

8-25-2023

Finite-time Combination-combination Synchronization of Hyperchaotic Systems With Different Structures and Its Application

Wu Dong

School of Electrical Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830017, China, hndongwu@163.com

Cong Wang

School of Electrical Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830017, China, wangcong1120@foxmail.com

Hongli Zhang

School of Electrical Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830017, China

Ping Ma

School of Electrical Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830017, China

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research](#), [Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Paper is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation.

Finite-time Combination-combination Synchronization of Hyperchaotic Systems With Different Structures and Its Application

Abstract

Abstract: In order to improve the security of confidential communication systems effectively, a *combination-combination synchronization scheme based on finite time theory is proposed and applied to chaotic masked confidential communication*. Four classical hyperchaotic systems with universal applicability are selected as the research objects. *The backstepping method is used to design the combination-combination synchronous control scheme for different structural hyperchaotic systems based on finite-time theory and Lyapunov stability theory*. The efficiency and strong robustness to external disturbances of the finite time control scheme are verified by numerical simulation and comparative experiments. The effectiveness of the controller and the strong robustness to external interference are verified by numerical simulation. *A chaotic masking secure communication scheme is designed by using the finite time combination-combination synchronization*. The simulation results show that the scheme can recover the original information signal quickly and effectively in the presence of external interference and channel noise, and has strong anti-decipherability.

Keywords

finite-time, combination-combination, different structures, hyperchaos, chaotic masking

Recommended Citation

Dong Wu, Wang Cong, Zhang Hongli, et al. Finite-time Combination-combination Synchronization of Hyperchaotic Systems With Different Structures and Its Application[J]. Journal of System Simulation, 2023, 35(7): 1590-1601.

异构超混沌系统有限时间组合-组合同步及应用

董武, 王聪*, 张宏立, 马萍

(新疆大学 电气工程学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 为有效提高保密通信系统的安全性, 在混沌组合同步的基础上提出一种基于有限时间理论的异构超混沌系统组合-组合同步方案, 并将其应用于混沌掩盖保密通信。选取四种具有普适性的经典超混沌系统作为研究对象; 结合有限时间理论和 Lyapunov 稳定理论, 利用反步法设计异构超混沌系统的组合-组合同步控制方案, 在数学理论上证明了方案的合理性, 并通过数值仿真和对比实验验证了有限时间控制方案的高效性和对外部干扰的强鲁棒性; 利用该有限时间组合-组合同步设计了混沌掩盖保密通信方案, 仿真结果表明在外部干扰和信道噪声存在的条件下此方案能快速有效地恢复出原始信息信号, 具有较强的抗破译性。

关键词: 有限时间; 组合-组合; 异构; 超混沌; 混沌掩盖

中图分类号: TP391.9; TP273 文献标志码: A 文章编号: 1004-731X(2023)07-1590-12

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.22-0364

引用格式: 董武, 王聪, 张宏立, 等. 异构超混沌系统有限时间组合-组合同步及应用[J]. 系统仿真学报, 2023, 35(7): 1590-1601.

Reference format: Dong Wu, Wang Cong, Zhang Hongli, et al. Finite-time Combination-combination Synchronization of Hyperchaotic Systems With Different Structures and Its Application[J]. Journal of System Simulation, 2023, 35(7): 1590-1601.

Finite-time Combination-combination Synchronization of Hyperchaotic Systems With Different Structures and Its Application

Dong Wu, Wang Cong*, Zhang Hongli, Ma Ping

(School of Electrical Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830017, China)

Abstract: In order to improve the security of confidential communication systems effectively, a combination-combination synchronization scheme based on finite time theory is proposed and applied to chaotic masked confidential communication. Four classical hyperchaotic systems with universal applicability are selected as the research objects. The backstepping method is used to design the combination-combination synchronous control scheme for different structural hyperchaotic systems based on finite-time theory and Lyapunov stability theory. The efficiency and strong robustness to external disturbances of the finite time control scheme are verified by numerical simulation and comparative experiments. The effectiveness of the controller and the strong robustness to external interference are verified by numerical simulation. A chaotic masking secure communication scheme is designed by using the finite time combination-combination synchronization. The simulation results show that the scheme can recover the original information signal quickly and effectively in the presence of external interference and channel noise, and has strong anti-decipherability.

Keywords: finite-time; combination-combination; different structures; hyperchaos; chaotic masking

收稿日期: 2022-04-16

修回日期: 2022-06-27

基金项目: 国家自然科学基金(51967019, 52065064); 天山青年计划(2019Q064, 2020Q066); 天山雪松计划(2020XS03)

第一作者: 董武(1995-), 男, 硕士生, 研究方向为非线性系统分析与控制、保密通信。E-mail: hndongwu@163.com

通讯作者: 王聪(1989-), 女, 副教授, 博士, 研究方向为非线性动力学分析、智能控制等。E-mail: wangcong1120@foxmail.com

0 引言

混沌同步是混沌研究的热点之一,在保密通信^[1-2],神经网络^[3]等诸多领域得到了应用。随着通信技术和进步,基于混沌同步技术的保密通信被广泛关注^[4-5]。因此,学者对混沌同步的研究越来越多,同时提出了众多复杂的同步机制,诸如混合同步^[6]、指数同步^[7]、组合同步^[8]以及函数投影同步^[9]等。

组合同步技术被广泛研究,组合同步由多个驱动系统和多个响应系统按照某种指定关系实现同步,系统之间运算的多样性和复杂性使得保密通信系统具有很好的安全性和抗破译性。文献[10]研究了由两个驱动系统和一个响应系统组成的混沌组合同步及其保密通信,但研究对象局限于结构简单的三维系统。文献[11]延续了上述组合同步研究,将研究对象扩展到3个不同的分数阶混沌系统。文献[12]基于Lyapunov理论,对4个驱动系统和4个响应系统间的对偶组合同步问题进行研究。文献[13]在多开关同步的基础上,选取2个混沌驱动系统和1个响应系统进行组合同步研究,但研究对象没有扩展至高阶混沌系统。文献[14]基于参数已知的混沌复系统同步,研究了参数未知的异构超混沌系统自适应复同步。文献[15]利用双重同步和组合同步思想,针对4个同结构驱动系统和2个响应系统设计了双重组合同步,但没有对异结构系统进行分析。文献[16]发现基于单个响应系统的混沌同步在实际应用中存在不足,因此提出了组合-组合同步。该同步方式由2个驱动系统和2个响应系统配合完成,弥补了传统组合同步的不足,但研究对象局限于三维混沌系统。

上述研究多数针对相同结构的低维混沌系统,尤其是三维自治混沌系统,对于四维及以上的高维超混沌系统研究较少。而在混沌同步保密通信系统设计中,采用相同结构的发送端和接收端将在很大程度上增高系统的破译风险。同时,超混沌系统由于在代数结构和动力学特性上都比低维混沌系统复

杂,因此是保密通信的潜在模型。从而在实际工程应用当中,人们更加关心超混沌系统能否达到同步并应用于保密通信^[17]。此外,多数的混沌同步研究只能确保系统实现无限时间段内的渐进同步,以致收敛时间无法达到最优,在保密通信等应用中具有较大的局限性。因此针对混沌系统设计一种基于有限时间理论快速同步方案具有十分重要的现实意义^[18]。在已有的相关研究中,文献[19]针对改进的三维混沌系统设计了有限时间同步控制器,实现了2个相同结构混沌系统间的有限时间同步。文献[20]选取三维时滞混沌系统作为研究对象,实现了3个异结构混沌系统间的有限时间投影同步。但目前对多驱动和多响应系统以及多个异结构超混沌系统有限时间同步的研究还较少。

基于以上研究,为进一步提高混沌系统同步控制效果,缩短响应时间,本文结合有限时间理论提出异结构超混沌系统的有限时间组合-组合同步方案并应用于保密通信中。通过选取4个具有普适性的经典超混沌系统设计有限时间组合-组合同步方案,并与非有限时间组合-组合同步方案进行对比分析,证实了有限时间组合-组合同步方案的优越性。

1 有限时间组合-组合同步描述

1.1 有限时间理论概述

针对以下非线性系统:

$$\dot{x}=f(x), f(0)=0 \quad (1)$$

式中: $x \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态变量; f 为 $D \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是定义域 D 到 n 维空间 \mathbf{R}^n 中的一个连续函数。

定义1^[21] 当且仅当非线性系统(1)处于稳定状态且为有限时间收敛(又称短时间收敛)时,系统平衡点 $x=0$ 为连续有限时间稳定的。系统处于有限时间收敛状态时,存在连续函数 $T(x)$ 为 $D_0 \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty)$,使 $\forall x_0 \in D_0 \subset D$ 。系统(1)的解为 $x(t, x_0)$:

$$(1) \text{ 当 } x \in [0, T(x_0)] \text{ 时, } x(t, x_0) \in D_0 \setminus \{0\} \text{ 且}$$

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t, x_0) = 0;$$

$$(2) \text{ 当 } t > T(x_0) \text{ 时, } x(t, x_0) = 0.$$

若 $D=D_0=R^n$ ，则系统(1)处于全局有限时间稳定状态，即系统(1)的状态变量能在有限时间区间内收敛至平衡点。

定理1 若一个正定连续函数 $V(x)$ 满足

$$\dot{V}(t) \leq -nV^\xi(t), \forall t > t_0, V(t_0) \geq 0 \quad (2)$$

式中： $n > 0$ ， $0 < \xi < 1$ 是常数。则对于任意的初始时间 t ， $V(t)$ 都满足以下不等式：

$$V^{1-\xi}(t) \leq V^{1-\xi}(t_0) - n(1-\xi)(t-t_0), t_0 < t < t_1$$

$$V(t) \equiv 0, \forall t > t_1$$

$$\text{式中： } t_1 = t_0 + \frac{V^{1-\xi}(t_0)}{n(1-\xi)}.$$

即对于任意的初始值，可使得系统(2)在有限的时间 $t_1 \leq t_0 + \frac{V^{1-\xi}(t_0)}{n(1-\xi)}$ 内实现 $V(t) \equiv 0$ ，即使得系统达到全局稳定状态。

此处研究的有限时间稳定理论注重系统在有限的时间区间内的暂态性能，属于一种短时间稳定理论，在通信和飞行控制等领域具有很强的实用性。而 Lyapunov 意义下的系统渐进稳定主要研究系统在无限长的时间段内的稳态性能，往往忽略了系统的暂态特性，因此在某些实际应用中存在较大的局限性。

1.2 组合-组合同步理论

组合同步的提出为解决2个驱动系统和1个响应系统之间的同步问题提供了新方法，在组合同步的基础上，组合-组合同步进一步构建了更加复杂的同步机制，实现了多个驱动系统与多个响应系统之间的同步。本文针对以下2个驱动和2个响应系统：

$$\text{驱动系统1 } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t)) \quad (3)$$

$$\text{驱动系统2 } \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}_2(\mathbf{y}(t)) \quad (4)$$

$$\text{响应系统1 } \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{g}_1(\mathbf{z}(t)) + \mathbf{u}(t) \quad (5)$$

$$\text{响应系统2 } \dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{g}_2(\mathbf{w}(t)) + \mathbf{v}(t) \quad (6)$$

式中： $\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ， $\mathbf{y}(t) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ， $\mathbf{z}(t) = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ ， $\mathbf{w}(t) = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 为系统的状态向量， $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t))$ ， $\mathbf{f}_2(\mathbf{y}(t))$ ， $\mathbf{g}_1(\mathbf{z}(t))$ ， $\mathbf{g}_2(\mathbf{w}(t))$ 为 $R^n \rightarrow R^n$ 是4个连续的向量函数； $\mathbf{u}(t)$ ， $\mathbf{v}(t)$ 为

$R^n \times R^n \times R^n \times R^n \rightarrow R^n$ 分别是响应系统(5)，(6)待设计的控制器。

针对以上4个混沌系统，定义驱动和响应系统之间的同步误差为

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{By}(t) - \mathbf{Cz}(t) - \mathbf{Dw}(t) \quad (7)$$

式中： $\mathbf{e}(t) = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ 。

定义2 如果存在4个常数矩阵 \mathbf{A} ， \mathbf{B} ， \mathbf{C} ， $\mathbf{D} \in R^{n \times n}$ ，其中 $\mathbf{C} \neq 0$ 或 $\mathbf{D} \neq 0$ ，使得

$$\lim_{t \rightarrow t_s} \|\mathbf{e}(t)\| = \lim_{t \rightarrow t_s} \|\mathbf{Ax}(t) + \mathbf{By}(t) - \mathbf{Cz}(t) - \mathbf{Dw}(t)\| = 0 \quad (8)$$

且当 $t \geq t_s$ 时

$$\|\mathbf{e}(t)\| \equiv 0 \quad (9)$$

成立，即可说明驱动系统(3)，(4)和响应系统(5)，(6)实现了有限时间组合-组合同步。

式中 t_s 为系统达到组合-组合同步所用的时间； $\|\cdot\|$ 代表矩阵范数。

注释1 若 $\mathbf{C} = 0$ 或 $\mathbf{D} = 0$ ，此同步方式转化为有限时间组合同步。

注释2 现有的许多同步方式可视为本文同步模型中的特殊情形之一，因此可不必在诸多应用中重设控制器模型。

组合-组合同步中系统的复杂性和各种运算的多样性使得基于此同步方式的保密通信具有很大的应用前景。结合有限时间理论的组合-组合同步方案进一步优化了控制系统的暂态性能，在保密通信中可大大缩短系统的同步时间，增强信息传输的安全性。

2 异结构超混沌系统的有限时间组合-组合同步

2.1 系统的模型及特性

与低维混沌系统不同，超混沌系统的吸引子具有两个或两个以上正的 Lyapunov 指数，其相轨迹多变，因此具有更加复杂的动力学特性。本文选取如下4种经典的超混沌系统展开研究，分别是：超混沌 Qi 系统，超混沌 Chen 系统，超混沌 Lü 系统和超混沌 Lorenz 系统。各系统的相图如图1所示。

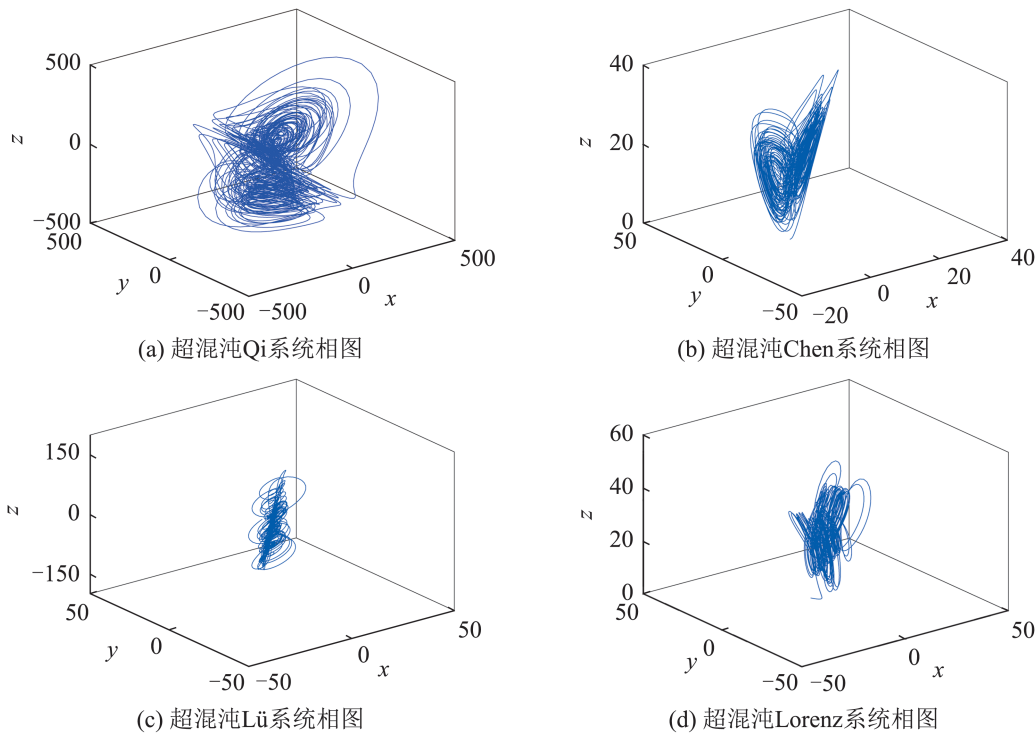


图1 系统的相图

Fig. 1 Phase diagram of systems

超混沌 Qi 系统的数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1) + x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = b_1(x_1 + x_2) - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = -c_1 x_3 - g_1 x_4 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_4 = -d_1 x_4 + f_1 x_3 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (10)$$

式中: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 。选取系统参数 $a_1 = 50$, $b_1 = 25$, $c_1 = 13$, $d_1 = 8$, $f_1 = 30$, $g_1 = 33$, 初始值为 $(2, 5, -1, -1)$ 时, 系统相图如图 1(a) 所示, 此时系统的 Lyapunov 指数分别为 $L_1 = 54.99$, $L_2 = 5.73$, $L_3 = 2.52$, $L_4 = -108.4$, 即存在 3 个大于零的 Lyapunov 指数, 故系统(10)处于超混沌状态。

超混沌 Chen 系统的模型为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_2(y_2 - y_1) + y_4 \\ \dot{y}_2 = d_2 y_1 - y_1 y_3 + c_2 y_2 \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - b_2 y_3 \\ \dot{y}_4 = y_2 y_3 + r_2 y_4 \end{cases} \quad (11)$$

式中: $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ 。选取系统参数 $a_2 = 35$, $b_2 = 3$, $c_2 = 16$, $d_2 = 7$, $r_2 = 0.5$, 初始值为 $(6, -1, 6, -2)$ 时, 系统相图如图 1(b) 所示, 此时 4 个 Lyapunov 指

数分别为 $L_1 = 0.2361$, $L_2 = 0.1465$, $L_3 = -0.4989$, $L_4 = -25.38$, 即存在 2 个大于零的 Lyapunov 指数, 故系统(11)处于超混沌状态。

超混沌 Lü 系统的模型为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_3(z_2 - z_1) + z_4 \\ \dot{z}_2 = -z_1 z_3 + c_3 z_2 \\ \dot{z}_3 = z_1 z_2 - b_3 z_3 \\ \dot{z}_4 = z_1 z_3 + d_3 z_4 \end{cases} \quad (12)$$

式中: $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T$ 。选取系统参数 $a_3 = 36$, $b_3 = 3$, $c_3 = 20$, $d_3 = 1.3$, 初始值为 $(-2, 1, -1.3, 2)$ 时, 系统相图如图 1(c) 所示, 此时系统的 Lyapunov 指数分别为 $L_1 = 0.8088$, $L_2 = 0.2123$, $L_3 = 0.1266$, $L_4 = -18.85$, 即存在 2 个以上大于零的 Lyapunov 指数, 故系统(12)处于超混沌状态。

超混沌 Lorenz 系统的模型为

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = a_4(w_2 - w_1) + w_4 \\ \dot{w}_2 = c_4 w_1 - w_2 - w_1 w_3 \\ \dot{w}_3 = w_1 w_2 - b_4 w_3 \\ \dot{w}_4 = -w_2 w_3 + r_4 w_4 \end{cases} \quad (13)$$

式中： $\mathbf{w}=(w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ 。选取系统参数 $a_4=10$ ， $b_4=8/3$ ， $c_4=28$ ， $r_4=-1$ ，初始值为 $(-3, 5, 1, 2.5)$ 时，系统相图如图 1(d)所示，此时系统的 Lyapunov 指数分别为 $L_1=0.229 2$ ， $L_2=0.192 4$ ， $L_3=-0.0398 6$ ， $L_4=-15.05$ ，即存在 2 个大于零的 Lyapunov 指数，故系统(13)处于超混沌状态。

对于以上 4 种超混沌系统模型，分别观察其吸引子在不同平面的投影，均可发现其运行轨迹为蝴蝶吸引子，表明系统处于典型的混沌状态。从图 1 中可以看出，处于混沌状态的各系统运行轨迹复杂多变，貌似随机实则有序，直观展现了混沌信号的伪随机性和不可预测性等特性。正是由于混沌信号的这些特性满足通信系统对保密信号的特殊要求，使得混沌系统在保密通信领域有着广阔的应用前景。因此，本文结合有限时间理论和组合-组合同步控制方法，构建异结构多混沌系统组成的驱动系统和响应系统，通过多变量结合的方式构建同步误差系统并使其在有限时间内稳定，最终实现系统的同步设计及保密通信应用。

2.2 控制方案

为实现异结构超混沌系统间的组合-组合同步控制问题，选取超混沌 Qi 系统(式(10))和超混沌 Chen 系统(式(11))作为两个驱动系统；将控制器 \mathbf{u} ， \mathbf{v} 分别加入超混沌 Lü 系统(式(12))和超混沌 Lorenz 系统(式(13))作为如下 2 个响应系统：

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_3(z_2 - z_1) + z_4 + u_1 \\ \dot{z}_2 = -z_1 z_3 + c_3 z_2 + u_2 \\ \dot{z}_3 = z_1 z_2 - b_3 z_3 + u_3 \\ \dot{z}_4 = z_1 z_3 + d_3 z_4 + u_4 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = a_4(w_2 - w_1) + w_4 + v_1 \\ \dot{w}_2 = c_4 w_1 - w_2 - w_1 w_3 + v_2 \\ \dot{w}_3 = w_1 w_2 - b_4 w_3 + v_3 \\ \dot{w}_4 = -w_2 w_3 + r_4 w_4 + v_4 \end{cases} \quad (15)$$

式中： $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ ， $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ 。

为了方便讨论，取常数矩阵 $\mathbf{A}=\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ， $\mathbf{B}=\text{diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ ， $\mathbf{C}=\text{diag}$

$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ ， $\mathbf{D}=\text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ 。由误差式(7)得同步误差函数为

$$\begin{cases} e_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 - \gamma_1 z_1 - \delta_1 w_1 \\ e_2 = \alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 - \gamma_2 z_2 - \delta_2 w_2 \\ e_3 = \alpha_3 x_3 + \beta_3 y_3 - \gamma_3 z_3 - \delta_3 w_3 \\ e_4 = \alpha_4 x_4 + \beta_4 y_4 - \gamma_4 z_4 - \delta_4 w_4 \end{cases} \quad (16)$$

对同步误差函数求导可得误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (-a_1 - a_2 - a_3 - a_4)e_1 + a_1(\beta_1 y_1 - \gamma_1 z_1 - \delta_1 w_1) + a_2(\alpha_1 x_1 - \gamma_1 z_1 - \delta_1 w_1) + a_3(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 - \delta_1 w_1) + a_4(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 - \gamma_1 z_1) - a_1 \alpha_1 x_2 + a_2 \beta_1 y_2 - a_3 \gamma_1 z_2 - a_4 \delta_1 w_2 + \beta_1 y_4 - \gamma_1 z_4 - \gamma_1 u_1 - \delta_1 w_4 - \alpha_1 x_2 x_3 - \delta_1 v_1 \\ \dot{e}_2 = (b_1 + c_2 + c_3)e_2 - b_1(\beta_2 y_2 - \gamma_2 z_2 - \delta_2 w_2) - c_2(\alpha_2 x_2 - \gamma_2 z_2 - \delta_2 w_2) - c_3(\alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 - \delta_2 w_2) + \delta_2 w_2 + b_1 \alpha_2 x_1 + d_2 \beta_2 y_1 - c_4 \delta_2 w_1 - \alpha_2 x_1 x_3 - \beta_2 y_1 y_3 + \gamma_2 z_1 z_3 - \gamma_2 u_2 + \delta_2 w_1 w_3 - \delta_2 v_2 \\ \dot{e}_3 = (-c_1 - b_2 - b_3 - b_4)e_3 + a_3 \alpha_1 x_2 + \beta_3 y_1 y_2 + c_1(\beta_3 y_3 - \gamma_3 z_3 - \delta_3 w_3) + b_2(\alpha_3 x_3 - \gamma_3 z_3 - \delta_3 w_3) + b_3(\alpha_3 x_3 + \beta_3 y_3 - \delta_3 w_3) - \gamma_3 z_1 z_2 - \gamma_3 u_3 - \delta_3 w_1 w_2 + b_4(\alpha_3 x_3 + \beta_3 y_3 - \gamma_3 z_3) - g_1 \alpha_3 x_4 - \delta_3 v_3 \\ \dot{e}_4 = (-d_1 + r_2 + d_3 + r_4)e_4 + f_1 \alpha_4 x_3 + \alpha_4 x_1 x_2 + d_1(\beta_4 y_4 - \gamma_4 z_4 - \delta_4 w_4) + \beta_4 y_2 y_3 - \gamma_4 z_1 z_3 + \delta_4 w_2 w_3 - d_3(\alpha_4 x_4 + \beta_4 y_4 - \delta_4 w_4) - \gamma_4 u_4 - r_2(\alpha_4 x_4 - \gamma_4 z_4 - \delta_4 w_4) - r_4(\alpha_4 x_4 + \beta_4 y_4 - \gamma_4 z_4) - \delta_4 v_4 \end{cases} \quad (17)$$

为设计有效的控制器使得驱动系统(10)、(11)与响应系统(14)、(15)达到同步，将混沌系统的有限时间同步问题进一步转化为误差系统(17)在有限时间内的稳定问题。因此，若保证误差系统(17)在有限时间内达到稳定状态，即可说明驱动系统(10)、(11)与响应系统(14)、(15)之间实现了有限时间组合-组合同步。

令响应系统施加的控制器 $\mathbf{U}=(U_1, U_2, U_3, U_4)^T$ ，其中 $U_1=\gamma_1 u_1 + \delta_1 v_1$ ， $U_2=\gamma_2 u_2 + \delta_2 v_2$ ， $U_3=\gamma_3 u_3 + \delta_3 v_3$ ， $U_4=\gamma_4 u_4 + \delta_4 v_4$ ，则有以下定理。

定理 2 针对混沌驱动系统(10)，(11)与响应系统(14)、(15)，若选取的 4 个常数矩阵 \mathbf{A} ， \mathbf{B} ， \mathbf{C} ， \mathbf{D} 满足定义 2，则设计如下：

$$\begin{cases}
 U_1 = a_1(\beta_1 y_1 - \gamma_1 z_1 - \delta_1 w_1) - a_1 \alpha_1 x_2 + a_2 \beta_1 y_2 + \\
 a_2(\alpha_1 x_1 - \gamma_1 z_1 - \delta_1 w_1) - a_3 \gamma_1 z_2 - a_4 \delta_1 w_2 + \\
 a_3(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 - \delta_1 w_1) - \alpha_1 x_2 x_3 + \beta_1 y_4 + \\
 a_4(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 - \gamma_1 z_1) - \gamma_1 z_4 - \delta_1 w_4 + e_1^\alpha + \\
 k_1 e_1 \\
 U_2 = -b_1(\beta_2 y_2 - \gamma_2 z_2 - \delta_2 w_2) - c_2(\alpha_2 x_2 - \gamma_2 z_2 - \\
 \delta_2 w_2) - c_3(\alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 - \delta_2 w_2) + b_1 \alpha_2 x_1 + \\
 \delta_2 w_2 + d_2 \beta_2 y_1 - c_4 \delta_2 w_1 - \alpha_2 x_1 x_3 - \beta_2 y_1 y_3 + \\
 \gamma_2 z_1 z_3 + \delta_2 w_1 w_3 + k_2 e_2 + e_2^\beta \\
 U_3 = c_1(\beta_3 y_3 - \gamma_3 z_3 - \delta_3 w_3) + a_3 x_1 x_2 + \beta_3 y_1 y_2 + \\
 b_2(\alpha_3 x_3 - \gamma_3 z_3 - \delta_3 w_3) + b_3(\alpha_3 x_3 + \beta_3 y_3 - \\
 \delta_3 w_3) - \gamma_3 z_1 z_2 - \delta_3 w_1 w_2 + b_4(\alpha_3 x_3 + \beta_3 y_3 - \\
 \gamma_3 z_3) - g_1 \alpha_3 x_4 + k_3 e_3 + e_3^\gamma \\
 U_4 = d_1(\beta_4 y_4 - \gamma_4 z_4 - \delta_4 w_4) + \alpha_4 x_1 x_2 + \beta_4 y_2 y_3 - \\
 \gamma_4 z_1 z_3 + \delta_4 w_2 w_3 - d_3(\alpha_4 x_4 + \beta_4 y_4 - \delta_4 w_4) + \\
 f_1 \alpha_4 x_3 - r_2(\alpha_4 x_4 - \gamma_4 z_4 - \delta_4 w_4) - r_4(\alpha_4 x_4 + \\
 \beta_4 y_4 - \gamma_4 z_4) + k_4 e_4 + e_4^\delta
 \end{cases} \quad (18)$$

即可使得驱动系统与响应系统达到有限时间组合-组合同步。其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为适当的有理数, 取 $\alpha = \beta = \gamma = \delta = ij$ ($j > i$, i 和 j 是正的奇整数); $v_1 = (k_1 e_1 + e_1^\alpha) / \delta_1$, $v_2 = (k_2 e_2 + e_2^\beta) / \delta_2$, $v_3 = (k_3 e_3 + e_3^\gamma) / \delta_3$, $v_4 = (k_4 e_4 + e_4^\delta) / \delta_4$, 且 $k_1 > -a_1 - a_2 - a_3 - a_4$, $k_2 > b_1 + c_2 + c_3$, $k_3 > -c_1 - b_2 - b_3 - b_4$, $k_4 > -d_1 + d_3 + r_2 + r_4$ 。

证明: 构造 Lyapunov 函数 $V_1 = \frac{1}{2} e_1^2$, 对其求导得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= e_1 \dot{e}_1 = e_1 [(-a_1 - a_2 - a_3 - a_4) e_1 - k_1 e_1 - e_1^\alpha] = \\
 &= -(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + k_1) e_1^2 - e_1^{\alpha+1} \leq -e_1^{\alpha+1} = \\
 &= -2^{(\alpha+1)/2} \left(\frac{1}{2} e_1^2 \right)^{(\alpha+1)/2} = -2^{(\alpha+1)/2} (V_1)^{(\alpha+1)/2}
 \end{aligned}$$

即

$$\dot{V}_1 = -2^{(\alpha+1)/2} (V_1)^{(\alpha+1)/2} \quad (19)$$

因为 $0 < \alpha < 1$, 所以 $0 < (\alpha+1)/2 < 1$ 且 $2^{(\alpha+1)/2} > 0$, 由定理 1 可证明误差系统 \dot{e}_1 在有限时间内达到稳定状态, 即存在 $T_1 = \frac{V_1^{1-(\alpha+1)/2}(0)}{2^{(\alpha+1)/2}[1-(\alpha+1)/2]}$, 使得 $t \geq T_1$ 时 $e_1 \equiv 0$;

构造 $V_2 = \frac{1}{2} e_2^2$, 对其求导得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2 &= e_2 \dot{e}_2 = e_2 [(b_1 + c_2 + c_3) e_2 - k_2 e_2 - e_2^\beta] = \\
 &= -[k_2 - (b_1 + c_2 + c_3)] e_2^2 - e_2^{\beta+1} \leq -e_2^{\beta+1} = \\
 &= -2^{(\beta+1)/2} \left(\frac{1}{2} e_2^2 \right)^{(\beta+1)/2} = -2^{(\beta+1)/2} (V_2)^{(\beta+1)/2}
 \end{aligned}$$

即

$$\dot{V}_2 = -2^{(\beta+1)/2} (V_2)^{(\beta+1)/2} \quad (20)$$

因为 $0 < \beta < 1$, 所以 $0 < (\beta+1)/2 < 1$ 且 $2^{(\beta+1)/2} > 0$, 同理可证明误差系统 \dot{e}_2 在有限时间内达到稳定状态, 存在 $T_2 = \frac{V_2^{1-(\beta+1)/2}(0)}{2^{(\beta+1)/2}[1-(\beta+1)/2]}$, 使得 $t \geq T_2$

时 $e_2 \equiv 0$;

构造 $V_3 = \frac{1}{2} e_3^2$, 对其求导得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3 &= e_3 \dot{e}_3 = e_3 [(-c_1 - b_2 - b_3 - b_4) e_3 - k_3 e_3 - e_3^\gamma] = \\
 &= -(c_1 + b_2 + b_3 + b_4 + k_3) e_3^2 - e_3^{\gamma+1} \leq -e_3^{\gamma+1} = \\
 &= -2^{(\gamma+1)/2} \left(\frac{1}{2} e_3^2 \right)^{(\gamma+1)/2} = -2^{(\gamma+1)/2} (V_3)^{(\gamma+1)/2}
 \end{aligned}$$

即

$$\dot{V}_3 = -2^{(\gamma+1)/2} (V_3)^{(\gamma+1)/2} \quad (21)$$

因为 $0 < \gamma < 1$, 所以 $0 < (\gamma+1)/2 < 1$ 且 $2^{(\gamma+1)/2} > 0$, 同理可证明误差系统 \dot{e}_3 在有限时间内达到稳定状态, 存在 $T_3 = \frac{V_3^{1-(\gamma+1)/2}(0)}{2^{(\gamma+1)/2}[1-(\gamma+1)/2]}$, 使

得 $t \geq T_3$ 时 $e_3 \equiv 0$;

构造 $V_4 = \frac{1}{2} e_4^2$, 对其求导得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_4 &= e_4 \dot{e}_4 = e_4 [(-d_1 + d_3 + r_2 + r_4) e_4 - k_4 e_4 - e_4^\delta] = \\
 &= (-d_1 + d_3 + r_2 + r_4 - k_4) e_4^2 - e_4^{\delta+1} \leq -e_4^{\delta+1} = \\
 &= -2^{(\delta+1)/2} \left(\frac{1}{2} e_4^2 \right)^{(\delta+1)/2} = -2^{(\delta+1)/2} (V_4)^{(\delta+1)/2}
 \end{aligned}$$

即

$$\dot{V}_4 = -2^{(\delta+1)/2} (V_4)^{(\delta+1)/2} \quad (22)$$

因为 $0 < \delta < 1$, 所以 $0 < (\delta+1)/2 < 1$ 且 $2^{(\delta+1)/2} > 0$, 同理可证明误差系统 \dot{e}_4 在有限时间内达到稳定状态, 存在 $T_4 = \frac{V_4^{1-(\delta+1)/2}(0)}{2^{(\delta+1)/2}[1-(\delta+1)/2]}$, 使

得 $t \geq T_4$ 时 $e_4 \equiv 0$ 。

综上，证明系统(17)可在时间 T_s 内达到有限时间组合-组合同步，其中 $T_s = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ 。即驱动系统(10)，(11)与响应系统(14)，(15)之间实现有限时间组合-组合同步。

2.3 数值仿真

本节在 Matlab 2020b 仿真平台上采用 Runge-Kutta 法进行仿真实验，计算机配置为：512G SSD，AMD R7-5800H CPU，16G 内存。仿真目的是检验以上方案中的控制器(18)能否在有限时间内使系统的同步误差收敛到零，即误差系统达到稳定运行状态，实现系统间的同步。同时，通

过与非有限时间组合-组合同步方案进行比较，检验本方案是否具有更好的收敛性能。仿真参数的选取见表 1。对系统施加控制器后，驱动系统(10)，(11)和响应系统(14)，(15)的状态时间曲线如图 2 所示。

表 1 参数选取

Table 1 Relevant parameters selection

相关参数	取值
仿真步长	$h=0.001$
矩阵参数	$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=1, \beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=1,$ $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=1, \delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta_4=1$
控制器参数	$k_1=-105, k_2=88, k_3=9, k_4=20,$ $\alpha=\beta=\gamma=\delta=1/3$

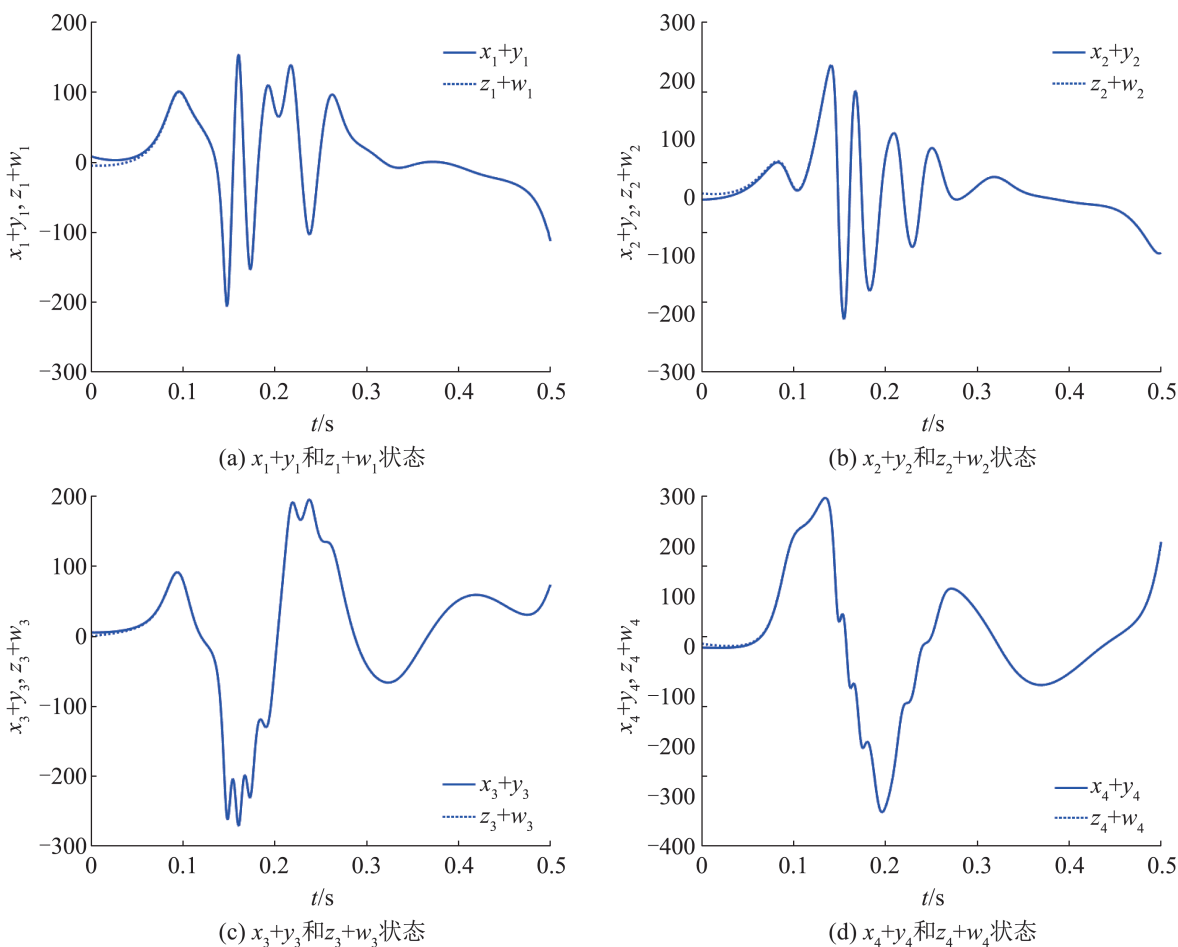


图 2 状态时间曲线
Fig. 2 State time curves

由图2(a)可以看出 x_1+y_1 与 z_1+w_1 的状态轨迹大约在 0.2 s 内趋于一致, 由图2(b), 2(c), 2(d) 同样可以看出驱动系统和响应系统对应的状态轨迹大约在 0.2 s 内趋于一致。同时, 由图3的有限时间同步误差曲线可得误差系统运行 0.2 s 左右完全收敛到零。因此, 结合图2和图3可以得出驱动系统(10), (11)对应项之和与响应系统(14), (15)对应项之和的状态轨迹曲线在经过大约 0.8 s 的运行时间后达到完全一致。说明控制器是有效的, 使得组合后的系统在较短时间内达到了同步运行状态。根据理论推导, 同步方案可使得系统在 $T_s=T_1+T_2+T_3+T_4=25.125$ s 内实现有限时间组合-组合同步, 这一结论与实际仿真结果相符。

图3是系统在有限时间组合-组合同步和普通的非有限时间组合-组合同步方案下同步误差响应曲线的对比图, 从实线可以看出有限时间同步方案的各误差曲线大约在 0.2 s 后收敛到零, 而非有限时间同步大约在 0.75 s 后收敛到零。以上结果表明, 两种方法在加入控制器后其误差系统均能以较快速度收敛到稳定状态, 混沌系统均可实现组合-组合同步。但相比非有限时间的同步方案, 基于有限时间理论的组合-组合同步方案收敛速度更快, 具有明显的优势。

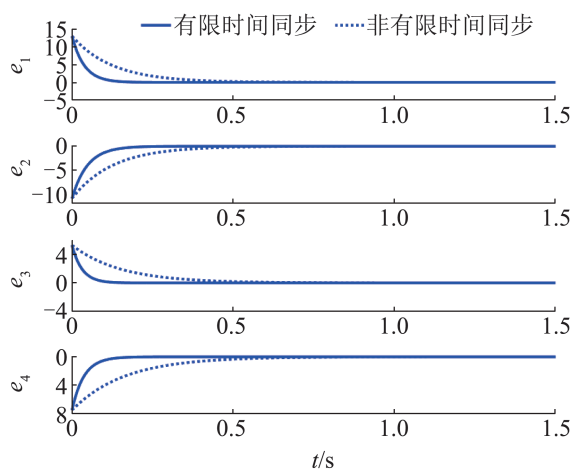


图3 同步误差响应曲线

Fig. 3 Response curve of synchronization error

为进一步验证该方法的有效性和鲁棒性, 对超混沌系统施加外部扰动信号 $n(t)=0.01\cos(0.5\pi t)$, 将扰动施加至驱动系统(11)的第二个状态方程。选择在 0.1 s 施加有限时间控制器, 驱动系统和响应系统的状态演变图和状态时间曲线分别如图4和5所示, 同步误差响应曲线如图6所示。

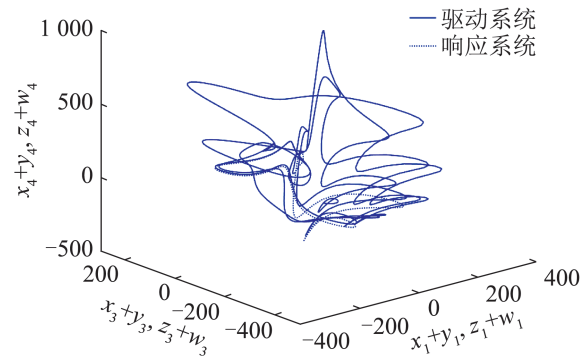
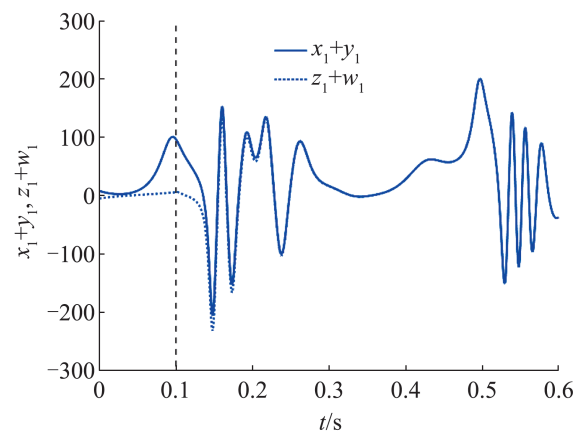
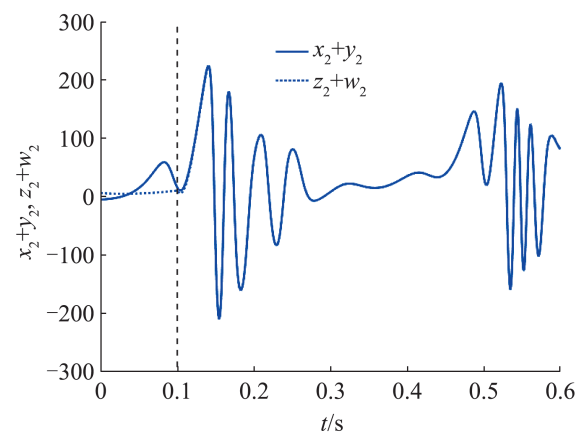


图4 状态演变

Fig. 4 State evolution diagram

(a) 存在扰动时 x_1+y_1 和 z_1+w_1 的状态(b) x_2+y_2 和 z_2+w_2 状态

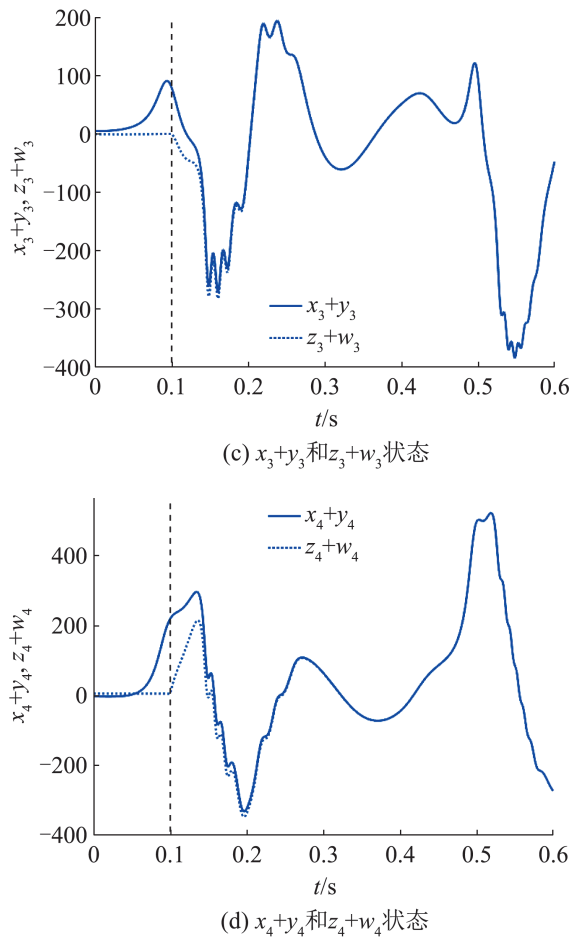


图5 含扰动的状态时间曲线

Fig. 5 State time curves in the presence of disturbance

由图4状态演变图可以看出，起初存在外部扰动但未加控制器时，代表驱动系统的实线和代表响应系统的虚线运行轨迹未重叠，即两者未同步运行；施加控制器后，驱动系统和响应系统的运行轨迹趋于一致，之后一直保持同步运行状态。存在外部扰动的情况下，由图5(a), 5(b), 5(c), 5(d)可以看出，0.1 s之前未施加控制器时驱动系统和响应系统的运行轨迹明显不同；施加控制器后经过约0.15 s的振荡，驱动系统和响应系统对应的状态运行轨迹即可达到一致，表明系统的有限时间控制器在外部扰动存在的情况下同样有效。图6是受到干扰的系统在0.1 s施加控制器后系统误差变化的对比图，实线代表有限时间同步方案，虚线代表普通的非有限时间同步方案。从图中可以看出，有限时间同步方案的误差曲线大约在0.25 s处衰减到零，非有限时间同

步方案的误差曲线大约在0.85 s处衰减到零，表明两种方案均可使系统误差衰减到零，即驱动系统和响应系统实现同步。但相比普通的非有限时间同步方案，有限时间同步方案的收敛速度更快，在扰动存在条件下具有更强的调节能力。

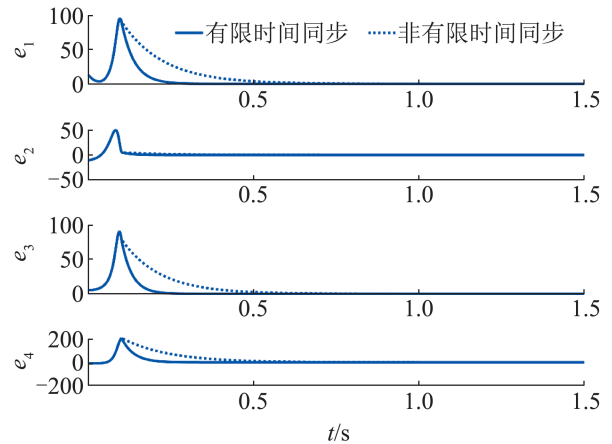


图6 含扰动的同步误差响应曲线

Fig. 6 Response curve of synchronization error in the presence of disturbance

综上所述，本文设计的有限时间组合-组合同步方案可在有限时间区间内使得误差系统收敛至稳定状态，实现组合后的驱动系统与响应系统之间的同步，并且表现出较强的鲁棒性。仿真结果验证了控制方案的合理性和优越性，达到了预期目的。该方案不仅结合有限时间理论缩短了控制器响应时间，还可根据具体应用灵活选取不同结构和维数的混沌系统，具有很强的灵活性。

3 异结构超混沌组合-组合同步在保密通信中的应用

本文提出的基于有限时间理论的异结构超混沌系统组合-组合同步方案，为混沌保密通信提供了一种新的加密形式，具有很强的抗破译能力。将此同步方案应用于混沌掩盖保密通信中，首先发送端利用混沌系统的输出信号掩盖要传输的信息信号，即将传输的信息信号叠加于混沌输出信号中，然后通过含有噪声扰动的信道将信息信号传送到接收端，最后接收端利用混沌同步技术解

密出原始信息信号, 其原理见图7。驱动系统和响应系统的选取同2.2节, 设需要传输的信息信号为 $m(t)$, 选取两个混沌信号 $x_1(t)$ 和 $y_1(t)$, 发送端和接收端之间的通信信号 $s(t)=m(t)+x_1(t)+y_1(t)$, 接收端的两个混沌信号为 $z_1(t)$ 和 $w_1(t)$ 。其中, $x_1(t)$ 和 $y_1(t)$ 分别是驱动系统式(10)和式(11)的状态变量, $z_1(t)$ 和 $w_1(t)$ 分别是响应系统式(14)和式(15)的状态变量。

为验证所设计混沌掩盖保密通信方案的正确性, 选取如图8(a)所示的信息信号 $m(t)=1.5\sin(40t)$, 将 $m(t)$ 与混沌输出信号 $x_1(t)$ 和 $y_1(t)$ 叠加产生通信信号 $s(t)$, 发送到信道中。在此方案考虑存在外部扰动信号 $n(t)$ 的条件下, 同时模拟信道中的噪声环境, 在信道中加入信噪比为 10 dB 的高斯白噪声。为了防止信息信号被中途截取, 将信息信号 $m(t)$ 分割至两条信道进行传输: 将 $1/3 m(t)$ 叠加至第一个驱动系统式(10), 将 $2/3 m(t)$ 叠加至第二个驱动系统式(11)。信息信号传送至接收端后, 从通信信号 $s(t)$

中除去混沌接收信号 $z_1(t)$ 和 $w_1(t)$ 就可间接得到恢复信号 $m'(t)$, 即 $m'(t)=s(t)-z_1(t)-w_1(t)$ 。信息信号减去恢复信号即可得到信号误差 $e(t)=m(t)-m'(t)$ 。相关仿真结果见图8。

由图8(b)可以看出, 保密通信过程中通信信号 $s(t)$ 具有较强的随机性, 可将传输的信息信号 $m(t)$ 完全掩盖。图8(c)为解调出的恢复信号 $m'(t)$, 可以看出经过短时间的振荡后信号变为稳定的正弦信号。结合图8(c)和图8(d)的有限时间同步曲线可知, 解调出的恢复信号 $m'(t)$ 经过约 0.2 s 的振荡之后与原始信息信号相同, 即表明接收端可以快速且不失真地恢复出原始信息信号。从图8(d)两种同步方案得到的信号误差对比曲线可以看出, 有限时间同步方案的信号误差 $e(t)$ 大约在 0.2 s 处衰减到零, 非有限时间同步方案的信号误差大约在 0.8 s 处衰减到零。通过对比分析两种信号误差曲线可得, 在外部扰动 $n(t)$ 和信道噪声同时存在的条件下, 基于有限时间组合-组合同步的保密通信方案效率更高, 实用性更强。

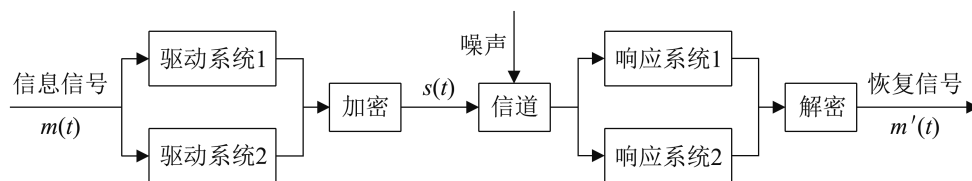
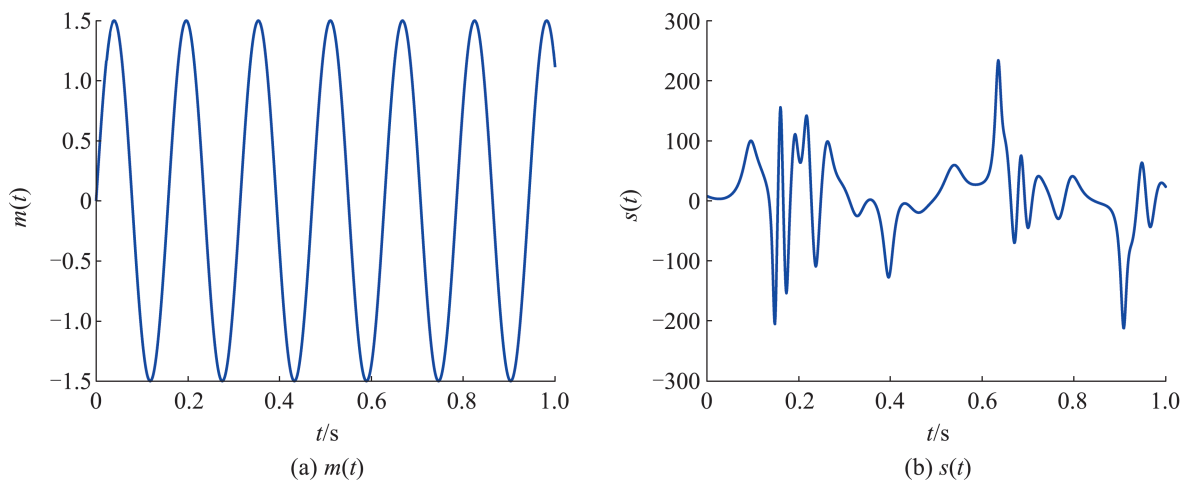


图7 保密通信原理图

Fig. 7 Schematic diagram of secure communication



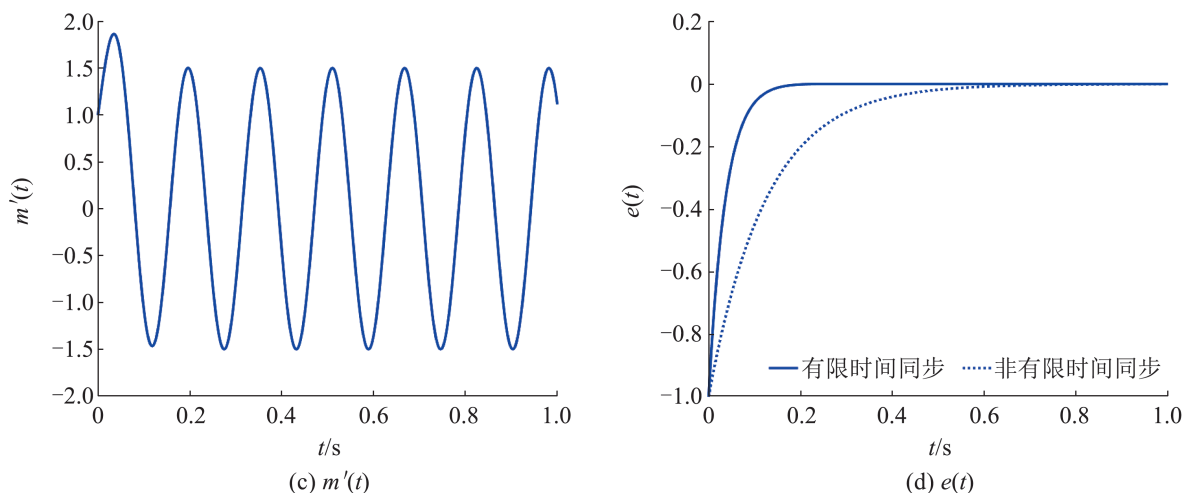


图8 保密通信中的信号波形
Fig. 8 Signal waveform in secure communication

在以上混沌掩盖方案中，由于要传输的信息信号被分割至多条信道进行传输，因此传输过程中信息信号不易被外界截获，即使某信道的部分信息信号被截取，截取者也无法破译出完整的信息信号。因此，相比大多数单驱动和单响应系统的同步方案，本方案具有更快的信息传输速度和更强的抗破译性，为混沌保密通信提供了一种新的思路。

4 结论

本文基于有限时间理论和混沌组合-组合同步思想，以2个驱动系统和2个响应系统为研究对象设计了有限时间组合-组合同步方案，并将其应用于混沌掩盖保密通信。首先选取4个异结构超混沌系统，对其数学模型进行分析；其次设计了有限时间组合-组合同步方案，利用数学理论和仿真实验证明了方案的有效性、快速性和对干扰信息的强鲁棒性；最后提出基于有限时间组合-组合同步理论的混沌掩盖保密通信方案，在外部扰动和信道噪声同时存在的条件下将保密信息分多条信道进行传输，数值仿真验证了方案的可行性和实用性。

本方案在算法设计中考虑了真实环境中存在的干扰和信道噪声等因素对系统的影响，在实际

工程应用中能很好地适应复杂多变的环境，具有较高的实用价值。需要指出的是，有限时间控制方法受系统初始状态的影响较大，而在有些情况下研究者无法准确获取系统的初始状态，所以后续的研究工作将致力于解决此类初始状态无法获取的混沌系统的同步与保密通信应用问题。

参考文献:

- [1] 李震波, 唐驾时. 参数扰动下的混沌同步控制及其保密通信方案[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(5): 592-600.
Li Zhenbo, Tang Jiashi. Chaotic Synchronization With Parameter Perturbation and Its Secure Communication Scheme[J]. Control Theory & Applications, 2014, 31(5): 592-600.
- [2] 屈双惠, 杨志宏, 容旭巍, 等. 一个新忆阻混沌系统及其在图像加密中的应用[J]. 系统仿真学报, 2019, 31(5): 984-991.
Qu Shuanghui, Yang Zhihong, Rong Xuwei, et al. A New Memristor Chaotic System and Its Application in Image Encryption[J]. Journal of System Simulation, 2019, 31(5): 984-991.
- [3] Huang Dasong, Jiang Minghui, Jian Jigui. Finite-time Synchronization of Inertial Memristive Neural Networks With Time-varying Delays Via Sampled-date Control[J]. Neurocomputing, 2017, 266: 527-539.
- [4] 薛薇, 徐进康, 贾红艳. 一个分数阶超混沌系统同步及其保密通信研究[J]. 系统仿真学报, 2016, 28(8): 1915-1921, 1928.
Xue Wei, Xu Jinkang, Jia Hongyan. Study of Synchronization for Fractional-order Hyperchaotic

- System and Its Application in Secure Communication[J]. *Journal of System Simulation*, 2016, 28(8): 1915-1921, 1928.
- [5] 孙克辉, 王会海, 贺少波. 混沌及其信息安全应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2021.
Sun Kehui, Wang Huihai, He Shaobo. *Chaos and Its Application in Information Security*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2021.
- [6] Wang Zuoxun, Guo Rongwei. Hybrid Synchronization Problem of a Class of Chaotic Systems by an Universal Control Method[J]. *Symmetry*, 2018, 10(11): 552.
- [7] 陈学菲, 刘辉昭. 参数不确定非自治混沌系统的自适应指数同步[J]. *应用数学和力学*, 2021, 42(3): 316-322.
Chen Xuefei, Liu Huizhao. Adaptive Exponential Synchronization of Non-autonomous Chaotic Systems With Uncertain Parameters[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, 42(3): 316-322.
- [8] 张檬, 韩敏. 基于滑模控制法的不确定复杂网络间有限时间组合同步[J]. *控制与决策*, 2017, 32(8): 1533-1536.
Zhang Meng, Han Min. Finite-time Combination Synchronization of Uncertain Complex Networks Based on Sliding Mode Control Method[J]. *Control and Decision*, 2017, 32(8): 1533-1536.
- [9] Wang Cong, Zhang Hongli, Fan Wenhui. Generalized Dislocated Lag Function Projective Synchronization of Fractional Order Chaotic Systems With Fully Uncertain Parameters[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2017, 98: 14-21.
- [10] Ahmad I, Shafiq M, Al-Sawalha M M. Globally Exponential Multi Switching-combination Synchronization Control of Chaotic Systems for Secure Communications[J]. *Chinese Journal of Physics*, 2018, 56(3): 974-987.
- [11] Bhat M A, Khan A. Multi-switching Combination Synchronization of Different Fractional-order Non-linear Dynamical Systems[J]. *International Journal of Modelling and Simulation*, 2018, 38(4): 254-261.
- [12] Khan A, Khattar D, Prajapati N. Dual Combination Combination Multi Switching Synchronization of Eight Chaotic Systems[J]. *Chinese Journal of Physics*, 2017, 55(4): 1209-1218.
- [13] Zheng Song. Multi-switching Combination Synchronization of Three Different Chaotic Systems Via Nonlinear Control[J]. *Optik*, 2016, 127(21): 10247-10258.
- [14] 王诗兵, 王兴元. 超混沌复系统的自适应广义组合复同步及参数辨识[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(8): 2062-2067.
Wang Shibing, Wang Xingyuan. Adaptive Generalized Combination Complex Synchronization and Parameter Identification of Hyperchaotic Complex Systems[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(8): 2062-2067.
- [15] Singh A K, Yadav V K, Das S. Dual Combination Synchronization of the Fractional Order Complex Chaotic Systems[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2017, 12(1): 011017.
- [16] Sun Junwei, Shen Yi, Zhang Guodong, et al. Combination-combination Synchronization Among Four Identical or Different Chaotic Systems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(3): 1211-1222.
- [17] Vafamand N, Khorshidi S, Khayatian A. Secure Communication for Non-ideal Channel Via Robust TS Fuzzy Observer-based Hyperchaotic Synchronization[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018, 112: 116-124.
- [18] Alattas K A, Mostafae J, Sambas A, et al. Nonsingular Integral-type Dynamic Finite-time Synchronization for Hyper-chaotic Systems[J]. *Mathematics*, 2021, 10(1): 115.
- [19] 郑广超, 刘崇新, 王琰. 一种具有隐藏吸引子的分数阶混沌系统的动力学分析及有限时间同步[J]. *物理学报*, 2018, 67(5): 41-49.
Zheng Guangchao, Liu Chongxin, Wang Yan. Dynamic Analysis and Finite Time Synchronization of a Fractional-order Chaotic System With Hidden Attractors[J]. *Acta Physica Sinica*, 2018, 67(5): 41-49.
- [20] 李善强, 彭秀艳, 李强. 多个时滞混沌系统自适应有限时间同步控制[J]. *电机与控制学报*, 2019, 23(6): 112-118.
Li Shanqiang, Peng Xiuyan, Li Qiang. Adaptive Finite-time Synchronization of Multiple Chaotic Systems With Time-varying Delay[J]. *Electric Machines and Control*, 2019, 23(6): 112-118.
- [21] 刘洋, 井元伟, 刘晓平, 等. 非线性系统有限时间控制研究综述[J]. *控制理论与应用*, 2020, 37(1): 1-12.
Liu Yang, Jing Yuanwei, Liu Xiaoping, et al. Survey on Finite-time Control for Nonlinear Systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(1): 1-12.