以上情况说明了这些算法求解时没有 LRBGEO 稳定。此外，在所有的测试函数中，LRBGEO 的效果都比 GEO 好得多。从以上分析结果可以看出，LRBGEO 在求解单峰函数和多峰函数时都有突出优势，体现了 LRBGEO 较快的收敛速度以及较好的跳出局部最优的能力。

2.3 与改进算法对比

将 LRBGEO 与其他改进的算法作对比, 得到最优值、平均值、标准差、寻优成功率如表 4 所示。在 F1~F7 这 7 个单峰函数中, CASSA 在 F3、F4 上的最优值、平均值、标准差、求解成功率最好。EIW_PSO 在 F5 上的最优值达到了理论最优值 0, 但是其寻优成功率并不是 100%。ISOA 在 F7 上的表现与 LRBGEO 相当, 除此之外, LRBGEO 的最优值、平均值、标准差均是最好的, 到达了理论最优值。在 F8~F14 这 7 个多峰函数中, RDSSA 和

CASSA 在 F8、F9、F10、F12、F14 这 5 个函数上的最优值、平均值、标准差、寻优成功率与 LRBGEO 的结果相当; ISOA 在 F8 函数上的寻优结果与 LRBGEO 相当; 虽然 GEO_DLS 等算法在部分函数上的最优值也达到了理论最优值, 但是其平均值、标准差、寻优成功率却不如 LRBGEO, 比如 GEO_DLS 在 F14 函数上的寻优成功率仅为 12%, 远不如 LRBGEO 的 100%。可见, 总体而言, LRBGEO 具有最稳定的求解效果和收敛速度以及比其他算法更好的跳出局部最优的能力。

表 4 LRBGEO 与改进算法测试结果
Table 4 Comparison of LRBGEO and improved algorithms test results

函数	名称	最优值	平均值	标准差	SR/%	函数	名称	最优值	平均值	标准差	SR/%
F1	ISOA	2.10E-72	2.62E-67	6.86E-67	100	F8	ISOA	0	0	0	100
	RDSSA	2.44E-53	8.31E-52	1.62E-51	100		RDSSA	0	0	0	100
	EIW_PSO	9.54E-16	5.80E-10	3.46E-09	100		EIW_PSO	2.09E+01	4.83E+01	1.21E+01	0
	CASSA	9.54E-107	1.53E-106	2.79E-107	100		CASSA	0	0	0	100
	GEO_DLS	4.12E-32	2.63E-19	1.40E-18	100		GEO_DLS	0	2.13E-16	1.51E-15	100
	LRBGEO	0	0	0	100		LRBGEO	0	0	0	100
F2	ISOA	5.90E-45	1.82E-43	2.65E-43	100	F9	ISOA	8.88E-16	1.46E-15	1.32E-15	100
	RDSSA	3.74E-28	8.04E-27	8.40E-27	100		RDSSA	8.88E-16	8.88E-16	0	100
	EIW_PSO	1.81E-07	5.42E-04	1.16E-03	30		EIW_PSO	1.93E-08	7.55E-02	3.08E-01	72
	CASSA	5.04E-53	5.72E-53	2.44E-54	100		CASSA	8.88E-16	8.88E-16	0	100
	GEO_DLS	7.48E-14	9.46E-10	3.39E-09	100		GEO_DLS	7.99E-15	3.65E-11	8.14E-11	100
	LRBGEO	0	0	0	100		LRBGEO	8.88E-16	8.88E-16	0	100
F3	ISOA	3.17E-11	1.34E-06	6.64E-06	96	F10	ISOA	0	7.73E-03	1.17E-02	52
	RDSSA	9.52E-53	6.11E-50	3.05E-49	100		RDSSA	0	0	0	100
	EIW_PSO	3.92E-02	5.07E-01	3.83E-01	0		EIW_PSO	6.66E-16	9.75E-03	1.10E-02	40
	CASSA	1.68E-104	3.46E-104	7.55E-105	100		CASSA	0	0	0	100
	GEO_DLS	1.64E+02	3.40E+04	3.58E+04	0		GEO_DLS	0	8.88E-18	6.28E-17	100
	LRBGEO	2.06E-21	1.50E-20	9.11E-21	100		LRBGEO	0	0	0	100
F4	ISOA	1.32E-13	7.43E-11	3.70E-10	100	F11	ISOA	5.37E-10	5.10E-08	6.51E-08	100
	RDSSA	8.93E-29	2.04E-27	1.72E-27	100		RDSSA	3.91E-03	2.33E-01	2.54E-01	0
	EIW_PSO	4.03E-02	1.26E-01	6.23E-02	0		EIW_PSO	0	2.52E-31	3.72E-31	100
	CASSA	3.01E-54	4.30E-54	6.13E-55	100		CASSA	7.84E-15	3.26E-13	3.15E-13	100
	GEO_DLS	2.67E-13	7.77E-09	1.66E-08	100		GEO_DLS	6.61E-09	4.55E-06	1.54E-05	96
	LRBGEO	8.58E-12	1.48E-11	3.48E-12	100		LRBGEO	0	0	0	100
F5	ISOA	7.49E-11	1.40E-09	1.68E-09	100	F12	ISOA	1.07E+00	1.34E+00	1.94E-01	0
	RDSSA	1.31E-03	4.23E-02	1.16E-01	0		RDSSA	9.00E-01	9.00E-01	2.24E-16	100
	EIW_PSO	0	1.82E-02	9.00E-02	96		EIW_PSO	1.00E+00	1.00E+00	4.91E-09	0
	CASSA	9.81E-17	1.22E-14	1.02E-14	100		CASSA	9.00E-01	9.00E-01	2.24E-16	100
	GEO_DLS	2.59E-10	4.28E-07	1.67E-06	98		GEO_DLS	1.44E+00	2.09E+00	3.24E-01	0
	LRBGEO	0	1.37E-31	9.61E-31	100		LRBGEO	9.00E-01	9.00E-01	2.24E-16	100

续表											
函数	名称	最优值	平均值	标准差	SR/%	函数	名称	最优值	平均值	标准差	SR/%
F6	ISOA	1.08E-215	1.42E-170	0	100	F13	ISOA	9.99E-02	1.26E-01	4.43E-02	0
	RDSSA	4.32E-53	4.09E-49	9.93E-49	100		RDSSA	1.48E-28	1.86E-27	1.62E-27	100
	EIW_PSO	8.70E-105	3.79E-98	1.64E-97	100		EIW_PSO	3.00E-01	3.52E-01	6.14E-02	0
	CASSA	6.28E-110	2.64E-109	1.98E-109	100		CASSA	1.00E-54	1.23E-54	1.12E-55	100
	GEO_DLS	1.28E-58	8.41E-46	5.11E-45	100		GEO_DLS	6.64E-09	6.68E-02	4.68E-02	22
	LRBGEO	0	0	0	100		LRBGEO	0	0	0	100
F7	ISOA	0	0	0	100	F14	ISOA	1.08E-14	1.67E-14	3.40E-15	0
	RDSSA	1.56E-61	4.00E-57	1.54E-56	100		RDSSA	-1.00E+00	-1.00E+00	0	100
	EIW_PSO	1.52E-121	3.83E-114	1.09E-113	100		EIW_PSO	7.76E-29	4.05E-23	1.69E-22	0
	CASSA	6.23E-108	1.58E-107	5.47E-108	100		CASSA	-1.00E+00	-1.00E+00	0	100
	GEO_DLS	1.97E-76	2.92E-61	1.66E-60	100		GEO_DLS	-1.00E+00	-3.46E-01	4.71E-01	12
	LRBGEO	0	0	0	100		LRBGEO	-1.00E+00	-1.00E+00	0	100

2.4 数据统计分析

以上数据结果为LRBGEO和其他算法在平均值、标准差、运行时间，以及搜索成功率方面的对比。可从一定程度上说明LRBGEO具有良好的寻优性能。但是，表3和表4同样也可以看出，某些算法的搜索结果与LRBGEO相当，无法得出算法具体寻优的优劣之分。因此，需要从统计学角度进一步分析算法的性能：①将对对比算法分别与LRBGEO的寻优结果进行Wilcoxon秩和检验，判断对比算法与LRBGEO寻优效果的优劣性；②将所有对比算法与LRBGEO进行Friedman检验的整体性分析，判断算法求解效果的优劣，再进行Holm校正检验分析算法的差异性。

分别将经典基本算法和改进算法得到的寻优结果与LRBGEO的寻优结果进行秩和检验，如表5和表6所示，该秩和检验在0.05的显著性水平下进行，分别以‘+’‘-’‘=’表示LRBGEO优于、劣于、等于对比算法。从表5可以看出，LRBGEO在F5、F8、F10上的表现分别劣于PSO、GWO和WOA；其余情况下，LRBGEO均能与其他对比算法的结果产生显著性差异。从表6可以看出，改进算法的性能均有所提升，LRBGEO在F8和F10上的表现劣于GEO_DLS，在F5上的表现劣于EIW_PSO。此外，‘NAN=’表示SOA在F7和F8上的表现，RDSSA和CASSA在F8~F10、F12、

F14上的表现与LRBGEO相当。但总的来说，在与改进算法的对比中，LRBGEO的寻优结果仍有显著性差异，与RDSSA和CASSA的差异最低，只在9个函数上的表现优于RDSSA和CASSA，差异率最低为64.29%，相应地，LRBGEO在13个函数上的表现优于EIW_PSO，差异率为92.86%。

Friedman检验是针对多种方法解决问题的差异分析，通过计算对比算法的平均排名，得到算法的优劣对比。该方法比秩和检验方法能更进一步得到对比算法的整体性评价。Friedman检验的公式为

$$Rank_i = \frac{1}{N_f} \sum_{j=1}^{N_f} R_j^i$$

(15)

式中：Rank_i为算法i的最终排名；N_f为测试函数的个数；R_jⁱ为测试函数j中算法i的排名。通过式(15)分别计算出经典基本算法与改进算法的Friedman排名，结果如表7和表8所示，其中，求解某个测试函数中的算法排名所用到的是50次独立运行的最优值，若最优值相同，采取同等排名。

从表7和表8可以看出，LRBGEO的排名均为第一，说明了其在14个基准测试函数的整体评价最好。图2和图3为算法的排序雷达图，越靠近中心表示算法越靠前，所围面积越小代表算法排名越好，图2和图3直观地显示出LRBGEO在2组对比算法中的排名情况，展现出LRBGEO的优良效果。

表 5 LRBGEO 与经典基本算法下的秩和检验值对比
Table 5 Comparison of rank sum test values between LRBGEO and classical basic algorithms

函数	BOA	FA	GWO	PSO	SCA	SSA	SOA	WOA	GEO
F1	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+
F2	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+
F3	7.07E-18+	7.07E-18+	1.02E-02+	7.07E-18+	7.07E-18+	7.07E-18+	7.07E-18+	7.07E-18+	7.07E-18+
F4	9.41E-05+	7.07E-18+	7.07E-18+	7.07E-18+	7.07E-18+	7.07E-18+	7.07E-18+	7.07E-18+	7.07E-18+
F5	6.63E-20+	6.63E-20+	6.63E-20+	0.159 390-	6.63E-20+	6.63E-20+	6.63E-20+	6.63E-20+	6.63E-20+
F6	3.31E-20+	3.31E-20+	2.06E-17+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	NAN=	NAN=	3.31E-20+
F7	3.31E-20+	3.31E-20+	NAN=	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	NAN=	3.31E-20+	3.31E-20+
F8	1.82E-03+	3.12E-20+	0.082 227-	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	1.49E-08+	NAN=	3.31E-20+
F9	3.31E-20+	3.31E-20+	1.03E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	6.52E-14+	3.31E-20+
F10	5.21E-13+	3.31E-20+	2.31E-02+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	2.70E-09+	0.082 227-	3.31E-20+
F11	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	2.97E-07+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+
F12	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.98E-12+	3.31E-20+
F13	3.31E-20+	3.24E-20+	3.31E-20+	2.80E-20+	3.31E-20+	3.27E-20+	3.31E-20+	3.04E-20+	3.31E-20+
F14	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	2.32E-15+	3.31E-20+
+/-/=	14/0/0	14/0/0	12/1/1	13/1/0	14/0/0	14/0/0	12/0/2	11/1/2	14/0/0

注: “NAN=” 表示表现和 LRBGEO 相当。

表 6 LRBGEO 与改进算法下的秩和检验值对比
Table 6 Comparison of rank sum test values between LRBGEO and improved algorithms

函数	ISOA	RDSSA	GEO_DLS	EIW_PSO	CASSA
F1	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+
F2	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+
F3	7.07E-18+	7.07E-18+	7.07E-18+	7.07E-18+	7.07E-18+
F4	5.89E-03+	7.07E-18+	1.34E-12+	7.07E-18+	7.07E-18+
F5	6.63E-20+	6.63E-20+	6.63E-20+	0.975 702-	6.63E-20+
F6	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+
F7	NAN=	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+
F8	NAN=	NAN=	0.327 086-	3.31E-20+	NAN=
F9	3.43E-03+	NAN=	3.31E-20+	3.31E-20+	NAN=
F10	3.44E-08+	NAN=	0.327 086-	3.31E-20+	NAN=
F11	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	1.44E-05+	3.31E-20+
F12	3.31E-20+	NAN=	3.31E-20+	3.31E-20+	NAN=
F13	3.31E-20+	3.31E-20+	3.31E-20+	1.74E-20+	3.31E-20+
F14	3.31E-20+	NAN=	3.31E-20+	3.31E-20+	NAN=
+/-/=	12/0/2	9/0/5	12/2/0	13/1/0	9/0/5

表 7 LRBGEO 与经典基本算法的 Friedman 排名
Table 7 Comparison of friedman ranking between LRBGEO and classical basic algorithms

算法	排名平均值	排名	算法	排名平均值	排名
LRBGEO	2.36	1	WOA	4.14	2
GWO	4.36	3	FA	4.54	4
SOA	5.21	5	BOA	5.75	6
PSO	5.82	7	SSA	7.04	8
GEO	7.79	9	SCA	8.00	10

表 8 LRBGEO 与改进算法的 Friedman 排名

Table 8 Comparison of friedman ranking between LRBGEO and improved algorithms

算法	排名平均值	排名	算法	排名平均值	排名
LRBGEO	2.43	1	CASSA	2.50	2
RDSSA	3.00	3	ISOA	3.86	4
GEO_DLS	4.25	5	EIW_PSO	4.96	6

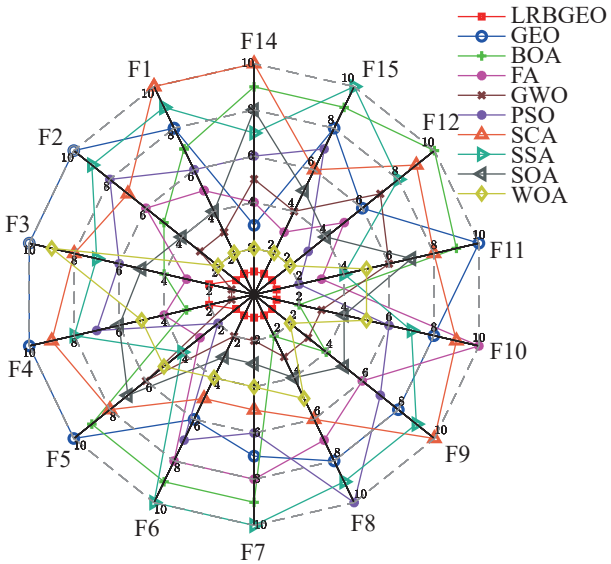


图 2 LRBGEO 与经典基本算法对比的排序雷达图
Fig. 2 Comparison of radar ranking between LRBGEO and classical basic algorithms

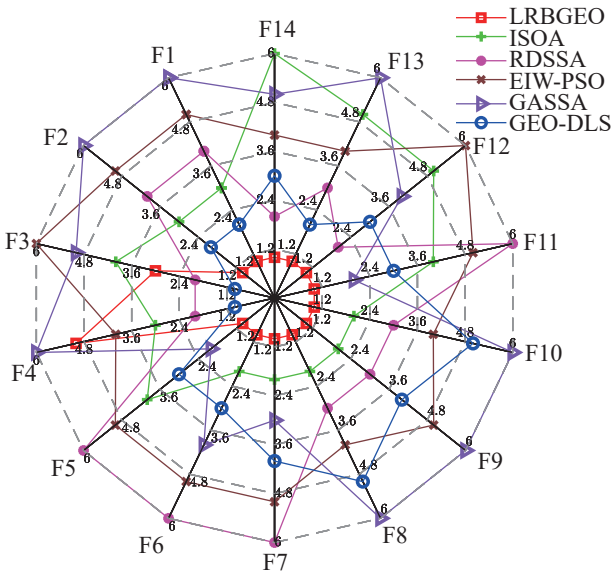


图3 LRBGEO与改进算法对比下的排序雷达图
Fig. 3 Comparison of radar ranking between LRBGEO and improved algorithms

分别将经典基本算法对比和改进算法对比得到的结果进行 Holm 后续校验，结果如表 9~10 所示。其中， i 为后续校验排名， α 为 0.05 的显著性水平， $\bar{p}$ 为后续校验得到的值，若大于相应的 α/i ，则拒绝与 LRBGEO 分布相同的假设，说明该算法与 LRBGEO 的后续校验中不存在差异。在与经典基本算法的对比中，系统假设各个算法的分布相同，经 0.05 的显著性水平进行相关样本 Friedman 双向按秩方差分析。经 Holm 后续校验得到数据检验统计的自由度为 9，系统临界卡方值为 16.919，经检验的平均卡方值为 51.650， P 值为 $5.2638\text{E}-8 \ll 0.05$ ，拒绝原假设，说明对比算法与 LRBGEO 整体存在差异。从表 9 可以看出，BOA、PSO、SSA、GEO、SCA 拒绝原假设，与改进算法有显著性差异，WOA、GWO、FA、SOA 没有拒绝原假设，与原算法差异不大，算法的整体优劣排名：LRBGEO>WOA>GWO>FA>SOA>BOA>PSO>SSA>GEO>SCA。

在与改进算法的对比中，检验统计的自由度为 5，查表得到临界卡方值为 11.07，而系统检验统计的平均卡方值为 30.889， P 值为 $1.00\text{E}-05 \ll$

0.05，拒绝原假设。从表 10 中可以看出，CASSA、RDSSA、ISOA 没有拒绝原假设，GEO_DLS、EIW_PSO 拒绝原假设，与 LRBGEO 有显著差异。算法整体排名：LRBGEO>CASSA>RDSSA>ISOA>GEO_DLS>EIW_PSO。

表 9 LRBGEO 与经典基本算法对比的 Holm 后续校验结果
Table 9 Comparison of holm follow-up verification results between LRBGEO and classical basic algorithms

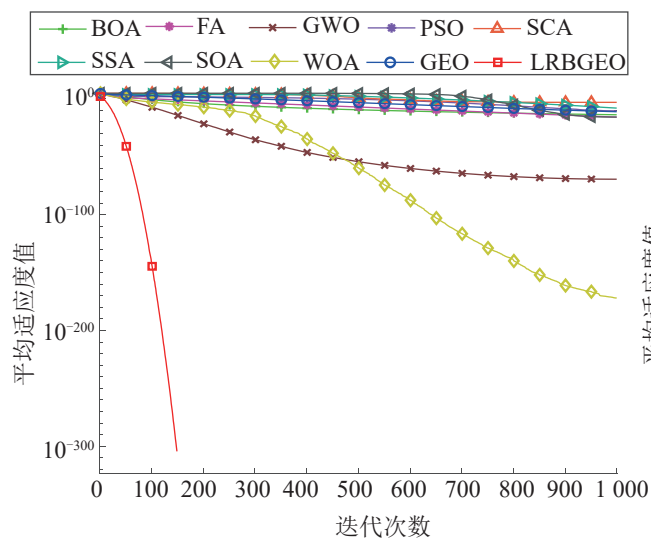
i	算法	$\bar{p}$ 值	α/i	是否拒绝
1	WOA	0.118 649	0.050 000	否
2	GWO	0.080 512	0.025 000	否
3	FA	0.056 94	0.016 667	否
4	SOA	0.012 534	0.012 500	否
5	BOA	0.003 028	0.010 000	是
6	PSO	0.002 467	0.008 333	是
7	SSA	4.300E-05	0.007 143	是
8	GEO	2.000E-06	0.006 250	是
9	SCA	8.178E-07	0.005 556	是

表 10 LRBGEO 与改进算法对比的 Holm 后续校验结果
Table 10 Comparison of holm follow-up verification results between LRBGEO and Improved algorithms

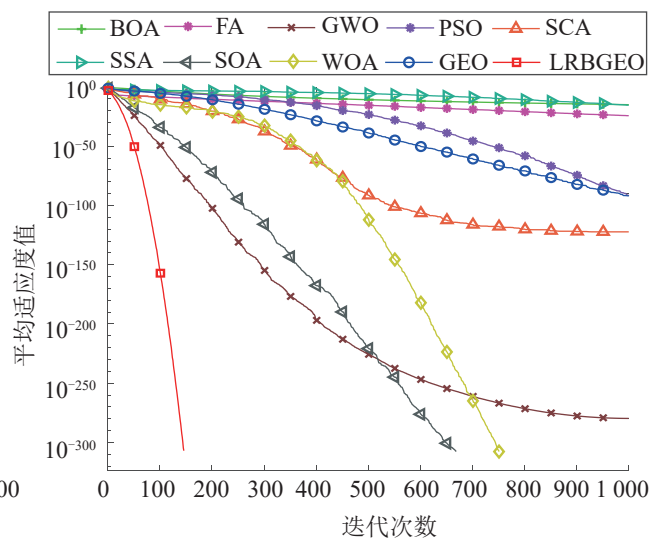
i	算法	$\bar{p}$ 值	α/i	是否拒绝
1	CASSA	0.919 538	0.050 000	否
2	RDSSA	0.419 020	0.050 000	否
3	ISOA	0.043 352	0.025 000	否
4	GEO_DLS	0.009 998	0.016 667	是
5	EIW_PSO	0.000 336	0.012 500	是

2.5 平均收敛曲线分析

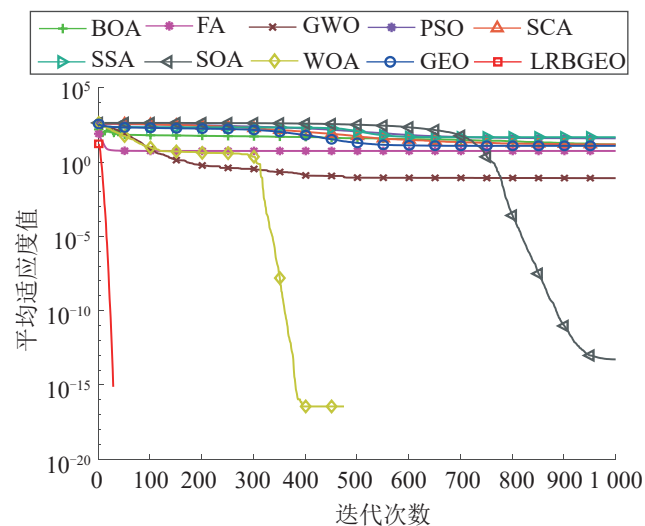
为了更直观地看到各算法的寻优过程，图 4 和图 5 分别给出了经典基本算法和改进算法对比下的部分函数的平均收敛曲线。由于 F14 的理论最优值为 -1，所以平均收敛曲线取绝对值。从图中可以看出，LRBGEO 的收敛曲线更陡峭且对应的值最小，例如，F6 函数中，虽然 SOA 和 WOA 的收敛精度与 LRBGEO 一致，但明显 LRBGEO 的曲线更陡峭，达到收敛精度的迭代次数更少，说明 LRBGEO 的收敛速度更快，搜索精度更低。此外，F12 与 F14 的理论最优值分别为 0.9 和 -1，LRBGEO 也能精准捕捉。



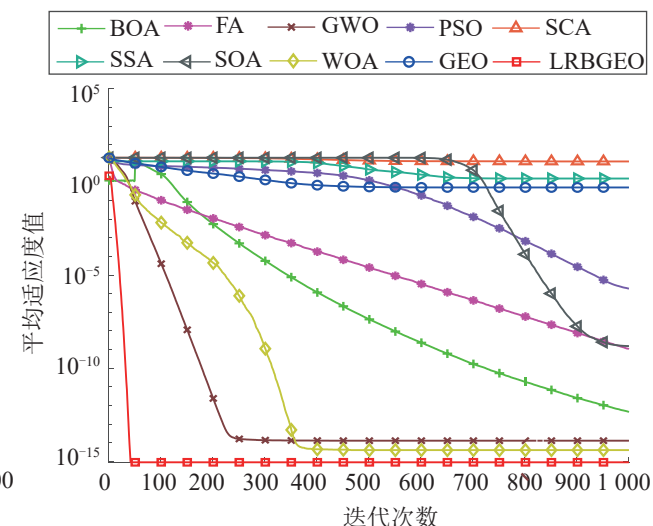
(a) F1 Sphere



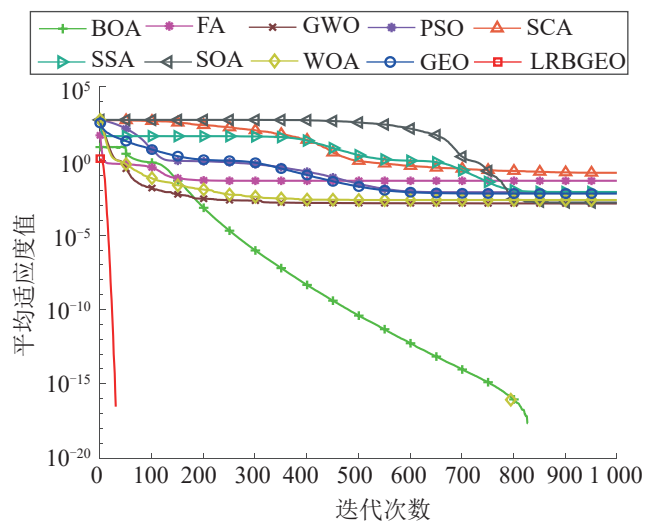
(b) F6 Matyas



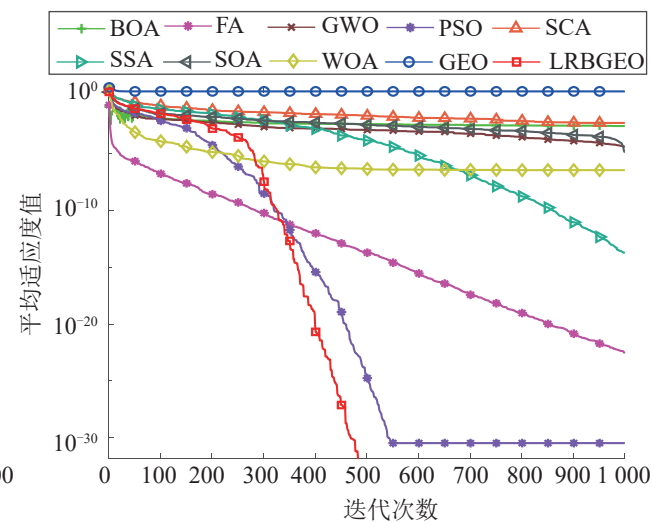
(c) F8 Rastrigin



(d) F9 Ackley 1



(e) F10 Griewank



(f) F11 Himmelblau

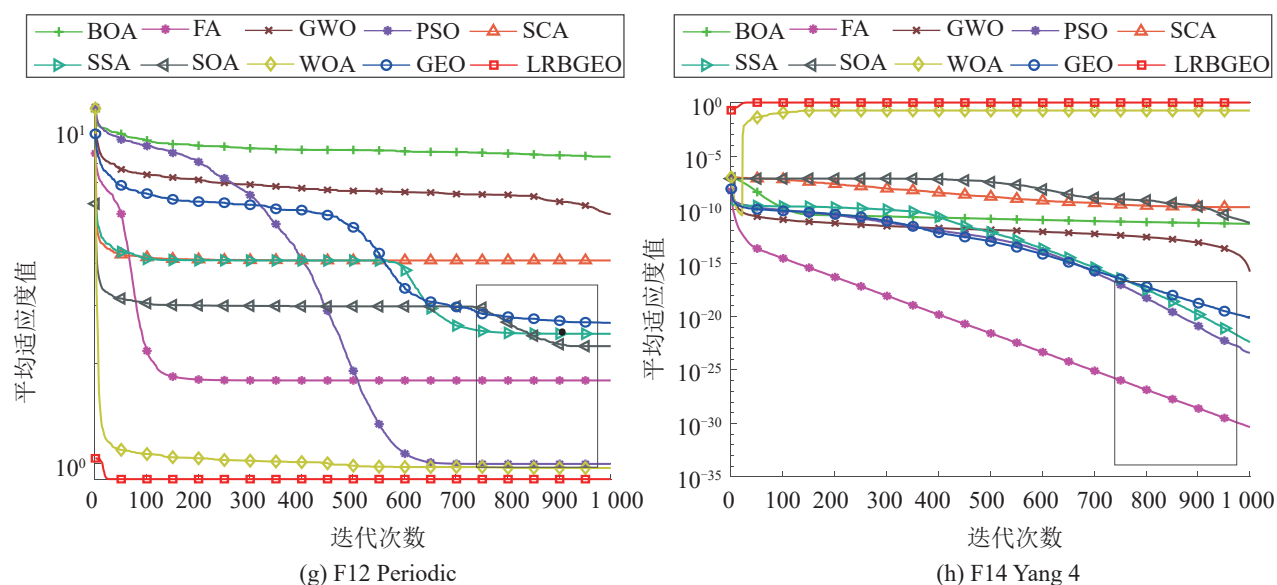


图4 LRBGEO与经典基本算法对比下的平均收敛曲线

Fig. 4 Comparison of average convergence curve between LRBGEO and classical basic algorithms

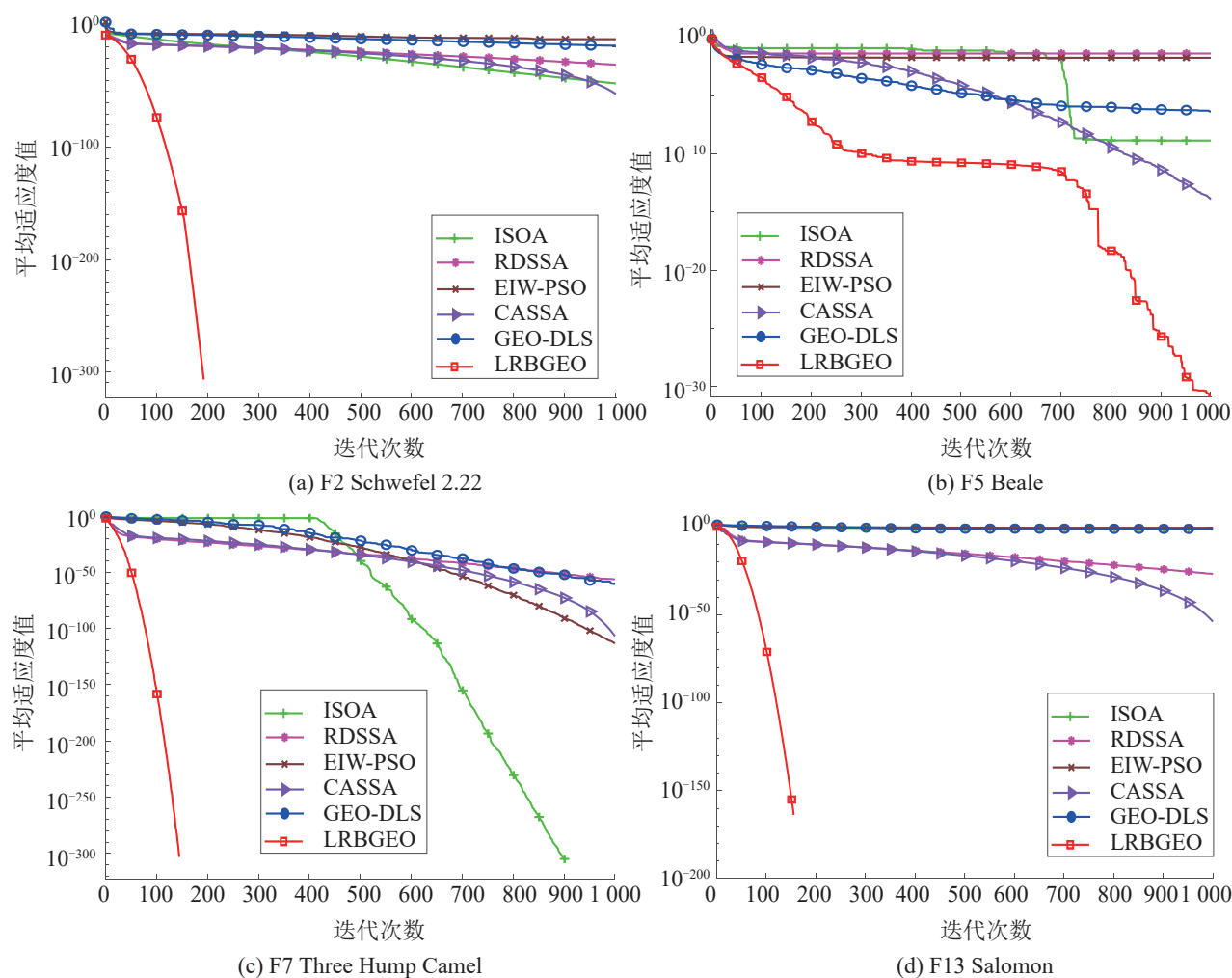


图5 LRBGEO与改进算法对比下的平均收敛曲线

Fig. 5 Comparison of average convergence curve between LRBGEO and improved algorithms

<http://www.china-simulation.com>

2.6 算法复杂度分析

设金鹰种群数量为 N , 搜索空间维度为 d , 总迭代次数为 T , 现对GEO和LRBGEO复杂度进行分析。

GEO主要分为以下几个计算部分:

种群初始化: $O(N \times d)$

主循环部分: $O(N \times d \times T)$

总复杂度=初始化+主循环= $O(N \times d \times T)$

LRBGEO主要分为以下几个计算部分。

Fuch混沌映射初始化: $O(N \times d)$

莱维策略扰动: $O(N \times d)$

布朗策略扰动: $O(N \times d)$

衰减因子策略: $O(1 \times T)$

主循环部分: $O(N \times d \times T)$

总复杂度=初始化+莱维策略+布朗策略+衰减因子策略+主循环= $O(N \times d) + O(N \times d) + O(N \times d) + O(1 \times T) + O(N \times d \times T) = O(N \times d \times T)$

由上可知, LRBGEO并没有增加原算法的复杂度, 但是在寻优效果上得到了很大提升。

3 工程应用

3.1 实验设置

为进一步验证LRBGEO的性能和实际效果, 选取了3个经典的工程问题, 并与其他算法进行对比实验。这3个工程问题均是静态单目标约束优化问题。一般可表示为

$$\begin{aligned} \min F(x) \\ \text{s.t.} \begin{cases} g_i(x) \leq 0, i=1, 2, \dots, m \\ h_j(x) = 0, j=1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

式中: $F(x)$ 为目标函数; $g_i(x)$ 和 $h_j(x)$ 为约束条件。

本文采用惩罚函数更好地处理约束条件:

$$\Phi(x) = F(x) + \left[\sum_{i=1}^m l_i \cdot \max(0, g_i(x))^\alpha + \sum_{j=1}^n o_j \cdot |h_j(x)|^\beta \right] \quad (17)$$

式中: $\Phi(x)$ 为最终目标函数; l_i 和 o_j 为惩罚系数, 惩罚系数越大, 表示最后的优化效果越好, 惩罚系数均取1 000 000; α 和 β 分别为2和1。

3.2 汽车侧面碰撞设计问题

汽车侧面碰撞设计问题是一个经典的单目标最小化约束设计问题。设计目标是减少汽车的总重量, 具体的数学模型如式(18)所示, 具体参数含义见文献[28]。

$$\begin{aligned} \min f(X) &= 1.98 + 4.9x_1 + 6.67x_2 + 6.98x_3 + \\ &\quad 4.01x_4 + 1.78x_5 + 2.73x_7 \\ \text{s.t.} \\ g_1 &= 1.16 - 0.3717x_2x_4 - 0.00931x_2x_{10} - \\ &\quad 0.484x_3x_9 + 0.01343x_6x_{10} \leq 1, \\ g_2 &= 0.261 - 0.0159x_1x_2 - 0.188x_1x_8 - \\ &\quad 0.019x_2x_7 + 0.0144x_3x_5 + \\ &\quad 0.0008757x_5x_{10} + 0.080405x_6x_9 + \\ &\quad 0.00139x_8x_{11} + 0.00001575x_{10}x_{11} \leq 0.32, \\ g_3 &= 0.214 + 0.00817x_5 - 0.131x_1x_8 - \\ &\quad 0.0704x_1x_9 + 0.03099x_2x_6 - 0.018x_2x_7 + \\ &\quad 0.0208x_3x_8 + 0.121x_3x_9 - 0.00364x_5x_6 + \\ &\quad 0.0007715x_5x_{10} - 0.0005354x_6x_{10} + \\ &\quad 0.00121x_8x_{11} \leq 0.32, \\ g_4 &= 0.074 - 0.061x_2 - 0.163x_3x_8 + \\ &\quad 0.001232x_3x_{10} - 0.166x_7x_9 + \\ &\quad 0.227x_2^2 \leq 0.32, \\ g_5 &= 28.98 + 3.818x_3 - 4.2x_1x_2 + 0.0207x_5x_{10} + \\ &\quad 6.63x_6x_9 - 7.7x_7x_8 + 0.32x_9x_{10} \leq 32, \\ g_6 &= 33.86 + 2.95x_3 + 0.1792x_{10} - 5.05x_1x_2 - \\ &\quad 11x_2x_8 - 0.0215x_5x_{10} - 9.98x_7x_8 + \\ &\quad 22x_8x_9 \leq 32, \\ g_7 &= 46.36 - 9.9x_2 - 12.9x_1x_8 + 0.1107x_3x_{10} \leq 32, \\ g_8 &= 4.72 - 0.5x_4 - 0.19x_2x_3 - 0.0122x_4x_{10} + \\ &\quad 0.009325x_6x_{10} + 0.000191x_{11}^2 \leq 4, \\ g_9 &= 10.58 - 0.647x_1x_2 - 1.95x_2x_8 + \\ &\quad 0.02054x_3x_{10} - 0.0198x_4x_{10} + \\ &\quad 0.028x_6x_{10} \leq 9.9, \\ g_{10} &= 16.45 - 0.489x_3x_7 - 0.843x_5x_6 + \\ &\quad 0.0432x_9x_{10} - 0.0556x_9x_{11} + \\ &\quad 0.000786x_{11}^2 \leq 15.7, \\ 0.5 &\leq x_1 \sim x_7 \leq 1.5, x_8, x_9 \in (0.192, 0.345), \\ -30 &\leq x_{10} \sim x_{11} \leq 30 \end{aligned} \quad (18)$$

将10个对比算法与LRBGEO用以解决汽车侧面碰撞设计问题得到结果如表11所示。从表可以看出, LRBGEO的适应度值最小, 取得了最好的结果。

表 11 汽车侧面设计问题结果比较
Table 11 Comparison of results on car side impact design problem

算法	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	适应度
LRBGEO	0.624 0	1.132 0	1.500 0	0.843 4	0.682 8	1.051 9	1.382 2	0.232 3	0.315 2	15.247 9	-5.201 0	21.919 5
GEO	0.500 0	0.926 6	0.916 6	0.706 9	0.500 0	1.195 5	1.061 4	0.282 1	0.345 0	-6.527 5	4.317 4	24.467 0
SOA	0.500 0	1.009 6	1.419 3	0.599 4	0.500 0	1.402 8	0.500 0	0.199 8	0.246 8	-30.000 0	-11.441 8	25.729 2
WOA	0.500 0	1.180 0	0.500 0	1.476 6	0.574 7	1.476 6	0.500 0	0.339 6	0.192 0	-8.806 0	-22.070 6	24.100 0
SCA	0.500 0	1.110 5	0.790 1	1.130 5	0.500 0	1.500 0	0.500 0	0.223 4	0.345 0	-29.758 3	-0.245 8	24.140 4
GWO	0.500 4	1.113 2	0.500 2	1.324 1	0.500 0	1.500 0	0.500 0	0.344 6	0.277 4	-20.280 8	4.510 2	22.912 9
SSA	0.500 0	1.210 7	0.500 0	1.241 0	1.328 3	1.351 1	0.500 0	0.345 0	0.197 6	-2.687 8	-6.751 3	24.701 3
ISOA	1.075 1	0.686 1	1.437 8	1.500 0	0.593 4	0.839 6	1.395 1	0.192 0	0.192 0	11.349 8	-5.344 3	25.280 0
GEO_DLS	0.500 0	1.158 8	0.500 4	1.448 1	0.508 4	1.490 0	0.500 0	0.345 0	0.317 8	-13.273 8	-13.952 9	23.728 9
CASSA	0.500 0	1.046 7	1.087 1	0.652 0	0.500 0	1.500 0	0.500 0	0.245 0	0.325 4	-30.000 0	-4.099 9	22.893 9
RDSSA	0.500 0	1.245 7	0.500 0	1.500 0	1.312 3	1.436 9	0.500 0	0.192 0	0.345 0	-18.282 4	9.940 8	25.944 4

3.3 三杆桁架设计问题

三杆桁架设计问题是最为经典的设计问题之一。该问题的目标是最小化轻杆结构的质量，结构示意图如图 6 所示。应力、挠度和屈曲约束是该问题的约束。由于三杆桁架是对称的，所以该设计问题中的变量 $x_1=x_3$ 。具体数学模型及参数设置如式(19)所示。经各种算法参数寻优之后得到的结果如表 12 所示。

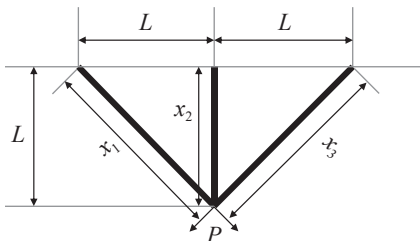


图 6 三杆桁架设计
Fig. 6 Three-bar truss design problem

$$\min f(X)=L(x_2+2\sqrt{2}x_1)$$
$$\text{s.t. } g_1=\frac{x_2}{2x_1x_2+\sqrt{2}x_1^2}P-\sigma\leq 0$$
$$g_2=\frac{x_2+\sqrt{2}x_1}{2x_1x_2+\sqrt{2}x_1^2}P-\sigma\leq 0$$
$$g_3=\frac{1}{x_1+\sqrt{2}x_2}P-\sigma\leq 0$$
$$P=2\text{ kN/cm}^2, L=100\text{ cm}, \sigma=2\text{ kN/cm}^2,$$
$$0\leq x_1, x_2\leq 1$$

(19)

表 12 三杆桁架设计问题结果比较

Table 12 Comparison of results on three-bar truss design problem

算法	x_1	x_2	适应度	排名
LRBGEO	0.790 4	0.403 4	263.893 7	2
GEO	0.768 3	0.530 0	264.797 3	10
SOA	0.825 9	0.311 6	264.906 3	11
WOA	0.810 6	0.349 4	264.221 1	6
SCA	0.802 2	0.371 2	264.020 7	4
GWO	0.792 0	0.229 1	263.899 7	3
SSA	0.806 5	0.364 8	264.599 7	8
ISOA	0.792 0	0.397 8	264.412 7	7
GEO_DLS	0.806 6	0.359 7	264.119 9	5
CASSA	0.788 6	0.408 2	263.891 5	1
RDSSA	0.801 1	0.381 5	264.739 7	9

从表 12 可以看出，LRBGEO 的寻优结果以微弱的优势排名为 2，仅次于 CASSA。相较于原算法 GEO，寻优结果得到了很大程度上的提升。

3.4 工字钢优化问题

工字钢结构设计问题的目标是通过优化长度、高度和 2 个厚度以实现最小的垂直挠度。其结构示意图如图 7 所示。其中，左边是工字钢的左视图，右边是工字钢的主视图。为了方便计算，令 $X=[x_1, x_2, x_3, x_4]=[h, b, t_w, t_f]$ 。其数学模型如式(20)所示。将 10 个对比算法与 LRBGEO 用以解决工字钢优化问题，结果如表 13 所示。

从表 13 可以看出，LRBGEO,ISOA,CASSA 的

效果最好,均比其他算法高了一个数量级,其中,LRBGEO取得了最好的效果,说明了LRBGEO能更好地解决工程问题。

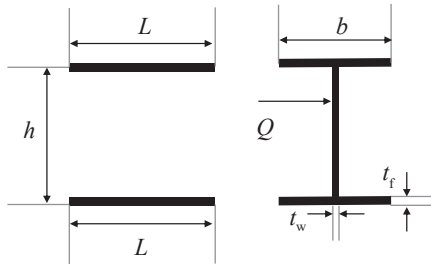


图7 工字钢设计示意图

Fig. 7 I-beam design problem

$$\begin{aligned} \min f(X) &= \frac{5000}{\frac{x_3(x_1-2x_4)}{12} + \frac{x_2x_4^3}{6} + 2x_2x_4\left(\frac{x_1-x_4}{2}\right)^2} \\ \text{s.t.} \\ g_1 &= 2x_2x_3 + x_3(x_1-2x_4) \leq 300, \\ g_2 &= \frac{1.8x_1 \times 10^4}{x_3(x_1-2x_4)^3 + 2x_2x_3(4x_4^2 + 3x_1(x_1-2x_4))} + \\ &\quad \frac{15x_2 \times 10^3}{(x_1-2x_4)x_3^3 + 2x_3x_2^3} \leq 56, \\ 10 \leq x_1 \leq 80, 10 \leq x_2 \leq 50, 0.9 \leq x_3, x_4 \leq 5 \end{aligned} \quad (20)$$

表13 工字钢设计问题结果比较

Table 13 Comparison of results on I-beam design problem

算法	x_1	x_2	x_3	x_4	适应度	排名
LRGEO	10.000	61.648	3.133	5.000	0.002	1
GEO	48.765	64.791	1.502	4.432	0.030	11
SOA	20.077	34.933	0.900	5.000	0.020	10
WOA	30.949	22.858	4.601	4.882	0.018	8
SCA	30.625	29.864	1.417	4.896	0.015	7
GWO	10.132	21.361	1.404	2.321	0.013	6
SSA	19.391	35.771	4.052	0.900	0.018	9
ISOA	27.396	50.920	0.900	3.988	0.005	2
GEO_DLS	50.000	80.000	1.471	5.000	0.012	4
CASSA	24.236	66.225	5.000	5.000	0.010	3
RDSSA	50.000	80.000	0.900	5.000	0.012	5

4 结论

为解决GEO搜索速度慢、收敛精度低的问题,

本文基于衰减因子、莱维飞行和布朗运动策略对GEO进行改进,提出了结合莱维飞行和布朗运动的衰减金鹰优化算法。分别通过与9个经典基本算法和5个改进算法对比的基准函数测试实验和与其他10个群智能算法对比的3个工程应用实验证明了本文改进策略的有效性,合理性。实验结果表明本文提出的LRBGEO具有较快的收敛速度,较高的收敛精度,能获得比对比算法更好的寻优效果。在后续的研究中,考虑将LRBGEO应用到认知无线电的频谱分配问题中,以期探索算法更多的可能性。

参考文献:

- [1] Kennedy J, Eberhart R. Particle Swarm Optimization[C]// Proceedings of ICNN'95-International Conference on Neural Networks. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1995: 1942-1948.
- [2] 侯天天, 张守京, 杜昊天. 考虑工人学习效应的双资源约束柔性车间调度[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2022(12): 164-168.
Hou Tiantian, Zhang Shoujing, Du Haotian. Research on Dual-resource Constrained Flexible Job Shop Scheduling Problem Considering Workers' Learning Effect[J]. Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique, 2022(12): 164-168.
- [3] 陈明强, 李奇峰, 冯树娟, 等. 基于改进粒子群算法的无人机三维航迹规划[J]. 无线电工程, 2023, 53(2): 394-400.
Chen Mingqiang, Li Qifeng, Feng Shujuan, et al. Three-dimensional Trajectory Planning of UAV Based on Improved Particle Swarm Optimization Algorithm[J]. Radio Engineering, 2023, 53(2): 394-400.
- [4] 王赫, 曹毅, 李玉, 等. 基于改进粒子群算法的平房仓粮温BP神经网络预测模型建立[J/OL]. 中国粮油学报: 1-10[2022-12-17]. <https://doi.org/10.20048/j.cnki.issn.1003-0174.000092>.
Wang He, Cao Yi, Li Yu, et al. Prediction Model of Grain Temperature in Warehouse Based on Improved Particle Swarm Optimization BP Neural Network[J/OL]. Journal of the Chinese Cereals and Oils Association: 1-10[2022-12-17]. <https://doi.org/10.20048/j.cnki.issn.1003-0174.000092>.
- [5] Arora S, Singh S. Butterfly Optimization Algorithm: A Novel Approach for Global Optimization[J]. Soft Computing, 2019, 23(3): 715-734.

- [6] Yang Xinshe. Firefly Algorithms for Multimodal Optimization[C]//Stochastic Algorithms: Foundations and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009: 169-178.
- [7] Mirjalili S, Mirjalili S M, Lewis A. Grey Wolf Optimizer[J]. Advances in Engineering Software, 2014, 69: 46-61.
- [8] Mirjalili S. SCA: A Sine Cosine Algorithm for Solving Optimization Problems[J]. Knowledge-based Systems, 2016, 96: 120-133.
- [9] Mirjalili S, Gandomi A H, Mirjalili S Z, et al. Salp Swarm Algorithm: A Bio-inspired Optimizer for Engineering Design Problems[J]. Advances in Engineering Software, 2017, 114: 163-191.
- [10] Dhiman G, Kumar V. Seagull Optimization Algorithm: Theory and Its Applications for Large-scale Industrial Engineering Problems[J]. Knowledge-based Systems, 2019, 165: 169-196.
- [11] Mirjalili S, Lewis A. The Whale Optimization Algorithm[J]. Advances in Engineering Software, 2016, 95: 51-67.
- [12] 刘军梅. 新型混沌粒子群混合优化算法[J]. 软件导刊, 2017, 16(2): 59-62.
Liu Junmei. New Chaotic Particle Swarm Hybrid Optimization Algorithm[J]. SoftWare Guide, 2017, 16(2): 59-62.
- [13] 刘杨, 田学锋, 詹志辉. 粒子群优化算法惯量权重控制方法的研究[J]. 南京大学学报(自然科学版), 2011, 47(4): 364-371.
Liu Yang, Tian Xuefeng, Zhan Zhihui. Research on Inertia Weight Control Approaches in Particle Swarm Optimization[J]. Journal of Nanjing University(Natural Sciences), 2011, 47(4): 364-371.
- [14] 秦维娜, 张达敏, 尹德鑫, 等. 一种基于非线性惯性权重的海鸥优化算法[J]. 小型微型计算机系统, 2022, 43(1): 10-14.
Qin Weina, Zhang Damin, Yin Dexin, et al. Seagull Optimization Algorithm Based on Nonlinear Inertia Weight[J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2022, 43(1): 10-14.
- [15] 王义, 张达敏, 邹诚诚. 增强全局搜索和自适应蜉蝣算法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2022, 54(11): 137-150.
Wang Yi, Zhang Damin, Zou Chengcheng. Enhance Global Search and Adaptive Mayfly Algorithm[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2022, 54(11): 137-150.
- [16] 葛育晓, 赵荣珍. 基于改进SOA算法自整定PID系统优化研究[J]. 仪表技术与传感器, 2020(10): 108-113, 116.
Ge Yuxiao, Zhao Rongzhen. Research on Self-tuning PID System Optimization Based on Improved Seeker Optimization Algorithm[J]. Instrument Technique and Sensor, 2020(10): 108-113, 116.
- [17] 董红斌, 李冬锦, 张小平. 一种动态调整惯性权重的粒子群优化算法[J]. 计算机科学, 2018, 45(2): 98-102, 139.
Dong Hongbin, Li Dongjin, Zhang Xiaoping. Particle Swarm Optimization Algorithm with Dynamically Adjusting Inertia Weight[J]. Computer Science, 2018, 45(2): 98-102, 139.
- [18] Humphries N E, Queiroz N, Dyer J R M, et al. Environmental Context Explains Lévy and Brownian Movement Patterns of Marine Predators[J]. Nature, 2010, 465(7301): 1066-1069.
- [19] Yang Xinshe, Deb S. Multiobjective Cuckoo Search for Design Optimization[J]. Computers & Operations Research, 2013, 40(6): 1616-1624.
- [20] 于建芳, 刘升, 王俊杰, 等. 融合莱维飞行与黄金正弦的蚁狮优化算法[J]. 计算机应用研究, 2020, 37(8): 2349-2353.
Yu Jianfang, Liu Sheng, Wang Junjie, et al. Ant Lion Optimization Algorithm Integrating with Lévy Flight and Golden Sine[J]. Application Research of Computers, 2020, 37(8): 2349-2353.
- [21] Mohammadi-Balani A, Dehghan Nayeri M, Azar A, et al. Golden Eagle Optimizer: A Nature-inspired Metaheuristic Algorithm[J]. Computers & Industrial Engineering, 2021, 152: 107050.
- [22] Pan J S, Lü Jixiang, Yan Lijun, et al. Golden Eagle Optimizer with Double Learning Strategies for 3D Path Planning of UAV in Power Inspection[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2022, 193: 509-532.
- [23] Eluri R K, Devarakonda N. Binary Golden Eagle Optimizer with Time-varying Flight Length for Feature Selection[J]. Knowledge-Based Systems, 2022, 247: 108771.
- [24] Magesh T, Devi G, Lakshmanan T. Improving the Performance of Grid Connected Wind Generator with a PI Control Scheme Based on the Metaheuristic Golden Eagle Optimization Algorithm[J]. Electric Power Systems Research, 2023, 214, Part B: 108944.
- [25] Bartumeus F, Catalan J, Fulco U L, et al. Optimizing the Encounter Rate in Biological Interactions: Lévy Versus Brownian Strategies[J]. Physical Review Letters, 2002, 88(9): 097901.
- [26] 陈雷, 蔺悦, 康志龙. 基于衰减因子和动态学习的改进樽海鞘群算法[J]. 控制理论与应用, 2020, 37(8): 1766-1780.
Chen Lei, Lin Yue, Kang Zhilong. Improved Salp Swarm Algorithm Based on Reduction Factor and Dynamic Learning[J]. Control Theory & Applications, 2020, 37

- (8): 1766-1780.
- [27] 张达敏, 陈忠云, 辛梓芸, 等. 基于疯狂自适应的樽海鞘群算法[J]. 控制与决策, 2020, 35(9): 2112-2120.
Zhang Damin, Chen Zhongyun, Xin Ziyun, et al. Salp Swarm Algorithm Based on Craziness and Adaptive[J]. Control and Decision, 2020, 35(9): 2112-2120.
- [28] Saha A K. Multi-population-based Adaptive Sine Cosine Algorithm with Modified Mutualism Strategy for Global Optimization[J]. Knowledge-Based Systems, 2022, 251: 109326.